

کالج پروژه

www.collegeprozheh.ir



دانلود پروژه های دانشگاهی

بانک موضوعات پایان نامه

دانلود مقالات انگلیسی با ترجمه فارسی

آموزش نگارش پایان نامه ، مقاله ، پروپوزال



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی برق

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

گرایش الکترونیک

تحلیل الگوهای رفتاری الکترو دینامیک کوانتومی کاواک سیستم‌های
پیچیده در رژیم‌های تزویج مختلف

نگارش

مسلم علی‌دوستی شهرکی

استاد راهنما

سینا خراسانی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به حضرت فاطمه معصومه (س) بانوی مهربانی،
پدر، مادر و همسر عزیزم

تشکر و قدردانی:

برخود لازم می‌دانم تا از جناب آقای دکتر خراسانی به دلیل دادن فرصت استثنایی انجام این پایان‌نامه،

اعتماد کردن به اینجانب، راهنمایی‌ها، دلسوزی‌ها و تشویق‌های ایشان در حین انجام پروژه کمال تشکر

و قدردانی را داشته باشم.

چکیده

در این پروژه تحلیل الگوهای رفتاری سیستم‌های پیچیده‌ی کوانتومی، سیستم‌های اپتیک کوانتومی بس‌ذره، متشکل از تعداد دل‌خواهی از نقاط کوانتومی و مدهای کوانتومی با برهم‌کنش به دل‌خواه قوی، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در ابتدا لازم بود فضای حالت مربوط به کلی‌ترین سیستم الکترودینامیک کوانتومی کاواک دارای تعداد دل‌خواه سیستم کوانتومی ساطع‌کننده‌ی نور کوانتومی و تعداد دل‌خواه مد کاواک تعیین شود و با استفاده از هامیلتونی مربوطه و بدون تقریب، معادله‌ی شرودینگر در فضای شرودینگر در رژیم‌های تزویج مختلف حل شوند. سپس ضرایب کت حالت سیستم‌های متفاوت پیدا و با استفاده از آن احتمال حضور سیستم در حالت‌های مختلف، مقادیر چشم‌داشتی عمل‌گرهای میدانی و اتمی و درهم‌تنیدگی سیستم محاسبه شده و رفتار سیستم بررسی گردد.

در فصل اول مروری بر سیستم‌های الکترودینامیک کوانتومی کاواک، رژیم‌های تزویج متفاوت، کاربردها و نحوه ورود به رژیم‌های تزویج، مدل توصیف‌کننده سیستم، مرور روش‌های مواجهه با این مدل و نقش مدل توصیف‌کننده در بررسی درهم‌تنیدگی سیستم‌های مذکور آورده شده است.

در فصل دوم ابتدا روابط مورد نیاز جهت بررسی کلی‌ترین سیستم ممکن استخراج شده، و سپس برنامه‌های مورد نیاز جهت شبیه‌سازی سیستم و تحلیل آن نوشته شده‌اند.

در فصل سوم در سه بخش به محاسبه و تحلیل سیستم‌های الکترودینامیک کوانتومی پرداخته شده است. در بخش اول سیستمی متشکل از دو نقطه‌ی کوانتومی در برهم‌کنش با یک مد کاواک به صورت دستی حل و بررسی شده و با حل نرم افزارهای نوشته شده مقایسه شده است. در بخش دوم و سوم برای اولین بار به ترتیب رفتار یک سیستم کوانتومی واقعی و یک سیستم با اجزای تشکیل‌دهنده متعدد دارای شش نقطه‌ی کوانتومی در رژیم‌های تزویج مختلف محاسبه، تحلیل و رسم شده است.

واژه‌های کلیدی: الکترودینامیک کوانتومی کاواک، رژیم تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی، مد کاواک،

نقطه کوانتومی، چاه پتانسیل کوانتومی، هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول، درهم‌تنیدگی، بی‌نظمی و آشوب.

فهرست مطالب

۱	فصل ۱ : مقدمه
۱۳	فصل ۲ : ریاضی و الگوریتم
۱۴	۱-۲- مقدمه
۱۵	۲-۲- ماتریس حالت اولیه‌ی سیستم اپتیک کوانتومی با تعداد دلخواه نقاط برهم‌کنش
۱۵	۱-۲-۲- الگوریتم برنامه‌ی محاسبه‌ی حالت و لزوم وجود شرایط اولیه
۱۹	۲-۲-۲- حالت فوک
۲۰	۳-۲-۲- حالت هم‌دوس
۲۴	۴-۲-۲- تشریح الگوریتم کلی نوشتن نرم افزار تولید شرایط اولیه
۲۶	۳-۲- محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم در حالتی که نقاط کوانتومی یا نقطه‌ی کوانتومی خاصی در حالت تراز انرژی مشخصی هستند
۲۶	۱-۳-۲- استخراج روابط مورد نیاز
۲۷	۲-۳-۲- الگوریتم کلی برنامه
۲۹	۴-۲- محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی عمل گر فنا و بقا فوتونی
۳۱	۲-۴-۲- الگوریتم کلی برنامه
۳۴	۵-۲- محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی عمل گرهای گذار اتمی
۳۴	۱-۵-۲- استخراج روابط
۳۵	۲-۵-۲- الگوریتم کلی برنامه
۳۸	۶-۲- مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی سیستم از طریق محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی جابجاگر عمل گر گذار اتمی
۳۸	۱-۶-۲- استخراج روابط مربوطه
۳۹	۲-۶-۲- الگوریتم کلی
۴۲	فصل ۳ : تحلیل و نتایج عددی
۴۳	۱-۳- محاسبه‌ی دستی و نرم افزاری
۴۳	۱-۱-۳- مقدمه
۶۱	۲-۱-۳- محاسبه از طریق نرم‌افزارهای نوشته شده
۶۲	۲-۳- تحلیل الکترودینامیک کوانتومی یک سیستم سه ترازهی واقعی
۶۲	۱-۲-۳- مقدمه
۶۳	۲-۲-۳- مشخصات سیستم الکترودینامیک مذکور
۶۶	۳-۲-۳- تحلیل و محاسبات احتمال سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه فوک
۷۰	۴-۲-۳- محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم کوانتومی در ترازهای مختلف در رژیم‌های تزویج متفاوت با شرایط اولیه هم-دوس
۷۳	۵-۲-۳- محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی در رژیم‌های تزویج متفاوت
۷۷	۶-۲-۳- محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل گر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج متفاوت
۸۲	۷-۲-۳- درهم‌تنیدگی سیستم از طریق محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی جابجاگر عمل گر گذار اتمی
۸۶	۸-۲-۳- محاسبه‌ی هم‌نوایی سیستم

۳-۳- تحلیل حالت و پارامترهای مختلف تعداد دل خواهی از نقاط و مدهای کوانتومی با برهم کنش به دلخواه قوی. ۸۷	
۳-۳-۱- مقدمه ۸۷	
۳-۳-۲- مشخصات سیستم الکترو دینامیک مذکور ۸۸	
۳-۳-۳- تحلیل و محاسبات احتمال سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه ی فوک ۹۰	
۳-۳-۴- محاسبه ی احتمال حضور نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی مختلف در رژیم های تزویج متفاوت با شرایط اولیه ی هم دوس ۹۲	
۳-۳-۵- محاسبه ی چشم داشتی عمل گر فنا فوتونی در رژیم های تزویج متفاوت ۹۵	
۳-۳-۶- محاسبه ی چشم داشتی عمل گر گذار اتمی در رژیم های تزویج متفاوت ۱۰۰	
۳-۳-۷- محاسبه ی در هم تنیدگی از طریق چشم داشتی جابجاگر عمل گر گذار اتمی ۱۰۶	

۱۱۰	فصل ۴ : نتیجه گیری و کارهای آینده
۱۱۳	فصل ۵ : سپاس گذاری
۱۱۵	فهرست الف: کد برنامه ها
۱۳۶	مراجع

فهرست اشکال

- شکل (۱-۳) محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم در نقطه‌ی کوانتومی ۱ در ترازهای پایه و برانگیخته ۵۷
- شکل (۲-۳) مقادیر موهومی و حقیقی چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی بر حسب زمان ۵۸
- شکل (۳-۳) مقادیر حقیقی چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در طول زمان‌های متفاوت ۵۹
- شکل (۴-۳) فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی ۵۹
- شکل (۵-۳) مقادیر موهومی و حقیقی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی بر حسب زمان ۶۰
- شکل (۶-۳) مقادیر حقیقی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در طول زمان‌های متفاوت ۶۱
- شکل (۷-۳) فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار فوتونی ۶۱
- شکل (۸-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف، ستون راست و چپ به ترتیب تزویج ضعیف و قوی ۶۷
- شکل (۹-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف، تزویج بسیار قوی ۶۸
- شکل (۱۰-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف، ردیف اول صفحه‌ی قبل، سمت راست و چپ به ترتیب رژیم تزویج ضعیف و قوی، ردیف این صفحه، رژیم تزویج بسیار قوی ۷۰
- شکل (۱۱-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج ضعیف ۷۱
- شکل (۱۲-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج قوی ۷۱
- شکل (۱۳-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج بسیار قوی ۷۲
- شکل (۱۴-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج ضعیف ۷۴
- شکل (۱۵-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج قوی ۷۴
- شکل (۱۶-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی ۷۵
- شکل (۱۷-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در زمان‌های مختلف در رژیم ضعیف ۷۸
- شکل (۱۸-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان‌های مختلف در رژیم ضعیف ۷۸
- شکل (۱۹-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان‌های مختلف در رژیم قوی ۷۹
- شکل (۲۰-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در زمان‌های مختلف در رژیم قوی ۸۰
- شکل (۲۱-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان‌های مختلف در رژیم بسیار قوی ۸۰
- شکل (۲۲-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی ۸۱
- شکل (۲۳-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان در رژیم تزویج ضعیف ۸۳
- شکل (۲۴-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در رژیم تزویج ضعیف ۸۳
- شکل (۲۵-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در رژیم تزویج قوی ۸۴
- شکل (۲۶-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی از تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین، در رژیم تزویج قوی ۸۴

شکل (۲۷-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در رژیم تزویج بسیار قوی

۸۵

شکل (۲۸-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در رژیم تزویج بسیار قوی

۸۵

۸۶

شکل (۲۹-۳) پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج ضعیف و قوی، سمت راست و چپ به ترتیب

۸۷

شکل (۳۰-۳) پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج بسیار قوی

شکل (۳۱-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه هم‌دوس در رژیم‌های تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی،

۹۱

بالا سمت راست، بالا سمت چپ و پایین سمت راست به ترتیب

شکل (۳۲-۳) احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی ۱، ۳، و ۶ سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم

۹۳

تزویج ضعیف

شکل (۳۳-۳) احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی ۱، ۳، و ۶ سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم

۹۴

تزویج قوی

شکل (۳۴-۳) احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی ۱، ۳، و ۶ سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم

۹۴

تزویج بسیار قوی

۹۶

شکل (۳۵-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم تزویج ضعیف

۹۷

شکل (۳۶-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم تزویج قوی

۹۸

شکل (۳۷-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی

۱۰۱

شکل (۳۸-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ی کوانتومی ۲ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم ضعیف

۱۰۱

شکل (۳۹-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ی کوانتومی ۶ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم ضعیف

۱۰۲

شکل (۴۰-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ی کوانتومی ۲ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم قوی

۱۰۳

شکل (۴۱-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ی کوانتومی ۶ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم قوی

۱۰۴

شکل (۴۲-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ی کوانتومی ۲ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم بسیار قوی

۱۰۵

شکل (۴۳-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ی کوانتومی ۶ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم بسیار قوی

شکل (۴۴-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی برانگیخته به پایه نقطه‌ی کوانتومی ۶ در رژیم تزویج

۱۰۷

ضعیف

شکل (۴۵-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی برانگیخته به پایه‌ی نقطه‌ی کوانتومی ۶ در رژیم تزویج

۱۰۸

قوی

۱۰۸

شکل (۴۶-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی برانگیخته به پایه نقطه‌ی کوانتومی ۶ در رژیم تزویج

۱۰۸

بسیار قوی

فهرست جداول

۴۸	جدول ۱-۳. حالات مختلف ترازهای انرژی و مدکاواک
۴۹	جدول ۲-۳. مقادیر ماتریس ضرایب هامیلتونی \mathbb{H}_0
۵۱	جدول ۳-۳. مقادیر ماتریس ضرایب هامیلتونی $\mathbb{H}_{r.E}$
۵۳	جدول ۴-۳. مقادیر ماتریس ضرایب هامیلتونی $\mathbb{H}_{r.r}$
۶۴	جدول ۵-۳. مقادیر بسامد رابی
۸۹	جدول ۶-۳. مقادیر بسامد رابی

فصل ۱ : مقدمه

الکترو دینامیک کوانتومی کاواک^۱ یکی از زمینه‌های علم اپتیک کوانتومی می‌باشد که در آن منظور از کاواک در واقع بکارگیری هم‌نواگر اپتیکی^۲ یا ریز موج^۳ است، در حالی که منظور از الکترو دینامیک کوانتومی برهم کنش ماده (مانند اتم‌ها) و میدان الکترومغناطیس (مانند فوتون‌ها) در درون کاواک می‌باشد. به طور کلی می‌توان گفت این علم شامل مطالعه‌ی برهم کنش ساطع کننده‌های نور کوانتومی و مدهای کاواک است [۱]. در سال ۱۹۶۳ ادوین جینس^۴ و فرد کامینگز^۵ مدلی نظریه ارائه کردند که توصیفی کوانتومی از برهم کنش یک سیستم متشکل از اتمی دو ترازه با یک مد کوانتیده‌ی^۶ کاواک را تحلیل می‌کرد [۲]. در همان سال پاول^۷ نیز این مدل را ارائه کرد [۳] و به همین خاطر این مدل که بسیار مورد توجه در فیزیک اتمی و اپتیک کوانتومی می‌باشد، مدل جینس-کامینگز-پاول^۸ نام گرفت.

در واقع در نظریه‌ی نیمه-کلاسیک^۹ مربوط به برهم کنش اتم تنها اتم کوانتش می‌شود و میدان به صورت تابع معینی از زمان و نه یک عمل گر تلقی می‌گردد. در واقع مدل JCMP در دانستن اینکه چگونه کوانتش بودن میدان تابش در پیش‌بینی تحول^{۱۰} حالت سیستم دو ترازه اثر می‌کند در مقایسه با نظریه نیمه-کلاسیکی مربوط به برهم کنش اتم-نور به کار می‌رود. بعدها کشف شد که احیای تجمع معکوس اتمی بعد از سقوط پیامد مستقیم گسستگی حالت‌های میدان است (فوتون‌ها) [۴و۵]. این یکی از اثرات کوانتومی است که نظریه نیمه کلاسیک قادر به توضیح آن نبود اما مدل JCMP به خوبی آن را توضیح داد.

¹ Cavity Quantum Electro-Dynamic (CQED)

² Optical Resonator

³ Microwave

⁴ Edwin Jaynes

⁵ Fred Cummings

⁶ Quantized

⁷ Paul

⁸ Jaynes-Cummings-Paul Model (JCPM)

⁹ Semi-classical

¹⁰ Evolution

بسامد رابی^۱ بسامد نوسان گذار اتمی بین دو تراز انرژی در حضور یک موج الکترومغناطیس است، که معیار شدت تزویج ما بین میدان و گذار بوده، و مقدار آن نسبت مستقیم با اندازه میدان اعمالی و ممان دو قطبی، و نسبت عکس با ثابت پلانک دارد [۱]. در سال ۱۹۸۷ اثبات سقوط و احیای کوانتومی در یک میز ۲ تک اتمی به وسیله رمپ^۳، والتر^۴ و کلدین^۵ مشاهده شد [۶]. تا قبل از این زمان توانایی افزایش بسامد رابی و به عبارت دیگر ثابت تزویج ما بین یک اتم و یک مد میدان منفرد وجود نداشت که بتواند در یک زمان از سایر مدها پیشی بگیرد. ولی با پیدایش میزهای تک اتمی این امکان به وجود آمد که برهم کنش یک تک اتم (معمولاً اتم رایدبرگ) با یک مد کاواک به صورت آزمایشگاهی مطالعه شود و جنبه های مختلف مدل JCMP مطالعه شوند [۷ و ۸].

با توجه به اندازه ی ثابت تزویج، یک سیستم الکترودینامیک کوانتومی کاواک در سه رژیم تزویج ضعیف^۶، قوی^۷ و بسیار قوی^۸ قرار می گیرد. با انتخاب نوع ساختار سیستم کوانتومی و اندازه ی میدان الکتریکی حاصل از موج الکترومغناطیس، اندازه بسامد رابی را در حدی قرار می دهند که کمتر از نرخ فروپاشی^۹ حالت های برانگیخته و فوتون ها در کاواک باشد. در این حالت، برهم کنش سیستم و کوانتومی و میدان الکترومغناطیسی در رژیم تزویج ضعیف قرار می گیرد. یکی از خواص این رژیم این است که مدهای ساطع کننده ی نور کوانتومی و مد کاواک می توانند در تشدید با یکدیگر قرار گیرند که منجر به افزایش ناگهانی نرخ تابش خودبخودی^{۱۰} شده، و باعث ایجاد یک قله ی نوک تیز در چگالی طیف مربوط به تابش خودبخودی شود. این خاصیت موجب مناسب شدن این رژیم در کاربردهای مربوط به تولید نور شده

¹ Rabi Frequency

² Maser

³ Rempe

⁴ Walther

⁵ Klein

⁶ Weak Coupling Regime (WCR)

⁷ Strong Coupling Regime (SCR)

⁸ Ultra-strong Coupling Regime (UCR)

⁹ Decay Rate

¹⁰ Spontaneous

است، از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به لیزرهای ساطع کننده‌ی نور از تراز با کاواک عمودی^۱ [۹]، و دیودهای ساطع کننده‌ی نور^۲ [۱۰] اشاره کرد. هم‌چنین خاصیت ذکر شده موجب می‌شود این رژیم در تولید فوری فوتون‌های درهم‌تنیده کاربرد داشته باشد.

اگر مقادیر ویژه‌ی هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول مربوط به یک سیستم کوانتومی شامل یک اتم و یک مد کاواک را حل کنیم، همان‌طور که در [۱۱] نشان داده شده است، مقادیر حالت ویژه به دست می‌آیند، همان‌طور که از نتایج مشخص است مقادیر حالت ویژه به اندازه‌ی ترازهای انرژی اتم و کاواک، نرخ فروپاشی کاواک و اتم و ثابت تزویج بستگی دارد. اگر اختلاف مابین حالت‌های ویژه را نیز محاسبه کنیم حاصل نیز وابسته به مقادیر ثابت تزویج است. در صورتی این اختلاف، مقادیر کاملاً حقیقی دارد که اندازه‌ی اختلاف نرخ فروپاشی کاواک و اتم از ۴ برابر ثابت تزویج باشد. به عبارتی دیگر، ثابت تزویج این قدر بزرگ باشد که از یک‌چهارم اختلاف نرخ فروپاشی کاواک و اتم بزرگ‌تر باشد. آن‌گاه حالت‌های ویژه‌ی انرژی محاسبه شده دیگر تبه‌گن^۳ نیستند و با یک‌دیگر ترکیب شده و موجب به‌وجود آمدن حالت‌های جدید می‌شوند [۱۲و ۱۳]. اگر سیستم ساطع کننده‌ی نور کوانتومی یک نقطه‌ی کوانتومی^۴ یا چاه کوانتومی^۵ در نظر گرفته شود، حالت‌های ویژه‌ی به وجود آمده نمونه‌هایی از اکسیتون-پلاریتون^۶ هستند. اختلاف این حالت‌های ویژه‌ی جدید را بسامد رابی یا به عبارتی ثابت تزویج تعیین می‌کند [۱۲و ۱۳].

یکی از بسترهای مهمی که رژیم تزویج قوی فراهم می‌کند، پردازش اطلاعات کوانتومی^۷ در ادوات حالت جامد^۸ است [۱۴]. در این رژیم تزویج مدهای کاواک و ساطع کننده‌ی نور کوانتومی هیچ‌گاه در تشدید با

^۱ Vertical Cavity Surface Emitting Laser (VCSEL)

^۲ Light Emitting Diode (LED)

^۳ Degenerate

^۴ Quantum Dot

^۵ Quantum Well

^۶ Exciton-Polariton

^۷ Quantum Information Processing

^۸ Solid State Devices

یکدیگر قرار نخواهند گرفت. از این پدیده به عنوان رفتار پادگذر^۱ نام برده می‌شود و در نتیجه مابین آن‌ها اختلاف یا به تعبیری شکاف به وجود می‌آید که هر چه ثابت تزویج بزرگ‌تر باشد. شکاف بزرگ‌تر می‌شود، و پدیده‌ی جمع‌نشستگی^۲ رخ می‌دهد. این ویژگی در ساخت گسیل‌کننده‌ی تک فوتونی^۳ کاربرد دارد [۱۵]. پدیده‌ی جمع‌نشستگی موجب پدیدار شدن کاربردهای متنوعی از جمله رمزنگاری کوانتومی^۴ [۱۶]، تکرارکننده‌های کوانتومی^۵ [۱۷ و ۱۸] و محاسبات کوانتومی^۶ شده است [۱۹].

جهت ورود به رژیم تزویج قوی با افزایش میدان الکتریکی ناشی از موج الکترومغناطیس و یا به کارگیری سیستم کوانتومی با ساختاری که دارای ممان دو قطبی بالاتری باشد، می‌توان بسامد رابی را افزایش داد. مطالعه‌ی عملی رژیم تزویج قوی با تقویت کاواک‌ها و افزایش ضرایب کیفیت آن‌ها توام با کاهش حجم موثر مد در کاواک امکان تزویج قوی مابین یک اتم و کاواک نوری را فراهم کرد [۲۰].

رژیم تزویج قوی در الکترودینامیک کوانتومی کاواک سیستم‌های مختلف دیده شده است. در [۲۱] تزویج قوی یک سیستم حالت جامد با دو تراز انرژی و یک فوتون با یک نقطه‌ی کوانتومی در یک ریزکاواک نیمه هادی^۷ به حقیقت پیوسته است. ضریب تزویج در واقع به صورت داده‌های فوتولومینسنس^۸ بیان می‌شود که نشان‌دهنده‌ی رفتار پادگذر مابین اکسایتون نقطه‌ی کوانتومی و روابط پراکنش^۹ مد کاواک است و مشخص‌کننده‌ی شکاف خلأ رابی در [۲۱] حدود ۱۴۰ میکرو الکترون ولت می‌باشد.

ساخت ریزکاواک‌ها^{۱۰} با ساختار خاص که دارای ضریب کیفیت بالا هستند این امکان را فراهم می‌کند که بعضی از کاربردهای رژیم ضعیف را در رژیم قوی داشت و راندمان و خصوصیات بهتری به دست آورد.

¹ Anti-Crossing Behavior

² Anti-Bunching

³ Single-Photon Emitters

⁴ Quantum Cryptography

⁵ Quantum Repeaters

⁶ Quantum Computation

⁷ Semiconductor Microcavities

⁸ Photoluminescence Data

⁹ Dispersion Relations

¹⁰ Microcavities

برای مثال کاواک های میکرو دیسک^۱، در [۲۲] نشان داده شده است که با قرار دادن نقطه‌ی کوانتومی به عنوان محیط فعال در کاواک های میکرو دیسک لیزر میکرو دیسکی با ضریب کیفیت بسیار بالا می‌توان تولید کرد. در این کار نشان داده شده است که کاواک مورد اشاره ضریب کیفیت ۵۰۰۰ دارد و به خوبی شرایط تزویج رژیم قوی را فراهم می‌کند.

یا در [۲۳] نشان داده شده است که می‌توان در یک لیزرهای ساطع کننده‌ی نور از تراز با کاواک عمودی با استفاده از ریز کاواک هایی از نوع نیتراید-III^۲ در مقایسه با نوع نیتريد گالیم^۳ که در رژیم تزویج ضعیف کار می‌کند، لیزر پلاریتونی^۴ تولید کرد که در رژیم تزویج قوی کار می‌کند، و دارای آستانه‌ی چگالی جریان بسیار کمتر از نوعی است که در رژیم تزویج ضعیف کار می‌کند و در آن لازم نیست شرایط تجمع معکوس فراهم شود.

ریز کاواک های بلور فوتونی^۵ دسته‌ی دیگری از کاواک ها هستند که با در اختیار قرار دادن ضریب کیفیت بالا موجب رسیدن به تزویج قوی شده‌اند [۲۴]. در نمونه‌های پیشرفته‌تر نانو کاواک های بلور فوتونی^۶ به کار گرفته می‌شوند [۲۵]. در این نوع از کاواک ها با تزویج یک نقطه کوانتومی منفرد با یک مد نانو کاواک بلور فوتونی راه برای تولید یک نانولیزر نقطه‌ی کوانتومی منفرد^۷ باز شده است [۲۶].

هم چنین نشان داده شده است که قرار دادن یک نقطه‌ی کوانتومی در درون نانو-کاواک بلور فوتونی یک روش مطمئن جهت مشاهده‌ی سقوط و احیای تپ‌های نوسان رابی در بسامدهای نور قابل مشاهده است [۲۷].

¹ Microdisk Cavities

² III-Nitride

³ GaN

⁴ Polariton Laser

⁵ Photonic Crystal Microcavities

⁶ Photonic-Crystal-Nanocavity

⁷ Single-Quantum-Dot Nanolaser

یکی از مسائل بسیار مهم و کاربردی در ادوات الکتروپدینامیک کوانتومی کاواک، کنترل فاصله‌ی^۱ طیف بسامد مابین گذار ساطع کننده‌ی نقطه‌ی کوانتومی و مد کاواک است. توانایی امکان کنترل این فاصله در ساخت منابع تک‌فوتونی^۲ با راندمان بالا [۲۸و۲۹و۳۰و۳۱]، لیزرهای نانو کاواک^۳ با عرض باند بالا و حد آستانه پایین [۳۲و۳۳و۳۴] و حتی اجزای نوری نقطه‌ی کوانتومی منفرد^۴ مانند آینه‌ها [۳۵] و جابجاگرهای فاز^۵ [۳۶] کاربرد دارد. در این زمینه روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است از جمله تنظیم دمای شبکه^۶ [۲۱و۳۷و۳۸]، متراکم کردن^۷ گازهای خنثی در دماهای پائین [۳۹و۴۰]، کنترل الکتریکی [۴۱].

سومین رژیم تزویج، تزویج بسیار قوی است که در آن بسامد رابی به مراتب از نرخ تابش خود به خودی بزرگ‌تر است. در واقع در این نوع تزویج، انرژی برهم کنش و تزویج که حاصل ضرب بسامد رابی در ثابت پلانک است دارای مرتبه بزرگی یکسانی با انرژی گذار بوده، که این انرژی به نوبه‌ی خود از حاصل ضرب بسامد گذار در ثابت پلانک به دست می‌آید [۴۲]، این رژیم امکان بهبود بخشیدن خواص حالات برانگیخته و پایه را به وجود می‌آورد و ماحصل آن به دست آوردن اثرات غیر آدیاباتیک^۸ (غیر بی‌دررویی) الکتروپدینامیک کوانتومی کاواک می‌باشد [۴۲]. پیشرفت آزمایشگاهی در این رژیم در دو سیستم حالت جامد اتفاق افتاده است: ریزکاواک‌های قرار گرفته در چاه‌های پتانسیل آلائیده، در این سیستم حالت جامد، گذار الکترونیک فعال مابین باندهای زیرین^۹ چاه می‌باشد [۴۳-۴۷]. سیستم دیگر شامل مدارهای

^۱ Detuning

^۲ Single Photon Sources

^۳ Nanocavity Lasers

^۴ Single-QD Optical Components

^۵ Phase Shifters

^۶ Lattice Temperature

^۷ Condensing

^۸ Onadiabatic

^۹ Subbands

کوانتومی ابررسانا^۱ در خطوط انتقال مشددها^۲ مشاهده می‌شود. در این نوع سیستم، میدان اتم با اتم‌های دارای دو تراز انرژی مصنوعی به دست آمده از پیوندهای جوزفسون^۳، تزویج می‌شود [۴۸ و ۴۹]. در نوعی دیگر گاز الکترون دو بعدی^۴ با تحرک بالا که با ماده تشدید کننده‌ی ترانزیت^۵ تزویج شده است، مد فوتون با انتقال سیکلوترون^۶ مغناطیسی گاز الکترون دو بعدی تزویج می‌شود که از اعمال میدان مغناطیسی عمود بر صفحه چاه‌های کوانتومی به دست می‌آید. نشان داده می‌شود که بسامد سیکلوترون متناسب با میدان مغناطیسی اعمالی می‌باشد و این سیستم بسیار قابل کنترل خواهد بود، زیرا برانگیختگی ماده^۷، قابل تنظیم با تغییر مقدار میدان مغناطیسی اعمالی می‌باشد. جنبه‌ی کلیدی، وابستگی ممان دوقطبی یک گذار سیکلوترون به طول پویش سیکلوترون است و می‌توان دید که در این سیستم مقدار ممان دو قطبی را می‌توان بسیار بالا برد و ثابت تزویج را به مرتبه‌ی بزرگی بسامد گذار رساند. نشان داده می‌شود در این سیستم بسامد رابی به حدود ۵۸٪ بسامد سیکلوترون رسیده است [۵۰].

استفاده از فلز - دی الکتریک - فلز ریز کاواک به همراه چاه کوانتومی سیستمی ایده‌آل برای تولید حالت‌های پلاریتون کاواک^۸ در محدوده‌ی ترانزیت است. کاواک فلز مدهای تابش محصور شده‌ای دارد که قابل تشدید قرار گرفتن با گذار زیر باند میانی^۹ چاه پتانسیل هستند، در این سیستم تزویج بسیار قوی مشاهده شده است و نشان داده شده است که نسبت بسامد رابی به بسامد گذار بیش‌تر از ۰٫۵ است [۵۱]. در مدل ساده‌ی هامیلتونی جینس - کامینگر پاول، که برهم‌کنش مابین یک اتم دو ترازه و یک میدان تابش را بررسی می‌کند، در میدان کوانتس شده به مد بوزنیک^{۱۰} واحد برده می‌شود، و هر یک از دو بقا و

^۱ Superconducting Quantum Circuits

^۲ Transmission Line Resonators

^۳ Josephson Junctions

^۴ Two Dimensional Electron Gas

^۵ Terahertz Material Resonators

^۶ Cyclotron

^۷ Material Excitation

^۸ Cavity Polaritons

^۹ Intersubbands

^{۱۰} Bosonic mode

فنا از روابط ساده‌ی مرتبه اول تبعیت می‌کنند [۱]. این دو عمل‌گر پاسخ‌های کاملاً سینوسی در زمان دارند و فرم $e^{\pm w\lambda t}$ دارند که به عنوان پاسخ‌های پویش آزاد^۱ تلقی می‌شوند و در این شرایط میدان به صورت مجموع دو عمل‌گر خواهد بود. هم‌چنین اتم در این مدل به صورت یک سیستم اسپینی دو ترازوی خواهد بود و بردار قطبیدگی^۲ نیز به صورت مجموع دو عمل‌گر گذار و دوگان هرمیتی آن می‌باشد. نیز برهم کنش به صورت حاصل ضرب بردار قطبیدگی و میدان تابش است. در حالت کلی پاسخ شامل یک نوسان تند (مجموع دو بسامد مد میدان تابش و گذار اتم) یک نوسان کند (حاصل تفریق دو بسامد میدان تابش و اتم) می‌باشد. اما در صورتی که نوسان مد میدان بسیار بزرگ‌تر از نوسان کند باشد بخش مربوط به نوسان سریع در نظر گرفته نمی‌شود که به این تقریب موج چرخنده^۳ گفته می‌شود [۱].

معمولاً در مواجهه با مدل جینس-کامینگز-پاول در ابتدا تصویر هایزنبرگ^۴ استفاده می‌شود. خصوصیت بارز این مدل این است که در آن باید عمل‌گرها تابعیت زمانی سینوسی داشته باشند در حالی که بردارهای حالت مستقل از زمان هستند. این رفتار نقطه مقابل فضای شرودینگر است که در آن عمل‌گرها ثابت و حالات متغیر در زمان هستند [۵۲]. اولین کاربرد تصویر هایزنبرگ در [۵۳] بوده و در [۵۴-۵۳] نشان داده شده است که هر سیستم دو ترازه به صورت ریاضی مشابه یک ذره با اسپین نیمه صحیح^۵ است و بنابراین به تبعیت از مدل جینس-کامینگز-پاول ماتریس های پاول^۶ را می‌توان به عنوان عمل-گرهای اتمی بنیادی استفاده کرد. تعمیم حالت سه ترازه در [۵۵] انجام شده است.

در [۵۶] عمل‌گرهای به‌دست آمده توصیف‌کننده‌ی تلفیق نوسانگر میدان کاواک با نوسانگر اتمی غیر خطی است به شرطی که میدان ضعیف باشد. در [۵۷-۵۹] حالت‌های میدان عادی در برهم کنش، دارای

^۱ Free-Runnig Solutions

^۲ Polarization Vector

^۳ Rotating Wave Approximation (RWA)

^۴ Heisenberg Picture

^۵ Spin One-Half Particle

^۶ Pauli matrices

ثابت تزویج و بسامد رابی بررسی شدند. اخیراً در [۶۰] کلی ترین سیستم الکترو دینامیک کوانتومی کاواک در نظر گرفته شده و در آن فرض شده است که تعداد دل خواهی سیستم کوانتومی ساطع کننده ی نور کوانتومی دارای برهم کنش با ثابت تزویج مشخصی با تعداد دل خواهی مد کاواک هستند. ابتدا هامیلتونی مناسب مربوط به کلی ترین سیستم مذکور به دست آمده، و در مرحله بعد از تصویر برهم کنش هایزنبرگ استفاده شده است و هامیلتونی تصویر^۱ به دست آمده است. سپس هامیلتونی به دست آمده در معادله ی شرودینگر وابسته به زمان جایگزین می گردد و معادله ی دیفرانسیل خطی که تعمیم معادلات مشهور رابی است به دست می آید. در نهایت با حل معادله ی به دست آمده در مرحله ی قبل تغییرات زمانی سیستم به دست آمده است. نکته ی قابل توجه این است که در کارهای انجام شده و کاری که اخیراً انجام شده از تقریب موج چرخنده استفاده شده است و در این فضا عمل گرهای بقا و فنا فوتونی رفتاری کاملاً سینوسی دارند. در این پایان نامه هامیلتونی کلی ترین سیستم الکترو دینامیک کاواک ممکن که در [۶۰] در ابتدای کار استفاده شده بود، در فضای شرودینگر بدون هر گونه تقریبی به کار گرفته می شود در حالی که عمل - گرها مستقل از زمان هستند و بردار حالات وابسته به زمان هستند.

به منظور تکمیل مشخصات سیستم یکی از موارد تعیین حالات اولیه سیستم است مطالعات زیادی بر روی انواع مختلف حالات اولیه شده است و همگی این مطالعات بیان گر این موضوع است که رفتار متفاوتی سیستم الکترو دینامیک کاواک در شرایط اولیه مختلف دارد [۵۲]. حالات اولیه را می توان در یک حالت به صورت حالت فوک^۲ تعیین کرد که در آن تعیین می شود دقیقاً سیستم کوانتومی در کدام حالت تراز انرژی قرار دارد و دقیقاً چه تعداد فوتون در مد کاواک قرار گرفته است. در نوع دیگر که در آن تعداد دقیق فوتون ها در هر مد کاواک مشخص نیست بلکه دارای توزیع پواسون می باشد حالت هم دوس^۳ نام دارد

^۱ Intraction Hamiltonian

^۲ Fock State

^۳ Coherent State

[۶۱]. نیز در [۶۲] تاثیر شرایط اولیه بررسی شده است.

در این پایان نامه سیستم های مختلف با در نظر گرفتن شرایط اولیه به صورت فوک و همدوس حل و تحلیل شده اند.

در تکمیل مدل جنیس-کامینگز-پاول یکی از مواردی که تاکنون مورد توجه قرار گرفته بحث افزایش تعداد سیستم کوانتومی ساطع کننده ی نور کوانتومی و افزایش ترازهای انرژی در آن هاست [۶۳]. تعداد مد های کاواک که حداکثر مشخصی از فوتون ها در آن ها قرار خواهد گرفت [۶۴] به وجود می آید. در [۶۰] هامیلتونی سیستم الکترودینامیک کاواک در کلی ترین حالت ممکن آورده شده است و در مورد دو نقطه ی کوانتومی در برهم کنش با دو مد کاواک با روش توضیح داده شده در قبل مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان نامه امکان محاسبه و تحلیل سیستم ها در کلی ترین حالت ممکن بدون در نظر گرفتن هر گونه تقریبی فراهم شده است. تاکنون با استفاده از این روش در [۶۱] یک سیستم الکترودینامیک با یک نقطه ی کوانتومی و دو تراز انرژی دارای برهم کنش با یک مد کاواک که در آن حداکثر ۲۴ فوتون قرار می گیرد تحلیل شده است.

مطالعه ی حالت های در هم تنیده ی کوانتومی^۱ یکی از موضوعات مورد توجه جهت تحقیق و مطالعه به دلیل اهمیت و کاربرد در مخابرات و اطلاعات کوانتومی^۲ بوده است [۶۷-۶۵]. ساده ترین مدل به منظور توصیف برهم کنش در چارچوب الکترودینامیک کوانتومی مدل جنیس-کامینگز-پاول است [۲]، اما در واقعیت مسئله بسیار پیچیده تر است اولاً میدان لزوماً به صورت تک مد نیست و اتم ها دارای دو تراز نیستند. مثلاً سیستم کوانتومی ساطع کننده نور کوانتومی می توانند بیشتر از یک عدد باشند و بنابراین مدل های پیچیده تری که شامل سیستم هایی با چندین اتم هستند [۶۸]، شامل گذارهای چندین فونون [۶۹]، دارای درهم تنیدگی وابسته به شدت [۷۰]، دارای سه یا چهار تراز انرژی [۷۱]، و مدهای

^۱ Quantum Entangled States

^۲ Quantum Communication and Information

الکترومغناطیس [۷۱و۷۲]، مرود مطالعه واقع شده اند. در کلی ترین حالت، سیستم دارای هر تعداد دلخواه نقطه‌ی کوانتومی با هر تعداد دلخواه تراز انرژی و تعداد دلخواه مد کاواک در فضای هایزنبرگ راه حل ریاضی آن ارائه شده و در آن یک سیستم الکترودینامیک کاواک با دو نقطه‌ی کوانتومی هر یک دارای دو تراز انرژی با برهم کنش با دو مد کاواک مورد بررسی درهم تنیدگی قرار گرفته است و پارامتر هم نوایی در مورد این سیستم محاسبه شده است [۶۰]. در [۶۱] جدیدترین پارامتر هم نوایی مربوط به کلی ترین سیستم الکترودینامیک دارای هر تعداد دلخواه نقطه‌ی کوانتومی با هر تعداد دلخواه تراز انرژی و تعداد دلخواه مد کاواک در فضای شرودینگر محاسبه شده، و مقدار چشم‌داشتی جابجاگر عمل گر گذار اتمی در مورد یک سیستم الکترودینامیک با یک نقطه کوانتومی و دو تراز انرژی دارای برهم کنش با یک مد کاواک که در آن حداکثر ۲۴ فوتون قرار می‌گیرد محاسبه شده است. در این پایان نامه به منظور بررسی درهم تنیدگی، رابطه‌ی چشم‌داشتی جابجاگر عمل گر گذار اتمی در مورد کلی ترین سیستم الکترودینامیک کوانتومی ممکن به دست آورده شده است.

فصل ۲ : ریاضی و الگوریتم

۲-۱- مقدمه

به منظور تحلیل الگوهای رفتاری سیستم‌های پیچیده‌ی کوانتومی، سیستم‌های اپتیک کوانتومی بس-ذره، متشکل از تعداد دل‌خواهی از نقاط کوانتومی و مدهای کوانتومی با برهم‌کنش به دلخواه قوی، باید موارد زیر مورد بررسی قرار می‌گرفتند.

۱. مشخص کردن سیستم اپتیک کوانتومی مذکور شامل تعداد نقاط کوانتومی، تعداد ترازهای انرژی نقاط کوانتومی، تعداد مدهای کاواک، بسامد هر مد کاواک، تعیین مقدار ترازهای انرژی هر نقطه کوانتومی، تعیین ضرایب شدت تزویج ما بین گذار نقاط کوانتومی از تراز به تراز دیگر و مدهای کاواک، تعیین ضرایب شدت دوقطبی تولید شده در گذار نقاط کوانتومی از تراز به تراز دیگر و نهایتاً تعیین شرایط اولیه‌ی سیستم.

۲. تعیین ضرایب کت حالات سیستم در رژیم‌های تزویج متفاوت براساس مرحله قبل و استفاده از نرم‌افزاری که نوشته شده بود.

۳. تعیین احتمال حضور سیستم در حالتی که نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی خاصی هستند و تعداد دقیقی فوتون در مد کاواک وجود دارد در این حالت شرایط اولیه به صورت حالت فوک تعیین می‌گردد و تعیین احتمال حضور سیستم در حالتی که نقطه کوانتومی خاصی در تراز انرژی مشخصی با اختلاف فاز مشخص ما بین حالات ترازهای انرژی در این حالت شرایط اولیه به صورت حالت هم‌دوس در رژیم‌های تزویج متفاوت.

۴. محاسبه مقادیر چشم‌داشتی عمل‌گرهای میدان شامل فنا و بقا فوتونی برای این سیستم در رژیم‌های تزویج متفاوت.

۵. محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی برای این سیستم در رژیم‌های تزویج متفاوت.

۶. مشخص کردن درهم‌تنیدگی موجود در سیستم از طریق محاسبه‌ی چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گر

گذار اتمی و دوگان هرمیتی آن در رژیم‌های تزویج متفاوت.

۷. محاسبه پارامتر هم‌نوایی برای این سیستم‌ها در رژیم‌های تزویج متفاوت.

همان‌طور که خواهید دید در هر قسمت کلی‌ترین سیستم ممکن در نظر گرفته شده است، ابتدا رابطه‌ی مربوط به آن استخراج شده و سپس کد مورد نظر آن نوشته شده، کلیه مراحل انجام شده به همراه الگوریتم کلی برنامه توضیح داده شده است.

۲-۲- ماتریس حالت اولیه‌ی سیستم اپتیک کوانتومی با تعداد دلخواه نقاط برهم‌کنش

۲-۲-۱- الگوریتم برنامه‌ی محاسبه‌ی حالت و لزوم وجود شرایط اولیه

هدف اصلی از کد MATLAB نوشته‌شده در این قسمت، حل معادله شرودینگر زیر و محاسبه ضرایب کت حالت سیستم می‌باشد، با داشتن ضرایب کت حالت سیستم مقادیر چشم‌داشتی مربوط به عمل-گرهای مورد نیاز و بررسی درهم‌تنیدگی سیستم را می‌توان محاسبه کرد.

$$\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathbb{H}|\varphi(t)\rangle \quad (1-2)$$

در واقع معادله‌ی شرودینگر در فضای شرودینگر در حالی که کت حالات تابعی از زمان هستند حل می‌شود.

همیلتونی \mathbb{H} از نوع جینس-کامینگز-پاول است. در اینجا به مانند کاری که در [۶۰] انجام شده است در به دست آوردن همیلتونی از تصویر برهم‌کنش هایزنبرگ که به نام تصویر همیلتونی است، استفاده نشده است، کلیه‌ی ضرایب کت حالات سیستم وابسته به زمان هستند. با مشتق زمان گرفتن از

کت حالت در سمت چپ معادله‌ی (۲-۱) در واقع از ضرایب کت‌ها مشتق گرفته می‌شود، اما در سمت راست معادله، با تاثیر عمل گر هامیلتونی بر روی کت حالت به دلیل وجود عمل گرهای گذار اتمی، فنا و بقا اتمی در عمل گر هامیلتونی، هر کت ویژه متحمل گذار به حالت دیگری می‌شود. که با مساوی قرار دادن ضرایب کت‌های یک‌سان از دو طرف و ضرب داخلی براها در دو سمت، به ماتریس ضرایب خواهیم رسید.

کت حالت کل سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{A,F} \phi(A,F) |A\rangle |F\rangle$$

$$|A\rangle = \bigotimes_{n=1}^k |r_n\rangle = |r_1\rangle |r_2\rangle \dots |r_k\rangle \quad (2-2)$$

$$|F\rangle = \bigotimes_{v=1}^w |f_v\rangle = |f_1\rangle |f_2\rangle \dots |f_v\rangle$$

که $|A\rangle$ و $|F\rangle$ مربوط به نقاط کوانتومی و مدهای کاواک می‌باشند.

الگوریتم مورد استفاده در برنامه نوشته‌شده جهت بررسی ترکیبات مختلف نقاط کوانتومی و مدهای کاواک به شرح زیر است، محاسبه‌ی ضرایب کت حالات سیستم به این صورت می‌باشد که برای هر ترکیب از ترکیبات کت حالات، مدهای کاواک ترکیبات ممکن را برای کت حالات ترازهای انرژی نقاط کوانتومی در نظر می‌گیریم. حالات ترازهای انرژی نقاط کوانتومی به این صورت جاروب می‌شوند، که ابتدا کاواک شماره‌ی m ام (آخرین مد کاواک) بدون فوتون است و در حالی که همه‌ی نقاط کوانتومی در تراز انرژی اول خود هستند در اولین سطر نقطه کوانتومی شماره n ام (آخرین نقطه کوانتومی) هم در تراز انرژی اول خود خواهد بود، و در سطر بعدی همان وضعیت باقی می‌ماند. اما نقطه‌ی کوانتومی n در تراز انرژی بالاتری قرار خواهد گرفت، این وضعیت تکرار می‌شود تا همه ترازهای انرژی نقطه‌ی کوانتومی n ام جاروب شوند. سپس در سطرها‌ی بعدی نقطه‌ی کوانتومی $n-1$ ام یک تراز انرژی بالاتر رفته و همه‌ی مراحل قبلی تکرار می‌شود. این چرخه ادامه می‌یابد و با رسیدن تراز انرژی هر نقطه‌ی کوانتومی به آخرین

تراز انرژی خود نقطه‌ی کوانتومی بعدی افزایش تراز انرژی خواهد داشت. در نهایت با رسیدن تمام نقاط کوانتومی به آخرین تراز انرژی خود تعداد فوتون مد کاواک m ام یک عدد افزایش می‌یابد و سیکل قبل در مورد این حالت هم تکرار می‌شود و آن قدر این تکرار ادامه می‌یابد تا همه فوتون‌ها در کاواک شماره m ام قرار گیرند. سپس تعداد فوتون‌های مد کاواک شماره $m-1$ ام یک واحد افزایش یافته و تمامی مراحل قبل تکرار می‌شود، بالاخره این مراحل تا جایی ادامه می‌یابد تا همه فوتون‌ها در مدهای کاواک قرار گیرند. وضعیت تعریف‌شده فوق را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\phi(A, F) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m=0}^N \phi(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m) \quad (3-2)$$

در نهایت تعداد N جاروب خواهیم داشت که از هر یک از جاروب‌های چگونگی تاثیر هامیلتونی JCPM را بر روی هر یک از کت‌های حالات مشخص می‌کند.

$$N = (P + 1)^m \times (E_l)^n \quad (4-2)$$

حداکثر تعداد فوتون‌های قرار گرفته در هر مد کاواک P ، m تعداد مدهای کاواک، E_l تعداد ترازهای انرژی و n تعداد نقاط کوانتومی می‌باشند.

در هر سطر مشخص می‌شود که هر نقطه‌ی کوانتومی در کدامین تراز انرژی می‌باشد و همین طور هر مد کاواک چه تعداد فوتون دارد. در نتیجه با توجه به وضعیت ترازهای انرژی نقاط کوانتومی و مدهای کاواک در هر سطر مشخص می‌شود که در هامیلتونی مورد نظر چه مقادیری بر روی کت مورد نظر تاثیر داده خواهد شد. از طرفی کت مورد نظر هم بسته به وجود و نوع عمل‌گر موجود در هامیلتونی و تاثیر آن-ها در تغییر سیستم از کتی به کت دیگر و در نتیجه سمت چپ معادله مشخص خواهد شد. بنابراین

معادله‌ی مذکور به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t)]_{N \times 1} = [M]_{N \times N}[\Phi(t)]_{N \times 1} \quad (5-2)$$

با توجه به رابطه (5-2) حالت سیستم به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$\{\Phi(t)\} = e^{[M]t}\{\Phi(0)\} \quad (6-2)$$

در اینجا $\Phi(0)$ شرایط اولیه‌ی سیستم را مشخص می‌کند.

تعیین شرایط اولیه یکی از مواردی است که برای حل سیستم‌های مختلف با توجه به تعداد نقاط کوانتومی و تعداد ترازهای انرژی هر یک از آن‌ها و همین‌طور تعداد مدهای کاواک و حداکثر تعداد فوتون‌های قرار گرفته در آن‌ها متفاوت خواهد بود. با توجه به الگوریتم به کار رفته در حل معادله (1-2) و تولید ماتریس $[M]$ ، برای حل رابطه (6-2) ماتریس $[M]$ را تبدیل به ماتریس قطری مقادیر ویژه و دو ماتریس $[R], [R]^{-1}$ که ماتریس R از کنار هم قراردادن بردارهای ویژه‌ی ماتریس $[M]$ به عنوان ستون-های آن به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} [R]^{-1}[M][R] &= [D] = [d_i\sigma_{ij}] \\ \Rightarrow \{\Phi(t)\} &= e^{[M]t}\{\Phi(0)\} = [R]e^{[D]t}[R]^{-1}\{\Phi(0)\} \\ &= [R][e^{(d_it)}\sigma_{ij}][R]^{-1}\{\Phi(0)\} \end{aligned} \quad (7-2)$$

$\{\Phi(0)\}$ ماتریسی با سائز $N \times 1$ خواهد بود که هر یک از سطرهاى آن شرایط اولیه‌ی مربوط به هر یک از حالت‌های جاروب شده خواهد بود که به دو صورت، حالت فوک و هم‌دوس تعیین خواهند شد. در ابتدا با ذکر چند حالت و تعیین برای چند سیستم به صورت دستی نشان خواهیم داد که چگونه تعیین

شرایط اولیه امکان پذیر است و در نهایت با توجه به بالا رفتن سائز ماتریس شرایط اولیه عملاً در مواجهه با سیستم های بزرگ تر تعیین شرایط اولیه به صورت دستی امکان پذیر نمی باشد. بنابراین برنامه ای نوشته شده که ورودی های مورد نظر جهت محاسبه ی ماتریس ضرایب حالات کت را دریافت می کند و شرایط اولیه ی مورد نیاز را هم به صورت فوک و هم هم دوس تولید می کند. در ادامه روند و الگوریتم نوشته شده در این برنامه توضیح داده شده است.

۲-۲-۲- حالت فوک

به طور کلی مجموع توان دوم اندازه ی حالت های مختلف برابر یک است. در تعیین شرایط اولیه به صورت حالت فوک این اندازه به تنهایی به حالت خاصی از حالت های نقاط کوانتومی و مدهای کاواک داده می شود. همان طور که در بالا هم ذکر شد حالت های اولیه به صورت یک ماتریس $N \times 1$ هستند که N حالت های مختلف ترازهای انرژی نقاط کوانتومی و مدهای کاواک می باشند:

$$|\phi(t_0)\rangle = \left| t_0 \right\rangle \times \left\{ \text{حالت های مختلف مدهای مختلف در کاواک در } t_0 \right\} \quad (۲-۸)$$

به عنوان مثال اول در مورد سیستمی با یک مد کاواک و حداکثر ۳ فوتون و یک نقطه کوانتومی با دو تراز انرژی حالت ممکن به صورت زیر نوشته می شود. (تعداد ۳ فوتون در نظر گرفته شده است تا تعداد جملات کمتر شود)

$\phi(g)$: نقطه ی کوانتومی در تراز انرژی اول یا پایه

$\phi(e)$: نقطه ی کوانتومی در تراز انرژی دوم یا برانگیخته

حالات مختلف نقطه ی کوانتومی: $\phi(t_0)|g\rangle + \phi(t_0)|e\rangle$

چون فقط یک مد کاواک داریم حالات مختلف مد کاواک :

$$|\phi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^3 |n\rangle \times \phi(t_0)|g\rangle + \phi(t_0)|e\rangle \quad (9-2)$$

حال در تعیین شرایط اولیه به صورت حالت فوک در نظر گرفته می‌شود که دقیقاً چه تعداد فوتون در کدام مد کاواک و در کدام تراز انرژی وجود داشته باشد. مثلاً اگر بخواهیم سیستم به صورت اولیه یک فوتون در مد کاواک و نقطه‌ی کوانتومی در حالت پایه قرار داشته باشد، با توجه به (۹-۲) سومین حالت را باید یک در نظر بگیریم و مابقی حالات را صفر قرار دهیم.

همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش مدهای کاواک و حداکثر فوتون‌های قابل قرار گرفتن در آن-ها و تعداد نقاط کوانتومی و ترازهای انرژی آن‌ها تعداد حالت‌های ممکن به شدت افزایش می‌یابد که عملاً تعیین حالت اولیه مورد نیاز در تحلیل سیستم‌های متفاوت به صورت دستی کاری دشوار و با احتمال اشتباه فراوان خواهد بود. البته گرچه تعیین شرایط اولیه به صورت فوک عملاً ارزش فیزیکی ندارد و شرایط اولیه عموماً به صورت حالت هم‌دوس تعیین می‌شود، اما به هر حال جهت استفاده در موارد مورد نیاز و تحلیل سیستم، در برنامه‌ی نوشته‌شده برای محاسبه‌ی شرایط اولیه به صورت هم‌دوس قسمتی برای تولید این شرایط هم قرار داده شده است.

۲-۲-۳ - حالت هم‌دوس

همان طور که در بالا هم ذکر شد در حالت فوک با این فرض که تعداد کاملاً مشخصی از فوتون‌ها در هر یک از مدهای کاواک قرار دارند، شرایط اولیه تعیین می‌گردید که این فرضیه موجب به وجود آمدن میدان‌های الکتریکی ماکروسکوپی می‌شود که هیچ گونه ارزش فیزیکی ندارد. برای حل این موضوع از شرایط اولیه‌ی حالت هم‌دوس استفاده می‌شود.

طبق تعریف، حالات همدوس، حالت‌های ویژه‌ی عمل‌گر فنا [۷۳] می‌باشند.

$$\hat{a}|\lambda''\rangle = \lambda'|\lambda''\rangle, \langle\lambda''|\lambda''\rangle = 1$$

$$|\lambda''\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

$$\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \lambda' \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \lambda' \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} \langle m | n-1 \rangle = \lambda' \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle m | n \rangle$$

$$c_{m+1} \sqrt{m+1} = \lambda' c_m$$

$$c_{m+1} = \frac{\lambda'}{\sqrt{m+1}} c_m \rightarrow c_m = \frac{\lambda'}{\sqrt{m}} c_{m-1}$$

$$c_0 = N(\lambda')$$

حال ثابت c_0 را به‌دست می‌آوریم که در نهایت با محاسبه‌ی c_n برحسب آن، از آن در بهنجارش^۱ استفاده کنیم.

$$c_1 = \frac{\lambda'}{\sqrt{1}} c_0 = \frac{\lambda'}{\sqrt{1}} N(\lambda')$$

$$c_2 = \frac{\lambda'}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\lambda'^2}{\sqrt{2.1}} N(\lambda')$$

$$c_3 = \frac{\lambda'}{\sqrt{3}} c_1 = \frac{\lambda'^3}{\sqrt{3.2.1}} N(\lambda')$$

⋮

$$\rightarrow c_n = \frac{\lambda'^n}{\sqrt{n!}} N(\lambda')$$

حال باید ثابت بهنجارش را پیدا کنیم.

$$|\lambda''\rangle = N(\lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda'^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

برای بهنجارش لازم است

^۱ Normalization

$$\langle \lambda'' | \lambda' \rangle = 1 \rightarrow |N(\lambda')|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\lambda'^{*m} \lambda'^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m | n \rangle = |N(\lambda')|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda'|^2}{n!} =$$

$$|N(\lambda')|^2 e^{|\lambda'|^2} = 1$$

$$\rightarrow |N(\lambda')| = e^{\frac{-|\lambda'|^2}{2}} \rightarrow |\lambda' \rangle = e^{\frac{-|\lambda'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda'^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda'^{2n}}{n!}} e^{-|\lambda'|^2/2} |n\rangle$$

متوسط تعداد فوتون ها در حالت همدوس عبارت است از:

$$|\lambda'|^2 \rightarrow \lambda$$

$$\Rightarrow |\phi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} |n\rangle \quad (10-2)$$

به دلیل محدود بودن تعداد فوتون ها به منظور اطمینان از بهنجارش بودن حالات مد کاواک رابطه ی (۲-۱۰) به صورت زیر اصلاح می شود:

$$|\phi(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^m \left| \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \right|^2}} \sum_{n=0}^m \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} |n\rangle \times \langle \text{انرژی ترازهای مختلف حالات} \rangle \quad (11-2)$$

m، حداکثر تعداد فوتون های قابل قرار گرفتن در هر مد کاواک است.

در حالت کلی در سیستمی با داشتن نقاط کوانتومی و مدهای کاواک حالات همدوس در هر حالت به صورت ذیل خواهد بود.

$$|\phi(t_0)\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_k=0}^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{n_1=0}^m \left| \sqrt{\frac{\lambda^{n_1}}{n_1!}} e^{-\lambda} \right|^2}} \sqrt{\frac{\lambda^{n_1}}{n_1!}} e^{-\lambda} \times \dots \times \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{n_k=0}^m \left| \sqrt{\frac{\lambda^{n_k}}{n_k!}} e^{-\lambda} \right|^2}} \sqrt{\frac{\lambda^{n_k}}{n_k!}} e^{-\lambda} |n_1, \dots, n_k\rangle \times \langle \text{انرژی ترازهای مختلف حالات} \rangle \right) \quad (12-2)$$

N_m تعداد فوتون قرار گرفته در مد کاواک m ام است.

C_m عبارت است از حالت اولیه‌ی هر مد کاواک که اندازه آن با تعداد فوتون موجود در مدهای کاواک

در ترکیبات مختلف متغیر است.

به عنوان مثال اول در مورد سیستمی با یک مد کاواک و حداکثر ۳ فوتون و یک نقطه‌ی کوانتومی با

دو تراز انرژی شرایط اولیه به صورت حالت هم‌دوس به صورت زیر نوشته می‌شود. (تعداد ۳ فوتون در نظر

گرفته شده است تا تعداد جملات کمتر شود):

$\phi(g)$: نقطه‌ی کوانتومی در تراز انرژی اول یا پایه

$\phi(e)$: نقطه‌ی کوانتومی در تراز انرژی دوم یا برانگیخته

حالات مختلف ترازهای انرژی نقطه کوانتومی: $\phi(t_0)|g\rangle + \phi(t_0)|e\rangle$

چون فقط یک مد کاواک داریم حالات مختلف مد کاواک:

$$\begin{aligned} |\phi(t_0)\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle = \sum_{n=0}^3 \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^3 \left| \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \right|^2}} \sum_{n=0}^3 \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \times (|g\rangle + |e\rangle) \end{aligned}$$

و در مورد سیستمی مانند سیستم قبل با این تفاوت که دو مد کاواک با حداکثر ۳ فوتون داریم شرایط

اولیه به صورت زیر خواهد بود:

(g) : نقطه کوانتومی در تراز انرژی اول یا پایه

$\phi(e)$: نقطه کوانتومی در تراز انرژی دوم یا برانگیخته

حالات مختلف ترازهای انرژی نقطه‌ی کوانتومی: $\phi(t_0)|g\rangle + \phi(t_0)|e\rangle$

چون دو مد کاواک داریم حالات مختلف مد کاواک:

$$\begin{aligned} |\phi(t_0)\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle \\ &\quad \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle \\ & \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle + \\ & \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle \\ & \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle + \\ & \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle \sqrt{\frac{\lambda^0}{0!}} e^{-\lambda} |0\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle \sqrt{\frac{\lambda^1}{1!}} e^{-\lambda} |1\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle \sqrt{\frac{\lambda^2}{2!}} e^{-\lambda} |2\rangle + \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle \\ & \sqrt{\frac{\lambda^3}{3!}} e^{-\lambda} |3\rangle \quad (**) \end{aligned}$$

$$\rightarrow |\phi(t)\rangle = (**) \times (|g\rangle + |e\rangle) (1) \times (|g\rangle + |e\rangle)$$

همان طور که مشاهده می‌شود عملاً به علت تعداد بالای حالات تولید حالت‌های اولیه به صورت دستی امکان‌پذیر نخواهد بود. از آن جایی که هدف بررسی سیستم‌های الکتروپدینامیک با تعداد حالات بالا بود، بنابراین برنامه‌ای با MATLAB نوشته شده است که در ابتدا داده‌های ورودی مورد نظر را از کاربر دریافت می‌کند. سپس سوال می‌کند که آیا شرایط اولیه به کدام صورت حالت فوک یا هم‌دوس مد نظر است. در صورتی که حالت هم‌دوس تأیید شود تعداد متوسط فوتون‌های در حالت هم‌دوس (λ) پرسیده می‌شود، و در نهایت اگر اختلاف فازی مابین حالات خاصی از حالت‌های ترازهای انرژی نقاط کوانتومی مد نظر باشد، از کاربر خواسته می‌شود و خروجی که همان ماتریس شرایط اولیه است تولید می‌شود. جهت استفاده در برنامه‌ی محاسبه‌ی ضرایب کت حالت ذخیره می‌شود. برنامه‌ی نوشته شده در پیوست پایان-نامه ضمیمه شده است، این برنامه شامل تولید شرایط اولیه به صورت حالت فوک هم می‌باشد.

۲-۲-۴- تشریح الگوریتم کلی نوشتن نرم افزار تولید شرایط اولیه

با توجه به اینکه کت حالت کل سیستم به صورت (۲-۲) می‌باشد، بنابراین شرایط اولیه نیز مطابق با نحوه جاروب انجام شده در الگوریتم اصلی برنامه (۲-۴) است.

با توجه به وضعیت وارد شده در نرم افزار نوشته شده، ابتدا تعیین می‌شود نقاط کوانتومی سیستم در

کدام تراز انرژی قرار گرفته‌اند و در مرحله بعد تعیین می‌شود که در مدهای کاواک در حالت اولیه دقیقاً چه تعداد فوتون قرار گرفته است. در نهایت با توجه به دو حالت به دست آمده از ترکیب نقاط کوانتومی و مدهای کاواک درایه‌ای از ماتریس حالات اولیه‌ای که هر دو حالت را پوشش می‌دهد مشخص می‌شود. آن حالت را برنامه یک در نظر می‌گیرد، بقیه را صفر لحاظ کرده و به این ترتیب حالت اولیه حالت فوک تولید می‌گردد.

در حالت دیگر و در واقع مهم‌تر اگر تعیین شود که شرایط اولیه منسجم مد نظر است، با توجه به (۲-۱۲) تولید شرایط اولیه به صورت منسجم در دو مرحله‌ی کلی انجام خواهد شد. در مرحله‌ی اول در هر ترکیب از حالات ترازهای انرژی نقاط کوانتومی، احتمال حالت هر نقطه‌ی کوانتومی در آن ترازهای انرژی محاسبه می‌شود و در مرحله‌ی دوم احتمالات مربوط به هر یک از حالت‌های قرار گرفتن فوتون‌ها در هر یک از مدهای کاواک در هر ترکیب از مدهای کاواک محاسبه می‌شود و در انتها حالت اولیه‌ی هر یک از ترکیبات کلی متشکل از حالات نقاط کوانتومی و مدهای کاواک از ضرب احتمال همه‌ی حالات مربوط به آن ترکیب محاسبه خواهد شد.

در ضمن با توجه به این که نیاز به تحلیل سیستم در حالت‌هایی وجود دارد که مابین حالت‌های ترازهای انرژی در هر نقطه‌ی کوانتومی اختلاف فاز وجود دارد، که این مستلزم اعمال این شرایط در شرایط اولیه است، به منظور تولید شرایط اولیه در حالت منسجم و لحاظ اختلاف فاز مابین حالات ترازهای انرژی، در حالتی که هر یک از حالات ترازهای انرژی دارای فاز باشند، خواسته می‌شود که فاز مربوط به هر یک از ترازهای تعیین شود. یا به عبارتی اگر اختلاف فاز مابین دو تراز انرژی خاص مد نظر باشد با دادن فاز صفر به یکی و به اندازه اختلاف فاز به دیگری، اختلاف فاز مورد نظر وارد می‌شود. ابتدا اندازه‌ی احتمال مربوط به هر حالت تراز انرژی هر نقطه‌ی کوانتومی با توجه به فاز آن محاسبه می‌شود و حاصل در یک ماتریس از احتمال حالت تراز اول نقطه‌ی کوانتومی اول تا احتمال حالت تراز آخرین نقطه-ی کوانتومی آخر قرار می‌گیرند.

۲-۳- محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم در حالتی که نقاط کوانتومی یا نقطه‌ی کوانتومی خاصی در حالت تراز انرژی مشخصی هستند

پس از محاسبه‌ی ماتریس ضرایب کت حالات سیستم با توجه به (۲-۲) احتمال حضور سیستم در حالت‌های متفاوت نقاط کوانتومی و مدهای کاواک با شرایط اولیه فوک و هم‌دوس در ادامه محاسبه خواهد شد.

۲-۳-۱- استخراج روابط مورد نیاز

در کلی‌ترین حالت ممکن اگر هدف محاسبه‌ی احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی خاصی مانند l ، در تراز انرژی خاصی مانند k در سیستمی باشد، با تعداد متعددی نقطه‌ی کوانتومی و مدهای کاواک متعدد، حالت سیستم به صورت زیر در خواهد آمد.

$$P = \sum_{A-\{r_l\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v=0}^N |\phi(r_1, r_2, \dots, r_{l \rightarrow k}, r_n, f_1, \dots, f_v)|^2 \quad (۲-۱۳)$$

احتمال حضور سیستم در حالت‌های متفاوت نقاط کوانتومی P ، و مدهای کاواک، در روابط جایگزین شده است.

f_v (تعداد فوتون ها) از صفر تا بی‌نهایت فوتون متغیر است و همین‌طور r_n (ترازهای انرژی) مابین یک تا تعداد ترازهای انرژی نقطه کوانتومی تغییر می‌کند.

در حالتی که شرایط اولیه به صورت فوک می‌باشد، یعنی دقیقاً مشخص است در هر مد کاواک چه تعداد فوتون قرار می‌گیرد، احتمال حضور سیستم در حالتی که نقاط کوانتومی در یک تراز انرژی خاص هستند، احتمال فقط یکی از حالت‌های $\phi(A, F)$ خواهد بود. این حالت را می‌توان براساس الگوریتم اصلی استفاده شده در برنامه به دست آورد که تعیین می‌کند هر سطر از ماتریس ضرایب حالت سیستم مربوط به کدام ترکیب قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی و قرارگیری فوتون ها در مدهای کاواک می‌-

باشد. احتمال حضور سیستم در حالت $|r_{1 \rightarrow k_1}, r_{2 \rightarrow k_2}, \dots, r_{l \rightarrow k_n}, r_{n \rightarrow l_1}, f_{1 \rightarrow l_2}, \dots, f_{v \rightarrow l_n}\rangle$ برابر خواهد بود با P :

$$P = |\phi(r_{1 \rightarrow k_1}, r_{2 \rightarrow k_2}, \dots, r_{l \rightarrow k_n}, r_{n \rightarrow l_1}, f_{1 \rightarrow l_2}, \dots, f_{v \rightarrow l_n})|^2 \quad (14-2)$$

در حالت هم‌دوس که تعداد دقیق فوتون‌ها در مد کاواک مشخص نیست، احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در یک تراز انرژی خاص $|r_{1 \rightarrow k_1}, r_{2 \rightarrow k_2}, \dots, r_{l \rightarrow k_n}, r_{n \rightarrow l_1}, f_1, \dots, f_v\rangle$ به صورت زیر است.

$$P = \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v=0}^N |\phi(r_{1 \rightarrow k_1}, r_{2 \rightarrow k_2}, \dots, r_{l \rightarrow k_n}, r_{n \rightarrow l_1}, f_1, \dots, f_v)|^2 \quad (15-2)$$

در سیستم‌های بزرگ‌تر با افزایش بسیار زیاد اندازه ماتریس ضرایب کت حالت سیستم و همین‌طور وجود نقاط کوانتومی و مدهای کاواک زیاد محاسبه‌ی احتمال حضور به سادگی از طریق شناسایی تک تک سطرهای ماتریس ضرایب قابل انجام نخواهد بود در نتیجه برنامه‌ای با استفاده از MATLAB نوشته شد که قادر به محاسبه‌ی احتمال حضور نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی مشخص در یک سیستم در برهم کنش با بس‌مد کاواک یا احتمال حضور یک نقطه‌ی کوانتومی در یک تراز انرژی مشخص با وجود چند نقطه‌ی کوانتومی در یک سیستم با برهم‌کنش با بس‌مد کاواک با شرایط اولیه فوک یا هم‌دوس باشد. این برنامه به صورت کامل در پیوست الف ضمیمه شده است.

۲-۳-۲- الگوریتم کلی برنامه

در این برنامه از کاربر خواسته می‌شود که تعیین کند قصد محاسبه احتمال حضور نقاط کوانتومی را در حالتی که شرایط اولیه به صورت فوک به سیستم اعمال شده است را دارد یا خیر، در صورتی که شرایط اولیه به صورت فوک تعیین شده بوده است همان‌طور که در قسمت مربوط به حالت شرایط اولیه

به صورت فوک توضیح داده شد حالت کاملاً مشخصی از قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی و فوتون‌ها در مدهای کاواک تعیین شده است و احتمال حضور در حالت کاملاً مشخصی محاسبه خواهد شد بنابراین باید برنامه‌ای نوشته می‌شد که قادر به شناسایی ضریب کت حالت سیستم در حالت تعیین شده ورودی باشد. برنامه‌ی نوشته شده اول تعیین می‌کند که حالت قرارگیری نقاط کوانتومی مربوط به کدام سطر از ماتریس ضرایب کت سیستم است و دوم اینکه حالت قرارگیری فوتون‌ها در مدهای کاواک مربوط به کدام سطر از ماتریس ضرایب کت سیستم است و در نهایت به درستی سطر مورد نظر را تعیین می‌کند. و با توجه به رابطه (۲-۱۴) احتمال حضور سیستم محاسبه و به صورت متغیر با زمان رسم می‌کند. اما در حالت مهم تر که هدف محاسبه احتمال حضور سیستم حالتی است که نقطه کوانتومی در تراز انرژی خاصی یا نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی خاصی باشند و شرایط اولیه به صورت هم‌دوس وارد شده باشد، در حالتی که قصد داشته باشیم در سیستمی احتمال حضور نقاط کوانتومی را در ترازهای انرژی مشخصی محاسبه کنیم، خواسته می‌شود تا کاربر وضعیت هر یک از نقاط کوانتومی را در تراز انرژی مد نظرش وارد کند.

با توجه به رابطه (۲-۱۴) احتمال حضور سیستم محاسبه و به صورت متغیر با زمان رسم می‌کند. الگوریتم لازم برای نوشتن کد MATLAB محاسبه احتمال حضور در این حالت شامل مراحل زیر است:

(۱) اول مشخص کردن محل قرارگرفتن سطر مربوط به حالت قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی مشخص شده.

(۲) دوم پیدا کردن این حالت در حالات مختلف قرارگیری فوتون‌ها در مدهای کاواک.

(۳) سوم محاسبه‌ی جمع توان دوم اندازه هر یک از حالت‌ها.

در کلی‌ترین حالت که هدف محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم در حالتی است که نقطه‌ی کوانتومی

خاصی در صورت وجود چندین نقطه‌ی کوانتومی و چندین مد کاواک در تراز انرژی خاصی باشد، با توجه به رابطه (۲-۱۳) اندازه‌ی حالت سیستم برابر مجموع اندازه‌هایی خواهد شد که نقطه‌ی کوانتومی l در تراز انرژی k ثابت است و بقیه‌ی نقاط کوانتومی و مدهای کاواک تغییر می‌کنند.

۲-۴- محاسبه‌ی مقادیر چشم‌داشتی عمل گر فنا و بقا فوتونی

عمل‌گرهای بقا و فنا فوتونی تنها بر روی تعداد فوتون‌های موجود در مدی که عمل‌گر مختص به آن است اثر می‌کنند. چشم‌داشتی عمل‌گرهای مذکور در ادامه برای کلی‌ترین حالت سیستم به دست می‌آیند و به دلیل نیاز به محاسبه این مقادیر در سیستم‌های با نقاط کوانتومی متعدد و مدهای کاواک بیش‌تر از یک و انتخاب یک مد از میان کدها برنامه‌ای نوشته شده است که به توضیح آن خواهیم پرداخت.

اثر عمل‌گرهای بقا و فنا بر روی کت حالت کلی سیستم با توجه به روابط زیر و رابطه (۲-۲) برابرند با:

$$\hat{a}_v^\dagger |f_v\rangle = \sqrt{f_v + 1} |f_v + 1\rangle, \hat{a}_v |f_v\rangle = \sqrt{f_v} |f_v - 1\rangle$$

$$\hat{a}_v^\dagger |\varphi(t)\rangle = \hat{a}_v^\dagger \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle = \sqrt{f_v + 1} \sum_{A,F} \phi(A, F_{f_v \rightarrow f_v + 1}) |A\rangle |F\rangle \quad (۲-۱۶)$$

$$\hat{a}_v |\varphi(t)\rangle = \hat{a}_v \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle = \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, F_{f_v \rightarrow f_v - 1}) |A\rangle |F\rangle \quad (۲-۱۷)$$

باید توجه کرد که در روابط فوق این‌طور نیست که پس از تاثیر عمل‌گرها، کت $|F\rangle$ دچار تغییر نشده است، در واقع کت $|F\rangle$ با توجه به (۲-۲) حاصل ضرب کت‌هایی است، که هر یک بیان‌گر یک مد کاواک هستند و عمل‌گرها کت فوتون‌های مربوط به مد کاواک مورد نظر را تغییر می‌دهند. در این نمایش پس از تاثیر عمل‌گر، تغییر کت $|F\rangle$ در ضریب آن منعکس شده است.

اگر حالت سیستم در مد کاواک v را در حالی که f_v حداکثر تعداد فوتون‌های در آن مد باشند به

صورت زیر در نظر بگیریم :

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v\rangle$$

مقدار چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | \times | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | = \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v) \langle A | \langle f_v |$$

$$f_v \rightarrow f_v - 1 \Rightarrow \langle \varphi(t) | = \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v - 1) \langle A | \langle f_v - 1 |$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v - 1) \langle A | \langle f_v - 1 | \times \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v - 1\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{A,F} \sqrt{f_v} \phi^*(A, f_v - 1) \phi(A, f_v) \quad (18-2)$$

مقدار چشم‌داشتی عمل گر بقا فوتونی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v^\dagger | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | \times | \hat{a}_v^\dagger | \varphi(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | = \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v) \langle A | \langle f_v |$$

$$f_v \rightarrow f_v + 1 \Rightarrow \langle \varphi(t) | = \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v + 1) \langle A | \langle f_v + 1 |$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | \hat{a}_v^\dagger | \varphi(t) \rangle = \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v + 1) \langle A | \langle f_v + 1 | \times \sqrt{f_v + 1} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v + 1\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | \hat{a}_v^\dagger | \varphi(t) \rangle = \sum_{A,F} \sqrt{f_v + 1} \phi^*(A, f_v + 1) \phi(A, f_v) \quad (19-2)$$

مثلاً در مورد سیستم الکترودینامیک کوانتومی که دارای یک نقطه‌ی کوانتومی با دو تراز انرژی و یک مد

کاواک با حداکثر ۲۴ فوتون است چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی به صورت زیر خواهد بود.

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{g,e} \sum_{f_v}^{24} \sqrt{f_v} \phi^*(A, f_v - 1) \phi(A, f_v) \quad (20-2)$$

با توجه به روابط به دست آمده برای محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل گرهای میدانی فوق ابتدا نیاز به

محاسبه‌ی ضرایب حالات کت سیستم داریم سپس با استفاده از ضرایب و توجه به این نکته که هر یک از ضرایب مربوط به کدام حالت قرارگیری فوتون‌ها در مد کاواک است می‌توان محاسبات را ادامه داد.

با توجه به اینکه نیاز بود الکترودینامیک کوانتومی کاواک سیستم‌های بزرگ با نقاط کوانتومی متعدد با برهم‌کنش با مدهای کاواک متعدد تحلیل شوند و سائز ماتریس ضرایب بسیار بالا می‌رفت و مهم‌تر این‌که مقدار چشم‌داشتی فنا یا بقا فوتونی مربوط به مد کاواک خاصی باید بررسی می‌گردید، بنابراین باید برنامه‌ای نوشته می‌شد که مقادیر چشم‌داشتی فنا و بقا فوتونی را در مد کاواک خاصی محاسبه کند. این برنامه به طور کامل در پیوست الف ضمیمه شده است و در این جا به طور مختصر در مورد الگوریتم آن توضیح خواهیم داد.

۲-۴-۲- الگوریتم کلی برنامه

۲-۴-۲-۱- چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی

با توجه به رابطه‌ی (۲-۱۸) کلی‌ترین رابطه‌ی ممکن برای چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m}^N \sqrt{f_v} \Phi^*(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v - 1, \dots, f_m) \Phi(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m) \quad (2-21)$$

r_n ، تراز انرژی نقطه کوانتومی n ام است که مابین ۱ تا B_n متغیر است، f_m تعداد فوتون‌های موجود در مد کاواک m ام است و f_v تعداد فوتون مد کاواکی است که عمل‌گر فنا فوتونی \hat{a}_v^\dagger بروی حالت کت مربوط به آن اثر می‌کند. بنابراین برنامه‌ای که نوشته شده است قادر است رابطه‌ی (۲-۲۱) را با استفاده ماتریس ضرایب کت حالات سیستم به دست آمده، حل نماید.

الگوریتم استفاده شده برای حل این رابطه به این ترتیب است که به ازای هر حالت از قرارگرفتن نقاط کوانتومی در تراز انرژی r_n مربوط به نقطه‌ی کوانتومی اول تا n ام، حالت‌های مختلف قرارگیری فوتون‌ها

در مدهای کاواک در نظر گرفته می شود.

۲-۲-۴-۲ چشم‌داشتی عمل‌گر بقا فوتونی

با توجه به رابطه‌ی (۱۸-۲) کلی‌ترین رابطه‌ی ممکن برای چشم‌داشتی عمل‌گر بقا فوتونی به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v^\dagger | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m=0}^N \sqrt{f_v + 1} \phi^*(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, \dots, f_v + 1, \dots, f_n) \phi(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_n) \quad (22-2)$$

الگوریتم استفاده شده در محاسبه‌ی عمل‌گر بقا فوتونی مشابه فنا فوتونی است به جز مرحله‌ی آخر که حالت سیستم در مد کاواک با فوتون f_v با مزدوج حالت سیستم در مد کاواک با یک عدد فوتون بیش‌تر و جذر این تعداد فوتون ضرب می‌شود.

به عنوان مثال برای سیستمی با ۱ نقطه کوانتومی، با ۲ تراز انرژی g, e ، ۲ مد کاواک و ۲ فوتون (برای سادگی ۲ فوتون در نظر گرفته شده است) هدف محاسبه‌ی $\langle \varphi(t) | \hat{a}_{v=2} | \varphi(t) \rangle$ (چشم‌داشتی فنا فوتونی مد کاواک دوم) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle &= \sum_{r_1, r_2=g,e} \sum_{f_1, f_v=0}^2 \sqrt{f_v} \phi^*(r_1, r_2, f_1, f_{v=2}-1) \phi(r_1, r_2, f_1, f_v) \\ \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle &= \sqrt{1} \phi^*(g, g, 0, 0) \phi(g, g, 0, 1) + \sqrt{1} \phi^*(g, g, 1, 0) \phi(g, g, 1, 1) + \\ &\sqrt{1} \phi^*(g, g, 2, 0) \phi(g, g, 2, 1) + \sqrt{2} \phi^*(g, g, 0, 1) \phi(g, g, 0, 2) + \\ &\sqrt{2} \phi^*(g, g, 1, 1) \phi(g, g, 1, 2) + \sqrt{2} \phi^*(g, g, 2, 1) \phi(g, g, 2, 2) + \\ &\sqrt{1} \phi^*(g, e, 0, 0) \phi(g, e, 0, 1) + \sqrt{1} \phi^*(g, e, 1, 0) \phi(g, e, 1, 1) + \\ &\sqrt{1} \phi^*(g, e, 2, 0) \phi(g, e, 2, 1) + \sqrt{2} \phi^*(g, e, 0, 1) \phi(g, e, 0, 2) + \\ &\sqrt{2} \phi^*(g, e, 1, 1) \phi(g, e, 1, 2) + \sqrt{2} \phi^*(g, e, 2, 1) \phi(g, e, 2, 2) + \\ &\sqrt{1} \phi^*(e, g, 0, 0) \phi(e, g, 0, 1) + \sqrt{1} \phi^*(e, g, 1, 0) \phi(e, g, 1, 1) + \\ &\sqrt{1} \phi^*(e, g, 2, 0) \phi(e, g, 2, 1) + \sqrt{2} \phi^*(e, g, 0, 1) \phi(e, g, 0, 2) + \\ &\sqrt{2} \phi^*(e, g, 1, 1) \phi(e, g, 1, 2) + \sqrt{2} \phi^*(e, g, 2, 1) \phi(e, g, 2, 2) + \\ &\sqrt{1} \phi^*(e, e, 0, 0) \phi(e, e, 0, 1) + \sqrt{1} \phi^*(e, e, 1, 0) \phi(e, e, 1, 1) + \\ &\sqrt{2} \phi^*(e, e, 1, 1) \phi(e, e, 1, 2) + \sqrt{2} \phi^*(e, e, 2, 1) \phi(e, e, 2, 2) \end{aligned}$$

که سطر مربوط به هر یک از حالت ها از روی ماتریس ضرایب کت انتخاب خواهند شد.

همان طور که مشخص است تحلیل سیستم های با تعداد متعدد نقاط کوانتومی با برهم کنش با تعداد دلخواه مدهای کاواک و همچنین نیاز به اعمال عمل گر بر روی مدکاواک خاصی با استفاده از روش فوق و تحلیل تک تک حالت های سیستم امکان ذیر نیست، و نوشتن برنامه ی محاسبه الزامی می باشد.

الگوریتم حل روابط (۲۱-۲) و (۲۲-۲) به این ترتیب است که برای هر ترکیب از قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی حالات مختلف قرارگیری فوتون ها را در مدهای کاواک در نظر می گیریم. با توجه به تعداد ترازهای انرژی به توان تعداد نقاط کوانتومی، ترکیب های مختلف قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی خواهیم داشت و در نتیجه چشم داشتی عمل گر فنا فوتونی رابطه ی (۲۱-۲) به صورت زیر خواهد شد.

$$\sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} |A\rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \bigotimes_{n=1}^k |r_n^n\rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} |r_1^1\rangle |r_2^2\rangle \dots |r_k^k\rangle$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \sum_F^N \sqrt{f_v} \phi^*(r_1, r_2, \dots, r_n, F_{f_v \rightarrow f_v-1}) \phi(r_1, r_2, \dots, r_n, F) \quad (23-2)$$

با استفاده از برنامه ی نوشته شده (۲۳-۲) رابطه (۲۲-۲) حل می شود. در نهایت باید مزدوج ضریب حالت های متفاوت مد کاواک مورد نظر (که دارای تعداد یکسانی فوتون است) و فاصله ی آن ها (که از یکدیگر برابر تعداد ترازهای انرژی به توان تعداد نقاط کوانتومی می باشد) را در جذر این تعداد فوتون و ضریب حالت یکسان دیگری که همه حالاتش کاملاً یکسان است اما تعداد فوتون در مد کاواک مورد نظر آن یک عدد بیش تر است ضرب کرد. این فرآیند برای تمامی حالت های قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی شان تکرار می شود و حاصل جمع می شود.

برنامه نوشته شده هر دو مورد چشم داشتی عمل گرهای بقا و فنا فوتونی را محاسبه می کند که با

تعیین کاربر هر کدام که مد نظر باشد انتخاب خواهد شد.

۲-۵- محاسبه‌ی مقادیر چشم داشتی عمل‌گرهای گذار اتمی

۲-۵-۱- استخراج روابط

عمل‌گر گذار اتمی $\hat{\sigma}_{i,j}^n$ به معنی گذار نقطه کوانتومی n از تراز j به تراز i است که به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{i,j}^n &= |i\rangle \langle j|^n \\ \hat{\sigma}_{i,j}^n |j\rangle &= |i\rangle\end{aligned}\quad (24-2)$$

اگر $\hat{\sigma}_{i,j}^n$ را به صورت $\hat{\sigma}_{s,k}^l$ تعریف کنیم طبق تعریف بالا، این عمل‌گر به معنی گذار نقطه‌ی کوانتومی l از تراز k به تراز s است و باید توجه کرد این عمل‌گر تنها بر حالاتی از ترکیب کت‌ها اثر می‌کند که در آن نقطه‌ی کوانتومی l در تراز k قرار داشته باشد. در نتیجه حالت ترکیب کت‌ها به نحوی می‌شود که این نقطه کوانتومی در تراز s باشد.

بنابراین تاثیر این عمل‌گر بر روی حالت کت سیستم (۲-۲) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle &= \\ \hat{\sigma}_{s,k}^l \sum_{A,F} \phi(A,F) |A\rangle |F\rangle &= \sum_{A-\{r_l\},F} \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle\end{aligned}\quad (25-2)$$

همین‌طور دوگان هرمیتی این عمل‌گر $(\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger$ به معنی گذار نقطه کوانتومی l از تراز انرژی s به k است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger |\varphi(t)\rangle = (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \sum_{A,F} \phi(A,F) |A\rangle |F\rangle = \sum_{A-\{r_l\},F} \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle\quad (26-2)$$

هدف اصلی محاسبه مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر فوق و دوگان هرمیتی آن است. چشم‌داشتی عمل‌گر

فوق با توجه به (۲-۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | &= \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v) \langle A | \langle F | \\ r_l \rightarrow s \Rightarrow \langle \varphi(t) | &= \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) | A_{r_l \rightarrow s} \rangle | F \rangle \\ \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle &= \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) | A_{r_l \rightarrow s} \rangle | F \rangle \times \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) | A_{r_l \rightarrow s} \rangle | F \rangle &= \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) \times \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) \end{aligned} \quad (27-2)$$

و همین‌طور در مورد دوگانی هرمیتی این عمل‌گر به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | &= \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v) \langle A | \langle F | \\ r_l \rightarrow k \Rightarrow \langle \varphi(t) | &= \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) | A_{r_l \rightarrow k} \rangle | F \rangle \\ \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger | \varphi(t) \rangle &= \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) | A_{r_l \rightarrow k} \rangle | F \rangle \times \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) | A_{r_l \rightarrow k} \rangle | F \rangle &= \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) \times \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) \end{aligned} \quad (28-2)$$

به منظور محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر فوق و دوگان هرمیتی آن باید به مشخصات عمل‌گر که

مربوط به کدام نقطه‌ی کوانتومی (l) است و تراز انرژی (s) که گذار از آن به تراز انرژی دیگر (k) می‌شود توجه کرد.

۲-۵-۲- الگوریتم کلی برنامه

الگوریتم محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی با توجه به رابطه‌ی (۲۷-۲) به دست آمده، در

کلی‌ترین حالت به این ترتیب است که حالات سیستم در ترکیباتی از نقاط کوانتومی و مدهای کاواک که

در آن‌ها نقطه‌ی کوانتومی l ام در تراز s ام ثابت است را مزدوج می‌کنیم. سپس در حالت‌های سیستم در

ترکیباتی از نقاط کوانتومی و مدهای کاواک که در آن‌ها نقطه‌ی کوانتومی l ام در تراز k ام است ضرب

می‌کنیم و در محاسبه‌ی دوگان هرمیتی عمل‌گر مذکور هم براساس رابطه‌ی (۲۸-۲) بر عکس عمل

خواهیم کرد.

روند فوق از طریق رابطه‌ی زیر نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle \\ = \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m=0}^N \phi^*(r_1, r_2, r_l \rightarrow s, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m) \phi(r_1, r_2, \dots, r_n \rightarrow k, f_1, f_2, \dots, f_m) \end{aligned} \quad (29-2)$$

و چشم‌داشتی دوگانی هرمیتی عمل‌گر گذار اتمی به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger | \varphi(t) \rangle \\ = \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m=0}^N \phi^*(r_1, r_2, r_l \rightarrow k, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m) \phi(r_1, r_2, r_l \rightarrow s, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m) \end{aligned} \quad (30-2)$$

مثلاً در مورد سیستمی با دو نقطه‌ی کوانتومی که هر یک دارای دو تراز انرژی g , e هستند و با برهم

کنش با یک مد کاواک با دو فوتون هستند دوگانی هرمیتی عمل‌گر چشم‌داشتی گذار اتمی $\hat{\sigma}_{g,e}^{2\dagger}$ به

صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, -\{r_2\}=g,e} \sum_{f_1, f_2=0}^2 \phi^*(r_1, r_2 \rightarrow e, f_1, f_2) \phi(r_1, r_2 \rightarrow g, f_1, f_2) = \\ \phi^*(g, e, 0, 0) \phi(g, g, 0, 0) + \phi^*(g, e, 0, 1) \phi(g, g, 0, 1) + \phi^*(g, e, 0, 2) \phi(g, g, 0, 2) + \\ \phi^*(g, e, 1, 0) \phi(g, g, 1, 0) + \phi^*(g, e, 1, 1) \phi(g, g, 1, 1) + \phi^*(g, e, 1, 2) \phi(g, g, 1, 2) + \\ \phi^*(g, e, 2, 0) \phi(g, g, 2, 0) + \phi^*(g, e, 2, 1) \phi(g, g, 2, 1) + \phi^*(g, e, 2, 2) \phi(g, g, 2, 2) + \\ \phi^*(e, e, 0, 0) \phi(e, g, 0, 0) + \phi^*(e, e, 0, 1) \phi(e, g, 0, 1) + \phi^*(e, e, 0, 2) \phi(e, g, 0, 2) + \\ \phi^*(e, e, 1, 0) \phi(e, g, 1, 0) + \phi^*(e, e, 1, 1) \phi(e, g, 1, 1) + \phi^*(e, e, 1, 2) \phi(e, g, 1, 2) + \\ \phi^*(e, e, 2, 0) \phi(e, g, 2, 0) + \phi^*(e, e, 2, 1) \phi(e, g, 2, 1) + \phi^*(e, e, 2, 2) \phi(e, g, 2, 2) \end{aligned}$$

اکنون باید مشخص شود براساس نحوه قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی شان و فوتون‌ها در

مدهای کاواک هر حالت مربوط به کدام سطر از ماتریس ضرایب حالت خواهد شد و پاسخ را به دست

آورد.

همان طور که مشاهده می شود در این سیستم ساده که تعداد فوتون ها فقط دو فوتون در نظر گرفته شده است و تنها دو نقطه ی کوانتومی دو ترازه وجود دارد، میزان محاسبات زیاد و احتمال خطا بسیار بالا می رود. عملاً این روش فقط در مورد سیستم های خیلی ساده قابل انجام است. بنابراین به دلیل نیاز به تحلیل سیستم های با نقاط کوانتومی و مدهای کاواک بالاتر و انتخاب عمل گر مربوط به نقطه ی کوانتومی دلخواه از بین نقاط کوانتومی موجود، برنامه ی محاسبه ی چشم داشتی گذار اتمی و دوگانی هرمیتی آن نوشته شد.

الگوریتم برنامه در واقع حل رابطه ی چشم داشتی گذار اتمی (۲-۲۹) می باشد. به منظور حل، با توجه به این که هر سطر حاصل ترکیب حالت های نقاط کوانتومی در مدهای کاواک می باشد و در این جا هدف پیدا کردن سطرها ی مربوط به یک نقطه ی کوانتومی خاص می باشد بنا بر روابط زیر این عمل را برای هر حالت مدهای کاواک باید انجام دهیم.

هر مرحله ی مربوط به هر حالت مد کاواک، دارای تعداد ترازهای انرژی به توان تعداد نقاط کوانتومی حالت می باشد. در نتیجه چشم داشتی عمل گر گذار اتمی رابطه زیر خواهد شد:

$$= \text{ترکیب های مختلف قرارگیری فوتون ها در مدهای کاواک}$$

$$\sum_{f_1, f_2, \dots, f_w=0}^N |F\rangle = \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v=0}^N \bigotimes_{n=1}^w |f_v\rangle = \sum_{f_1, f_2, \dots, f_w=0}^N |f_1\rangle |f_2\rangle \dots |f_w\rangle$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{A-\{r_l\}} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_w=0}^N \phi^*(A(r_l \rightarrow k), f_1, f_2, \dots, f_w)$$

$$\phi(A(r_l \rightarrow k), f_1, f_2, \dots, f_w) \quad (۲-۳۱)$$

با استفاده از برنامه ی نوشته شده رابطه ی (۲-۳۱) محاسبه خواهد شد.

برنامه هر دو مقدار چشم داشتی گذار اتمی و همین طور دوگانی هرمیتی آن را محاسبه می کند. در انتها از کاربر خواسته می شود تا تعیین کند که خروجی کدام یک از چشم داشتی گذار اتمی یا دوگانی

هرمیتی آن مدنظرش است که بسته به انتخاب نمودار آن رسم خواهد شد.

۲-۶- مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی سیستم از طریق محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گر گذار اتمی

۲-۶-۱- استخراج روابط مربوطه

در این بخش ابتدا چشم‌داشتی $\hat{\sigma}_z^l = [\hat{\sigma}_{s,k}^l, (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger]$ را در کلی‌ترین حالت که در واقع چشم‌داشتی جابجایی دو عمل‌گر گذر اتمی و دوگان هرمیتی آن است محاسبه می‌کنیم. روند به دست آوردن رابطه‌ی چشم‌داشتی را به صورت زیر نشان می‌دهیم. تاثیر عمل‌گرهای گذار بر روی کت حالت سیستم به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle &= \hat{\sigma}_{s,k}^l \sum_{A,F} \phi(A,F) |A\rangle |F\rangle = \\ &= \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle \\ (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger |\varphi(t)\rangle &= (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \sum_{A,F} \phi(A,F) |A\rangle |F\rangle = \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle &\rightarrow (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger = \hat{\sigma}_{k,s}^l\end{aligned}\quad (32-2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۲-۲) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger] | \varphi(t) \rangle &= \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger - (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l) | \varphi(t) \rangle = \\ \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger) | \varphi(t) \rangle &- \langle \varphi(t) | ((\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l) | \varphi(t) \rangle\end{aligned}$$

در ادامه‌ی محاسبه از بعضی از روابط تعامد زیر برای عمل‌گر گذار اتمی هم استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{k,i'}^n &= \hat{\sigma}_{i,i'}^l \delta_{j,k} \\ \hat{\sigma}_f^s \hat{\sigma}_g^s &= \hat{\sigma}_f^s \delta_{f,g} \\ \Rightarrow \hat{\sigma}_{s,k}^l (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger &= \hat{\sigma}_{s,k}^l (\hat{\sigma}_{k,s}^l)^\dagger = \hat{\sigma}_{s,s}^l \delta_{k,k} = \hat{\sigma}_{s,s}^l \\ \Rightarrow (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l &= (\hat{\sigma}_{k,s}^l)^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l = \hat{\sigma}_{k,k}^l \delta_{k,k} = \hat{\sigma}_{k,k}^l \\ \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger) | \varphi(t) \rangle &= \langle \varphi(t) | \times | \hat{\sigma}_{s,s}^l | \varphi(t) \rangle \\ \rightarrow \hat{\sigma}_{s,s}^l |\varphi(t)\rangle &= \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle \\ , \langle \varphi(t) | &= \sum_{A,F} \phi^*(A, f_v) \langle A | \langle F | \end{aligned}$$

$$r_l \rightarrow s \Rightarrow \langle \varphi(t) | = \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,s}^l | \varphi(t) \rangle &= \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) \{ |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle \}^\dagger \times \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle &= \\ \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) \times \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) \end{aligned} \quad (33-2)$$

$$\langle \varphi(t) | ((\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l) | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | \times | \hat{\sigma}_{k,k}^l | \varphi(t) \rangle$$

$$\hat{\sigma}_{k,k}^l | \varphi(t) \rangle = \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle$$

$$\langle \varphi(t) | = \sum_{A, F} \phi^*(A, f_v) \langle A | \langle F |$$

$$r_l \rightarrow k \Rightarrow \langle \varphi(t) | = \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) \{ |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle \}^\dagger$$

\Rightarrow

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,s}^l | \varphi(t) \rangle = \quad (34-2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) \{ |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle \}^\dagger \times \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle \\ = \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) \times \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger] | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger) | \varphi(t) \rangle -$$

$$\langle \varphi(t) | ((\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l) | \varphi(t) \rangle = (33-2) - (34-2) = \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F) \times \quad (35-2)$$

$$\phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) - \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F) \times \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) =$$

$$\sum_{A-\{r_l\}, F} |\phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F)|^2 - \sum_{A-\{r_l\}, F} |\phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F)|^2 =$$

$$\sum_{A-\{r_l\}, F} |\phi^*(A_{r_l \rightarrow s}, F)|^2 - \sum_{A-\{r_l\}, F} |\phi^*(A_{r_l \rightarrow k}, F)|^2$$

۲-۶-۲- الگوریتم کلی

به منظور محاسبه‌ی چشم‌داشتی $[\hat{\sigma}_{s,k}^l, (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger]$ باید توجه کرد در یک سیستم کوانتومی با

تعداد دلخواه نقاط کوانتومی و مدهای کاواک، $\hat{\sigma}_z^l$ مربوط به کدام نقطه‌ی کوانتومی (l) است و ترازهای

انرژی (s) که گذار از آن به تراز انرژی دیگر (k) می شود کدامند.

الگوریتم محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار $\hat{\sigma}_z^l$ با توجه به رابطه‌ی به دست آمده (۳۵-۲) در کلی‌ترین حالت به این ترتیب است که مجذور اندازه‌ی حالات سیستم در ترکیباتی از نقاط کوانتومی و مدهای کاواک، که در آن‌ها نقطه‌ی کوانتومی l ام در تراز s ام، ثابت است را از مجذور حالات سیستم در ترکیباتی از نقاط کوانتومی و مدهای کاواک که در آن‌ها نقطه‌ی کوانتومی l ام در تراز k ام است تفریق کنیم. روند فوق از طریق رابطه‌ی زیر نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger] | \varphi(t) \rangle = \\ \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m}^N 0 |\phi(r_1, r_2, r_l \rightarrow s, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m)|^2 - \\ \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m}^N 0 |\phi(r_1, r_2, r_l \rightarrow k, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m)|^2 \end{aligned} \quad (۳۶-۲)$$

به عنوان مثال در مورد سیستمی با ۲ نقطه کوانتومی که هر یک دارای دو تراز انرژی e , g هستند و ۱ مد کاواک با ۲ فوتون (برای سادگی نشان دادن ۲ فوتون انتخاب شده است) چشم‌داشتی $\hat{\sigma}_z^2 = [\hat{\sigma}_{g,e}^2, (\hat{\sigma}_{g,e}^2)^\dagger]$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{g,e}^2, (\hat{\sigma}_{g,e}^2)^\dagger] | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, -\{r2\}=g,e} \sum_{f_1, f_2=0}^2 |\phi(r_1, r_2 \rightarrow g, f_1, f_2)|^2 - \\ \sum_{r_1, r_2, -\{r2\}=g,e} \sum_{f_1, f_2=0}^2 |\phi(r_1, r_2 \rightarrow e, f_1, f_2)|^2 = (|\phi(g, g, 0, 0)|^2 + |\phi(g, g, 0, 1)|^2 + \\ |\phi(g, g, 0, 2)|^2 + |\phi(g, g, 1, 0)|^2 + |\phi(g, g, 1, 1)|^2 + |\phi(g, g, 1, 2)|^2 + |\phi(g, g, 2, 0)|^2 + \\ |\phi(g, g, 2, 1)|^2 + |\phi(g, g, 2, 2)|^2 + |\phi(e, g, 0, 0)|^2 + |\phi(e, g, 0, 1)|^2 + |\phi(e, g, 0, 2)|^2 + \\ |\phi(e, g, 1, 0)|^2 + |\phi(e, g, 1, 1)|^2 + |\phi(e, g, 1, 2)|^2 + |\phi(e, g, 2, 0)|^2 + |\phi(e, g, 2, 1)|^2 + \\ |\phi(e, g, 2, 2)|^2) - (|\phi(g, e, 0, 0)|^2 + |\phi(g, e, 0, 1)|^2 + |\phi(g, e, 0, 2)|^2 + |\phi(g, e, 1, 0)|^2 + \\ |\phi(g, e, 1, 1)|^2 + |\phi(g, e, 1, 2)|^2 + |\phi(g, e, 2, 0)|^2 + |\phi(g, e, 2, 1)|^2 + |\phi(g, e, 2, 2)|^2 + \\ |\phi(e, e, 0, 0)|^2 + |\phi(e, e, 0, 1)|^2 + |\phi(e, e, 0, 2)|^2 + |\phi(e, e, 1, 0)|^2 + |\phi(e, e, 1, 1)|^2 + \\ |\phi(e, e, 1, 2)|^2 + |\phi(e, e, 2, 0)|^2 + |\phi(e, e, 2, 1)|^2 + |\phi(e, e, 2, 2)|^2) \end{aligned}$$

اکنون باید مشخص شود براساس نحوه قرارگیری نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی‌شان و فوتون‌ها در مدهای کاواک هر ترکیب مربوط به کدام سطر از ماتریس ضرایب حالت خواهد شد و پاسخ را به دست آورد.

با توجه به مثال فوق و دشواری محاسبه به صورت تحلیل تک‌تک سطرها، برنامه‌ای نوشته شده که می‌تواند، محاسبات چشم‌داشتی جابجایی عمل‌گرگذار اتمی و دوگانی هرمیتی را در کلی‌ترین سیستم ممکن انجام دهد، برنامه‌ی نوشته شده که رابطه (۲-۳۶) را حل میکند دارای الگوریتم همان برنامه محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی گذار اتمی می‌باشد با این تفاوت که پس از پیدا کردن سطرهای مورد نظر، براساس رابطه‌ی (۲-۳۶) عمل می‌شود.

فصل ۳ : تحلیل و نتایج عددی

۳-۱- محاسبه‌ی دستی و نرم افزاری

۳-۱-۱- مقدمه

در مرحله‌ی اول ضرایب کت حالت سیستمی کوانتومی با وجود ۲ نقطه‌ی کوانتومی که هر یک دارای ۲ تراز انرژی هستند و دارای برهم‌کنش با یک مدکاواک که حداکثر تعداد ۸ فوتون در آن جا می‌گیرد به صورت دستی محاسبه می‌شوند. در ادامه با استفاده از ضرایب به دست آمده چشم‌داشتی عمل‌گر فنا، چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نیز به صورت دستی محاسبه می‌شوند. در مرحله بعد محاسبات انجام شده کاملاً از طریق برنامه‌های نوشته‌شده انجام می‌پذیرد و جواب‌ها مقایسه می‌گردند. در نهایت مشاهده خواهد شد که پاسخ‌ها کاملاً منطبق برهم هستند و برنامه‌های نوشته‌شده کاملاً بدون اشتباه عمل می‌کنند.

در این بخش ابتدا روابط مورد نیاز جهت محاسبه‌ی ضرایب و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها شرح داده شده است و در ادامه با استفاده از روابطی به دست آمده سیستم مذکور حل شده است.

با توجه به رابطه‌ی زیر کلی‌ترین حالت یک سیستم کوانتومی به صورت زیر می‌باشد.

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{A,F} \phi(A,F) |A\rangle |F\rangle \quad (1-3)$$

$$|A\rangle = \bigotimes_{n=1}^k |r_n\rangle = |r_1\rangle |r_2\rangle \dots |r_k\rangle \quad 1 < r_n < 2$$

$$|F\rangle = \bigotimes_{v=1}^w |f_v\rangle = |f_1\rangle |f_2\rangle \dots |f_v\rangle \quad 0 < f_v < 8$$

برای محاسبه‌ی ضرایب کت حالت سیستم (۳-۱) باید معادله‌ی شرودینگر زیر حل شود.

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 |\varphi(t)\rangle \quad (2-3)$$

در واقع معادله‌ی شرودینگر در فضای شرودینگر در حالی که کت حالات تابعی از زمان هستند حل می‌شود.

همیلتونی \mathbb{H} از نوع جینس - کامینگز - پاول است.

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &= \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_{r,r} + \mathbb{H}_{r,E} \\ \mathbb{H}_0 &= \sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_v \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v \\ \mathbb{H}_{r,r} &= \sum_{n < m, i < j} \left(\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \right) \left(\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m \right) \\ \mathbb{H}_{r,E} &= \sum_{n, i < j} \left(\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \right) \sum_v \left(g_{nijv} \hat{a}_v + g_{nijv}^* \hat{a}_v^\dagger \right)\end{aligned}\quad (3-3)$$

در اینجا به استناد [۶۰] در به دست آوردن هامیلتونی از تصویر برهم‌کنش هایزنبرگ نباید استفاده شود، حال کلیه‌ی ضرایب (۱-۳) وابسته به زمان هستند و با مشتق زمان گرفتن از کت حالت در سمت چپ معادله‌ی (۲-۳) در واقع از ضرایب کت‌ها مشتق گرفته می‌شود، اما در سمت راست معادله، با تاثیر عمل گر هامیلتونی بر روی کت حالت به دلیل وجود عمل‌گرهای گذار اتمی، فنا و بقا اتمی در عمل گر هامیلتونی، هر کت ویژه متحمل گذار به حالت دیگری می‌شود. که با مساوی قرار دادن ضرایب کت‌های یکسان از دو طرف و ضرب داخلی براها در دو سمت، به ماتریس ضرایب خواهیم رسید.

ابتدا تاثیر هامیلتونی مذکور را بر روی کت حالت سیستم در حالت کلی به دست آورده، سپس به محاسبه عددی خواهیم پرداخت.

در محاسبه تاثیر هامیلتونی از روابط زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned}\hat{a}_v^\dagger |f_v\rangle &= \sqrt{f_v + 1} |f_v + 1\rangle \\ \hat{a}_v |f_v\rangle &= \sqrt{f_v} |f_v - 1\rangle\end{aligned}\quad (4-3)$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_v^\dagger |\varphi(t)\rangle &= \hat{a}_v^\dagger \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle = \sqrt{f_v + 1} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v + 1\rangle \\ \hat{a}_v |\varphi(t)\rangle &= \hat{a}_v \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle = \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v - 1\rangle\end{aligned}\quad (5-3)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle &= \hat{\sigma}_{s,k}^l \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle \\ &= \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi(A_{r_l \rightarrow k}, F) |A_{r_l \rightarrow s}\rangle |F\rangle \\ (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger |\varphi(t)\rangle &= (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle = \sum_{A-\{r_l\}, F} \phi(A_{r_l \rightarrow s}, F) |A_{r_l \rightarrow k}\rangle |F\rangle\end{aligned}\quad (6-3)$$

ابتدا تک تک ترم‌های هامیلتونی را بر روی کت حالت سیستم اثر می‌دهیم و در نهایت حاصل را جمع می‌کنیم.

در این قسمت روابط و فرمول‌های به دست آمده از تاثیر ترم‌های هامیلتونی (۳-۳) بر روی کت حالت سیستم را به دست می‌آوریم.

روابط حاصل از تاثیر هامیلتونی $\hat{\mathbb{H}}_0$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{H}}_0 |\varphi(t)\rangle &= \{\sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_v \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v\} |\varphi(t)\rangle = \sum_{n,i} E_i^n \\ &\sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle + \sum_v \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v - 1\rangle = \\ &\sum_{n,i} E_i^n \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle + \\ &\sum_v \hbar \Omega_v \sqrt{f_v + 1} \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v\rangle\end{aligned}\quad (7-3)$$

روابط حاصل از تاثیر هامیلتونی $\hat{\mathbb{H}}_{r.E}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{H}}_{r.E} |\varphi(t)\rangle &= \left\{ \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \right) \sum_v \left(g_{nijv} \hat{a}_v + g_{nijv}^* \hat{a}_v^\dagger \right) \right\} |\varphi(t)\rangle = \\ &\sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v^\dagger \right) |\varphi(t)\rangle + \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v + \right. \\ &\left. \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v^\dagger \right) |\varphi(t)\rangle\end{aligned}$$

با اثر دادن عبارت فوق بر روی کت حالت سیستم، روابط به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}\sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v^\dagger \right) \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle &= \\ \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v - 1\rangle + \right. \\ \left. \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \sqrt{f_v + 1} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v + 1\rangle \right) &= \\ \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv} \sqrt{f_v} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow j}, f_v) |A_{r_n \rightarrow i}\rangle |f_v - 1\rangle + \right. &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow j}, f_v) |A_{r_n \rightarrow i}\rangle |f_v + 1\rangle \right) \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\left(\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v^\dagger \right) \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle \right) = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{j,i}^n \sqrt{f_v} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v - 1\rangle + \right. \\
 & \left. \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \sqrt{f_v + 1} \sum_{A,F} \phi(A, f_v) |A\rangle |f_v + 1\rangle \right) = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij}^* g_{nijv} \sqrt{f_v} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow i}, f_v) |A_{r_n \rightarrow j}\rangle |f_v - 1\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow i}, f_v) |A_{r_n \rightarrow j}\rangle |f_v + 1\rangle \right) \\
 & \Rightarrow \hat{\mathbb{H}}_{r,E} |\varphi(t)\rangle = \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv} \sqrt{f_v} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow j}, f_v) |A_{r_n \rightarrow i}\rangle |f_v - 1\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij} g_{nijv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow j}, f_v) |A_{r_n \rightarrow i}\rangle |f_v + 1\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij}^* g_{nijv} \sqrt{f_v} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow i}, f_v) |A_{r_n \rightarrow j}\rangle |f_v - 1\rangle \right) + \quad (\lambda-3) \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow i}, f_v) |A_{r_n \rightarrow j}\rangle |f_v + 1\rangle \right)
 \end{aligned}$$

روابط حاصل از تاثیر هامیلتونی $\hat{\mathbb{H}}_{r,r}$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle &= \sum_{n < m, i < j} \left(\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \right) \left(\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m \right) |\varphi(t)\rangle = \\
 & \sum_{n < m, i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m \right) |\varphi(t)\rangle + \sum_{n < m, i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \right. \\
 & \left. \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m |\varphi(t)\rangle \right)
 \end{aligned}$$

با اثر دادن عبارت فوق بر روی کت حالت سیستم، رابطه به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n < m, i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m \right) \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^n \sum_{A-\{r_m\}, F} \phi(A_{r_m \rightarrow j}, f_v) |A_{r_m \rightarrow i}\rangle |F\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \sum_{A-\{r_m\}, F} \phi(A_{r_m \rightarrow i}, f_v) |A_{r_m \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij} \sum_{A-\{r_m, r_n\}, F} \phi(A_{r_m \rightarrow j, r_n \rightarrow j}, f_v) |A_{r_m \rightarrow i, r_n \rightarrow i}\rangle |F\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij}^* \sum_{A-\{r_m, r_n\}, F} \phi(A_{r_m \rightarrow i, r_n \rightarrow j}, f_v) |A_{r_m \rightarrow j, r_n \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) \\
 & \sum_{n < m, i < j} \left(\left(\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m \right) \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle \right) = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{j,i}^n \sum_{A-\{r_m\}, F} \phi(A_{r_m \rightarrow j}, f_v) |A_{r_m \rightarrow i}\rangle |F\rangle \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \sum_{A-\{r_m\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow i}, f_v) |A_{r_m \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij} \sum_{A-\{r_m, rn\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow j, rn \rightarrow i}, f_v) |A_{r_m \rightarrow i, rn \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \sum_{A-\{r_m\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow i, rn \rightarrow i}, f_v) |A_{r_m \rightarrow j, rn \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) \\
 & \Rightarrow \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle = \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij} \sum_{A-\{r_m, rn\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow j, rn \rightarrow j}, f_v) |A_{r_m \rightarrow i, rn \rightarrow i}\rangle |F\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij} \eta_{mij}^* \sum_{A-\{r_m, rn\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow i, rn \rightarrow j}, f_v) |A_{r_m \rightarrow j, rn \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij} \sum_{A-\{r_m, rn\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow j, rn \rightarrow i}, f_v) |A_{r_m \rightarrow i, rn \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right) + \\
 & \sum_{n,i < j} \left(\eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \sum_{A-\{r_m\},F} \phi(A_{r_m \rightarrow i, rn \rightarrow i}, f_v) |A_{r_m \rightarrow j, rn \rightarrow j}\rangle |F\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} (\hat{\mathbb{H}}_0 |\varphi(t)\rangle + \hat{\mathbb{H}}_{r,E} |\varphi(t)\rangle + \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle) \tag{۱۰-۳}$$

اکنون با توجه به روابط زیر محاسبات مربوط به سیستم مذکور را تا محاسبه‌ی ماتریس ضرایب کت حالات سیستم ادامه خواهیم داد.

معادله‌ی ماتریسی (۲-۳) به صورت فرم ماتریسی زیر نوشته می شود که N حالت‌های مختلف نقاط کوانتومی و مدکاواک است.

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t)]_{N \times 1} = [M]_{N \times N} [\Phi(t)]_{N \times 1} \tag{۱۱-۳}$$

حالت‌های مختلف ترازهای انرژی در سیستم مذکور به صورت زیر خواهند بود:

حالت نقطه‌ی کوانتومی ۱ در حالت پایه $|g_1\rangle$ و حالت نقطه‌ی کوانتومی در حالت برانگیخته $|e_1\rangle$

حالت نقطه‌ی کوانتومی ۲ در حالت پایه $|g_2\rangle$ و حالت نقطه‌ی کوانتومی در حالت برانگیخته $|e_2\rangle$

جدول ۳-۱. حالات مختلف ترازهای انرژی و مد کاواک

$ \varphi(t)\rangle = \sum_{k=0}^8 \sum_{r1, r2=g,e} \phi(k, r1, r2) k, r1, r2\rangle$	$ \varphi(t)\rangle = \sum_{k=0}^8 \phi(k, g_1, g_2) k, g_1, g_2\rangle + \phi(k, g_1, e_2) k, g_1, e_2\rangle + \phi(k, e_1, g_2) k, e_1, g_2\rangle + \phi(k, e_1, e_2) k, e_1, e_2\rangle$
$ \varphi(t)\rangle = \phi(0, r1, r2) 0, r1, r2\rangle + \dots + \phi(k, r1, r2) k, r1, r2\rangle$	$ \varphi(t)\rangle = \phi(0, g_1, g_2) 0, g_1, g_2\rangle + \phi(0, g_1, e_2) 0, g_1, e_2\rangle + \phi(0, e_1, g_2) 0, e_1, g_2\rangle + \phi(0, e_1, e_2) 0, e_1, e_2\rangle + \dots + \phi(k, g_1, g_2) k, g_1, g_2\rangle + \phi(k, g_1, e_2) k, g_1, e_2\rangle + \phi(k, e_1, g_2) k, e_1, g_2\rangle + \phi(k, e_1, e_2) k, e_1, e_2\rangle$

اکنون به منظور محاسبه‌ی ماتریس [M] لازم است که حالت‌های ممکن نقاط کوانتومی و مد کاواک را در روابط به دست آمده قرار دهیم. هر سطر ماتریس مربوط به یک حالت از ترکیبات مذکور خواهد بود، با توجه به معادله‌ی (۵-۲) این معادله پس از حذف کت‌های همانند از طرفین معادله صورت گرفته است یا به عبارتی معادله‌ی (۵-۲) یک دستگاه معادله است که در آن ضرایب کت‌های همانند در طرفین، در تساوی با هم قرار گرفته‌اند، بنابراین مقادیر به دست آمده حاصل از روابط مذکور مربوط به هر حالت یا سطر به درایه‌هایی اضافه می‌شوند که کت مربوط به آن درایه پس از اعمال هامیلتونی به کتی تبدیل شود که قصد نوشتن مولفه‌های ماتریس را برای آن داشتیم.

در انجام محاسبات تراز انرژی هر یک از نقاط کوانتومی در تراز انرژی پایه و برانگیخته مقادیر ۰ و ۱۰ در نظر گرفته شده است. پارامتر بسامد مد کاواک برابر ۱۰، ضریب تزویج ۰,۰۴ (تزویج ضعیف) و شدت دوقطبی ۱۰ در نظر گرفته شده است.

به منظور محاسبه‌ی ضرایب مربوط به هامیلتونی \hat{H}_0 هر یک از حالت‌های جدول ۳-۱ را جایگزین (۳-۷) می‌کنیم همان‌طور که در رابطه مشخص است کت سیستم در دو جمله‌ی این هامیلتونی تغییر نمی‌کند بنابراین اندازه‌ی هامیلتونی به مولفه‌های سطری ماتریس M اضافه می‌گردند.

اندازه‌ی ضرایب مربوط به \hat{H}_0 : مثلاً در مورد دو حالت $\phi(0, e_1, e_2) |0, e_1, e_2\rangle$ و

$\phi(1, g_1, e_2)|1, g_1, e_2\rangle$ ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\phi(1, g_1, e_2) = E_g^1 + E_e^2 + \Omega_1 \times 1 = E_g^1 + E_e^2 + \Omega_1 = 20$$

$$\phi(0, e_1, e_2) = E_e^1 + E_e^2 + \Omega_1 \times 0 = E_e^1 + E_e^2 = 20$$

سایر مقادیر هم به همین روش به دست آمده و به دلیل طولانی شدن محاسبات از آوردن آن‌ها

اجتناب شده و فقط حاصل در جدول زیر نشان داده شده است (احتمال هر یک از حالات ممکن بر حسب

سایر احتمالات به دست آمده است).

جدول ۳-۲. مقادیر ماتریس ضرایب هامیلتونی \hat{H}_0

$\hat{H}_0 \varphi(t)\rangle$		حالت‌های مختلف جهت سادگی نشان دادن به صورت زیر نشان داده شده‌اند
$ 1\rangle$	$0 1\rangle$	$ 1\rangle = 0, g_1, g_2\rangle$
$ 2\rangle$	$10 2\rangle$	$ 2\rangle = 0, g_1, e_2\rangle$
$ 3\rangle$	$10 3\rangle$	$ 3\rangle = 0, e_1, g_2\rangle$
$ 4\rangle$	$20 4\rangle$	$ 4\rangle = 0, e_1, e_2\rangle$
$ 5\rangle$	$10 5\rangle$	$ 5\rangle = 1, g_1, g_2\rangle$
$ 6\rangle$	$20 6\rangle$	$ 6\rangle = 1, g_1, e_2\rangle$
$ 7\rangle$	$20 7\rangle$	$ 7\rangle = 1, e_1, g_2\rangle$
$ 8\rangle$	$30 8\rangle$	$ 8\rangle = 1, e_1, e_2\rangle$
$ 9\rangle$	$20 9\rangle$	$ 9\rangle = 2, g_1, g_2\rangle$
$ 10\rangle$	$30 10\rangle$	$ 10\rangle = 2, g_1, e_2\rangle$
$ 11\rangle$	$30 11\rangle$	$ 11\rangle = 2, e_1, g_2\rangle$
$ 12\rangle$	$40 12\rangle$	$ 12\rangle = 2, e_1, e_2\rangle$
$ 13\rangle$	$30 13\rangle$	$ 13\rangle = 3, g_1, g_2\rangle$
$ 14\rangle$	$40 14\rangle$	$ 14\rangle = 3, g_1, e_2\rangle$
$ 15\rangle$	$40 15\rangle$	$ 15\rangle = 3, e_1, g_2\rangle$
$ 16\rangle$	$50 16\rangle$	$ 16\rangle = 3, e_1, e_2\rangle$
$ 17\rangle$	$40 17\rangle$	$ 17\rangle = 4, g_1, g_2\rangle$
$ 18\rangle$	$50 18\rangle$	$ 18\rangle = 4, g_1, e_2\rangle$
$ 19\rangle$	$50 19\rangle$	$ 19\rangle = 4, e_1, g_2\rangle$
$ 20\rangle$	$60 20\rangle$	$ 20\rangle = 4, e_1, e_2\rangle$
$ 21\rangle$	$50 21\rangle$	$ 21\rangle = 5, g_1, g_2\rangle$

$ 22\rangle$	$60 22\rangle$	$ 22\rangle = 5, g_1, e_2\rangle$
$ 23\rangle$	$60 23\rangle$	$ 23\rangle = 5, e_1, g_2\rangle$
$ 24\rangle$	$70 24\rangle$	$ 24\rangle = 5, e_1, e_2\rangle$
$ 25\rangle$	$60 25\rangle$	$ 25\rangle = 6, g_1, g_2\rangle$
$ 26\rangle$	$70 26\rangle$	$ 26\rangle = 6, g_1, e_2\rangle$
$ 27\rangle$	$70 27\rangle$	$ 27\rangle = 6, e_1, g_2\rangle$
$ 28\rangle$	$80 28\rangle$	$ 28\rangle = 6, e_1, e_2\rangle$
$ 29\rangle$	$70 29\rangle$	$ 29\rangle = 7, g_1, g_2\rangle$
$ 30\rangle$	$80 30\rangle$	$ 30\rangle = 7, g_1, e_2\rangle$
$ 31\rangle$	$80 31\rangle$	$ 31\rangle = 7, e_1, g_2\rangle$
$ 32\rangle$	$90 32\rangle$	$ 32\rangle = 7, e_1, e_2\rangle$
$ 33\rangle$	$80 33\rangle$	$ 33\rangle = 8, g_1, g_2\rangle$
$ 34\rangle$	$90 34\rangle$	$ 34\rangle = 8, g_1, e_2\rangle$
$ 35\rangle$	$90 35\rangle$	$ 35\rangle = 8, e_1, g_2\rangle$
$ 36\rangle$	$100 36\rangle$	$ 36\rangle = 8, e_1, e_2\rangle$

به منظور محاسبه‌ی ضرایب مربوط به هامیلتونی $\hat{H}_{r.E}$ هر یک از حالت‌ها را در رابطه‌ی (۳-۸) بررسی می‌کنیم، همان‌طور که مشخص است در رابطه‌ی فوق گذار از تراز پایه به برانگیخته و تراز برانگیخته به پایه و همین‌طور فنا و بقا فوتونی را داریم. در اینجا فقط نحوه‌ی محاسبه‌ی ضرایب را با ذکر مثال از دو حالت بیان می‌شود و باقی حالات را هم به همین ترتیب محاسبه می‌کنیم:

اندازه ضرایب مربوط به $\hat{H}_{r.E}$: مثلاً در مورد دو حالت $|0, e_1, e_2\rangle$ و $|2, g_1, e_2\rangle$ ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

با توجه به رابطه‌ی (۳-۸) حالت $|0, e_1, e_2\rangle$ پس از اعمال هامیلتونی $\hat{H}_{r.E}$ بر روی حالت-های $|1, e_1, g_2\rangle$ و $|1, g_1, e_2\rangle$ به دست آمده است بنابراین:

$$\phi(0, e_1, e_2) = \gamma_{nij} g_{nijv} \sqrt{f_v} |1, g_1, e_2\rangle + \gamma_{nij}^* g_{nijv} \sqrt{f_v} |1, e_1, g_2\rangle = 0.04 \times 1 |1, g_1, e_2\rangle + 0.04 \times 1 |1, e_1, g_2\rangle$$

$|1, g_1, e_2\rangle$ مربوط به سطر ششم و $|1, e_1, g_2\rangle$ مربوط به سطر هفتم هستند که مقادیر متناظر در سطر

چهارم مربوط به حالت $|0, e_1, e_2\rangle$ به ترتیب به درایه‌های ۶ و ۷ اضافه می‌شوند.

و با توجه به رابطه‌ی (۳-۸) حالت $\phi(2, g_1, e_2)|2, g_1, e_2\rangle$ پس از اعمال هامیلتونی $\hat{H}_{r.E}$ بر روی حالت-
 های $\phi(1, g_1, g_2)|1, g_1, g_2\rangle$ و $\phi(1, e_1, e_2)|1, e_1, e_2\rangle$ و $\phi(3, e_1, e_2)|3, e_1, e_2\rangle$ و
 $\phi(3, g_1, g_2)|3, g_1, g_2\rangle$ به دست آمده است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \phi(2, g_1, e_2) = & \gamma_{nij} g_{nijv} \sqrt{f_v} |3, e_1, e_2\rangle + \gamma_{nij}^* g_{nijv} \sqrt{f_v} |3, g_1, g_2\rangle + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \sqrt{f_v + 1} |1, e_1, e_2\rangle + \\ & \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \sqrt{f_v + 1} \phi(1, g_1, g_2) |1, g_1, g_2\rangle = 0.04 \times \sqrt{3} |3, e_1, e_2\rangle + 0.04 \times \sqrt{3} |3, g_1, g_2\rangle + \\ & 0.04 \times \sqrt{2} |1, e_1, e_2\rangle + 0.04 \times \sqrt{2} |1, g_1, g_2\rangle = 0.0693 |3, e_1, e_2\rangle + 0.0693 |3, g_1, g_2\rangle + \\ & 0.0566 |1, e_1, e_2\rangle + 0.0566 |1, g_1, g_2\rangle \end{aligned}$$

که $|3, e_1, e_2\rangle$ مربوط به حالت شانزدهم، $|3, g_1, g_2\rangle$ مربوط به حالت سیزدهم، $|1, e_1, e_2\rangle$ مربوط به
 حالت هشتم و $|1, g_1, g_2\rangle$ مربوط به حالت پنجم می‌باشد که مقادیر متناظر در سطر دهم مربوط به
 حالت $|2, g_1, e_2\rangle$ به ترتیب به درایه‌های ۱۶، ۱۳، ۸ و ۵ اضافه می‌شوند. سایر مقادیر نیز به همین ترتیب
 محاسبه می‌شوند که به شرح زیر می‌باشند:

جدول ۳-۳. مقادیر ماتریس ضرایب هامیلتونی $\hat{H}_{r.E}$

$\hat{H}_{r.E} \varphi(t)\rangle$		حالت‌های مختلف جهت سادگی نشان دادن به صورت زیر نشان داده شده‌اند
$ 1\rangle$	$0.04 6\rangle + 0.04 7\rangle$	$ 1\rangle = 0, g_1, g_2\rangle$
$ 2\rangle$	$0.04 5\rangle + 0.04 8\rangle$	$ 2\rangle = 0, g_1, e_2\rangle$
$ 3\rangle$	$0.04 5\rangle + 0.04 8\rangle$	$ 3\rangle = 0, e_1, g_2\rangle$
$ 4\rangle$	$0.04 6\rangle + 0.04 7\rangle$	$ 4\rangle = 0, e_1, e_2\rangle$
$ 5\rangle$	$0.04 2\rangle + 0.04 3\rangle + 0.0566 10\rangle + 0.0566 11\rangle$	$ 5\rangle = 1, g_1, g_2\rangle$
$ 6\rangle$	$0.04 1\rangle + 0.04 4\rangle + 0.0566 9\rangle + 0.0566 12\rangle$	$ 6\rangle = 1, g_1, e_2\rangle$
$ 7\rangle$	$0.04 1\rangle + 0.04 4\rangle + 0.0566 9\rangle + 0.0566 12\rangle$	$ 7\rangle = 1, e_1, g_2\rangle$
$ 8\rangle$	$0.04 2\rangle + 0.04 3\rangle + 0.0566 10\rangle + 0.0566 11\rangle$	$ 8\rangle = 1, e_1, e_2\rangle$

9⟩	$0.0566 6\rangle + 0.0566 7\rangle + 0.0693 14\rangle + 0.0693 15\rangle$	$ 9\rangle = 2, g_1, g_2\rangle$
10⟩	$0.0566 5\rangle + 0.0566 8\rangle + 0.0693 13\rangle + 0.0693 16\rangle$	$ 10\rangle = 2, g_1, e_2\rangle$
11⟩	$0.0566 5\rangle + 0.0566 8\rangle + 0.0693 13\rangle + 0.0693 16\rangle$	$ 11\rangle = 2, e_1, g_2\rangle$
12⟩	$0.0566 6\rangle + 0.0566 7\rangle + 0.0693 14\rangle + 0.0693 15\rangle$	$ 12\rangle = 2, e_1, e_2\rangle$
13⟩	$0.0693 10\rangle + 0.0693 11\rangle + 0.0800 18\rangle + 0.0800 19\rangle$	$ 13\rangle = 3, g_1, g_2\rangle$
14⟩	$0.0693 9\rangle + 0.0693 12\rangle + 0.0800 17\rangle + 0.0800 20\rangle$	$ 14\rangle = 3, g_1, e_2\rangle$
15⟩	$0.0693 9\rangle + 0.0693 12\rangle + 0.0800 17\rangle + 0.0800 20\rangle$	$ 15\rangle = 3, e_1, g_2\rangle$
16⟩	$0.0693 10\rangle + 0.0693 11\rangle + 0.0800 18\rangle + 0.0800 19\rangle$	$ 16\rangle = 3, e_1, e_2\rangle$
17⟩	$0.0800 14\rangle + 0.0800 15\rangle + 0.0894 22\rangle + 0.0894 23\rangle$	$ 17\rangle = 4, g_1, g_2\rangle$
18⟩	$0.0800 13\rangle + 0.0800 16\rangle + 0.0894 21\rangle + 0.0894 24\rangle$	$ 18\rangle = 4, g_1, e_2\rangle$
19⟩	$0.0800 13\rangle + 0.0800 16\rangle + 0.0894 21\rangle + 0.0894 24\rangle$	$ 19\rangle = 4, e_1, g_2\rangle$
20⟩	$0.0800 14\rangle + 0.0800 15\rangle + 0.0894 22\rangle + 0.0894 23\rangle$	$ 20\rangle = 4, e_1, e_2\rangle$
21⟩	$0.0894 18\rangle + 0.0894 19\rangle + 0.0980 26\rangle + 0.0980 27\rangle$	$ 21\rangle = 5, g_1, g_2\rangle$
22⟩	$0.0894 17\rangle + 0.0894 20\rangle + 0.0980 25\rangle + 0.0980 28\rangle$	$ 22\rangle = 5, g_1, e_2\rangle$
23⟩	$0.0894 17\rangle + 0.0894 20\rangle + 0.0980 25\rangle + 0.0980 28\rangle$	$ 23\rangle = 5, e_1, g_2\rangle$
24⟩	$0.0894 18\rangle + 0.0894 19\rangle + 0.0980 26\rangle + 0.0980 27\rangle$	$ 24\rangle = 5, e_1, e_2\rangle$
25⟩	$0.0980 22\rangle + 0.0980 23\rangle + 0.1058 30\rangle + 0.1058 31\rangle$	$ 25\rangle = 6, g_1, g_2\rangle$
26⟩	$0.0980 21\rangle + 0.0980 24\rangle + 0.1058 29\rangle + 0.1058 32\rangle$	$ 26\rangle = 6, g_1, e_2\rangle$
27⟩	$0.0980 21\rangle + 0.0980 24\rangle + 0.1058 29\rangle + 0.1058 32\rangle$	$ 27\rangle = 6, e_1, g_2\rangle$
28⟩	$0.0980 22\rangle + 0.0980 23\rangle + 0.1058 30\rangle + 0.1058 31\rangle$	$ 28\rangle = 6, e_1, e_2\rangle$
29⟩	$0.1058 26\rangle + 0.1058 27\rangle + 0.1131 34\rangle + 0.1131 35\rangle$	$ 29\rangle = 7, g_1, g_2\rangle$
30⟩	$0.1058 25\rangle + 0.1058 28\rangle + 0.1131 33\rangle + 0.1131 36\rangle$	$ 30\rangle = 7, g_1, e_2\rangle$
31⟩	$0.1058 25\rangle + 0.1058 28\rangle + 0.1131 33\rangle + 0.1131 36\rangle$	$ 31\rangle = 7, e_1, g_2\rangle$
32⟩	$0.1058 26\rangle + 0.1058 27\rangle + 0.1131 34\rangle + 0.1131 35\rangle$	$ 32\rangle = 7, e_1, e_2\rangle$
33⟩	$0.1131 30\rangle + 0.1131 31\rangle$	$ 33\rangle = 8, g_1, g_2\rangle$
34⟩	$0.1131 29\rangle + 0.1131 32\rangle$	$ 34\rangle = 8, g_1, e_2\rangle$
35⟩	$0.1131 29\rangle + 0.1131 32\rangle$	$ 35\rangle = 8, e_1, g_2\rangle$
36⟩	$0.1131 30\rangle + 0.1131 31\rangle$	$ 36\rangle = 8, e_1, e_2\rangle$

در آخرین قسمت جهت محاسبه‌ی ضرایب هامیلتونی $\hat{H}_{r,r}$ هر یک از حالت‌های جدول ۳-۱ را در

رابطه‌ی (۹-۳) بررسی می‌کنیم. همان‌طور که مشخص است در رابطه‌ی فوق گذار از تراز پایه به برانگیخته و تراز برانگیخته به پایه را به طور هم‌زمان داریم که نحوه‌ی محاسبه‌ی ضرایب با ذکر مثال از دو حالت بیان می‌شود و باقی حالات را هم به همین ترتیب محاسبه می‌کنیم.

اندازه‌ی ضرایب مربوط به $\hat{H}_{r,r}$: مثلاً در مورد دو حالت $\phi(0, e_1, e_2)|0, e_1, e_2\rangle$ و $\phi(2, g_1, e_2)|2, g_1, e_2\rangle$ ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

با توجه به رابطه‌ی (۹-۳) حالت $\phi(0, e_1, e_2)|0, e_1, e_2\rangle$ پس از اعمال هامیلتونی $\hat{H}_{r,r}$ بر روی حالت $\phi(0, g_1, g_2)|0, g_1, g_2\rangle$ به دست آمده است. بنابراین:

$$\phi(0, e_1, e_2) = \eta_{nij}\eta_{mij}|0, g_1, g_2\rangle = 10 \times 10|0, g_1, g_2\rangle = 100|0, g_1, g_2\rangle$$

که $|0, g_1, g_2\rangle$ مربوط به حالت اول می‌باشد که مقدار متناظر در سطر چهارم مربوط به حالت $|0, e_1, e_2\rangle$ به درایه‌ی ۱، اضافه می‌شود.

و با توجه به رابطه‌ی (۹-۳) حالت $\phi(2, g_1, e_2)|2, g_1, e_2\rangle$ پس از اعمال هامیلتونی $\hat{H}_{r,r}$ بر روی حالت‌های $\phi(2, e_1, g_2)|2, e_1, g_2\rangle$ به دست آمده است بنابراین:

$$\phi(2, g_1, e_2) = \eta_{nij}^*\eta_{mij}|2, e_1, g_2\rangle = 10 \times 10|2, e_1, g_2\rangle = 100|2, e_1, g_2\rangle$$

که $|0, e_1, g_2\rangle$ مربوط به حالت یازدهم می‌باشد که مقدار متناظر در سطر دهم مربوط به حالت $|2, g_1, e_2\rangle$ به درایه‌ی ۱۱، اضافه می‌شود.

سایر مقادیر نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند که به شرح زیر می‌باشند.

جدول ۳-۴. مقادیر ماتریس ضرایب هامیلتونی $\hat{H}_{r,r}$

$\hat{H}_0 \varphi(t)\rangle$		حالت های مختلف جهت سادگی نشان دادن به صورت زیر نشان داده شده اند
$ 1\rangle$	$100 4\rangle$	$ 1\rangle = 0, g_1, g_2\rangle$
$ 2\rangle$	$100 3\rangle$	$ 2\rangle = 0, g_1, e_2\rangle$
$ 3\rangle$	$100 2\rangle$	$ 3\rangle = 0, e_1, g_2\rangle$
$ 4\rangle$	$100 1\rangle$	$ 4\rangle = 0, e_1, e_2\rangle$

$ 5\rangle$	$100 8\rangle$	$ 5\rangle = 1, g_1, g_2\rangle$
$ 6\rangle$	$100 7\rangle$	$ 6\rangle = 1, g_1, e_2\rangle$
$ 7\rangle$	$100 6\rangle$	$ 7\rangle = 1, e_1, g_2\rangle$
$ 8\rangle$	$100 5\rangle$	$ 8\rangle = 1, e_1, e_2\rangle$
$ 9\rangle$	$100 12\rangle$	$ 9\rangle = 2, g_1, g_2\rangle$
$ 10\rangle$	$100 11\rangle$	$ 10\rangle = 2, g_1, e_2\rangle$
$ 11\rangle$	$100 10\rangle$	$ 11\rangle = 2, e_1, g_2\rangle$
$ 12\rangle$	$100 9\rangle$	$ 12\rangle = 2, e_1, e_2\rangle$
$ 13\rangle$	$100 16\rangle$	$ 13\rangle = 3, g_1, g_2\rangle$
$ 14\rangle$	$100 15\rangle$	$ 14\rangle = 3, g_1, e_2\rangle$
$ 15\rangle$	$100 14\rangle$	$ 15\rangle = 3, e_1, g_2\rangle$
$ 16\rangle$	$100 13\rangle$	$ 16\rangle = 3, e_1, e_2\rangle$
$ 17\rangle$	$100 20\rangle$	$ 17\rangle = 4, g_1, g_2\rangle$
$ 18\rangle$	$100 19\rangle$	$ 18\rangle = 4, g_1, e_2\rangle$
$ 19\rangle$	$100 18\rangle$	$ 19\rangle = 4, e_1, g_2\rangle$
$ 20\rangle$	$100 17\rangle$	$ 20\rangle = 4, e_1, e_2\rangle$
$ 21\rangle$	$100 24\rangle$	$ 21\rangle = 5, g_1, g_2\rangle$
$ 22\rangle$	$100 23\rangle$	$ 22\rangle = 5, g_1, e_2\rangle$
$ 23\rangle$	$100 22\rangle$	$ 23\rangle = 5, e_1, g_2\rangle$
$ 24\rangle$	$100 21\rangle$	$ 24\rangle = 5, e_1, e_2\rangle$
$ 25\rangle$	$100 28\rangle$	$ 25\rangle = 6, g_1, g_2\rangle$
$ 26\rangle$	$100 27\rangle$	$ 26\rangle = 6, g_1, e_2\rangle$
$ 27\rangle$	$100 26\rangle$	$ 27\rangle = 6, e_1, g_2\rangle$
$ 28\rangle$	$100 25\rangle$	$ 28\rangle = 6, e_1, e_2\rangle$
$ 29\rangle$	$100 32\rangle$	$ 29\rangle = 7, g_1, g_2\rangle$
$ 30\rangle$	$100 31\rangle$	$ 30\rangle = 7, g_1, e_2\rangle$
$ 31\rangle$	$100 30\rangle$	$ 31\rangle = 7, e_1, g_2\rangle$
$ 32\rangle$	$100 29\rangle$	$ 32\rangle = 7, e_1, e_2\rangle$
$ 33\rangle$	$100 36\rangle$	$ 33\rangle = 8, g_1, g_2\rangle$
$ 34\rangle$	$100 35\rangle$	$ 34\rangle = 8, g_1, e_2\rangle$
$ 35\rangle$	$100 34\rangle$	$ 35\rangle = 8, e_1, g_2\rangle$
$ 36\rangle$	$100 33\rangle$	$ 36\rangle = 8, e_1, e_2\rangle$

اکنون با توجه به جداول بالا ماتریس ضرایب تک تک هامیلتونی ها را نوشته و با یکدیگر جمع می کنیم و در $-i$ ضرب می کنیم، ماتریس حاصل، ماتریس ضرایب $[M]$ خواهد شد. به دلیل بزرگ شدن ماتریس $[M]_{32 \times 32}$ از نوشتن ماتریس در این قسمت خودداری می کنیم.

با توجه به رابطه ی (۵-۲) حالت سیستم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\{\Phi(t)\} = e^{[M]t} \{\Phi(0)\} \quad (۱۲-۳)$$

برای حل رابطه ی بالا ماتریس $[M]$ را با کمک دو ماتریس $[R]$, $[R]^{-1}$ که از کنار هم قراردادن بردارهای ویژه ی ماتریس $[M]$ به عنوان ستون های آن به دست می آیند، قطری می کنیم:

$$\begin{aligned} [R]^{-1}[M][R] &= [D] = [d_i \sigma_{ij}] \\ \Rightarrow \{\Phi(t)\} &= e^{[M]t} \{\Phi(0)\} = [R]e^{[D]t}[R]^{-1} \{\Phi(0)\} \\ &= [R][e^{(d_i t)} \sigma_{ij}][R]^{-1} \{\Phi(0)\} \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

قبل از ادامه ی حل نیاز است که ماتریس شرایط اولیه ی $\Phi(0)$ را نیز محاسبه کنیم. شرایط اولیه را به صورت حالت هم دوس و به صورت رابطه ی زیر در نظر می گیریم:

$$|\phi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} |n\rangle \quad \left| \text{انرژی ترازهای مختلف حالات} \right| \quad (۱۴-۳)$$

به دلیل محدود بودن تعداد فوتون ها به منظور اطمینان از بهنجارش حالات مد کاواک رابطه ی فوق به صورت زیر اصلاح می شود:

$$\begin{aligned} |\phi(t_0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^8 \left| \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \right|^2}} \sum_{n=0}^8 |n\rangle \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \times (|g1, g2\rangle, |g1, e2\rangle, |e1, g1\rangle, |e1, e2\rangle) \\ |\phi(t_0)\rangle &= \\ &= (0.223555655263569|0\rangle + 0.387209753235853|1\rangle + 0.474233159428414|2\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0.474233159428414|3\rangle + 0.410697963381963|4\rangle + 0.318125274499929|5\rangle + \\ &0.224948538865732|6\rangle + 0.147263386688847|7\rangle + 0.0901800387954610|8\rangle) \\ &\times (|g1, g2\rangle, |g1, e2\rangle, |e1, g1\rangle, |e1, e2\rangle) \end{aligned}$$

اکنون حالات سیستم $\langle \phi(t) |$ را با استفاده از رابطه (۲-۷) در بازه‌ی زمانی مورد دل‌خواه با تغییرات زمانی مورد نیاز (هر چه تغییرات زمانی کوچک‌تر باشد جواب دقیق‌تر به دست می‌آید)، با استفاده از نرم افزار MATLAB به دست می‌آوریم.

برای محاسبه‌ی دستی مقادیر مورد نیاز، از روابط به دست آمده در بخش الگوریتم و ریاضی استفاده می‌کنیم.

احتمال حضور سیستم در حالتی که نقطه‌ی کوانتومی خاصی در تراز انرژی خاصی قرار بگیرد، عبارت است از:

$$P = \sum_{A-\{r_l\}=1}^{B_n} \sum_{f_1 f_2 \dots f_v=0}^N |\phi(r_1, r_2, \dots, r_{l \rightarrow k}, r_n, f_1, \dots, f_v)|^2 \quad (1\delta-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۵) این احتمال برای سیستم مورد تحلیل به صورت زیر خواهد بود:

به عنوان مثال احتمال حضور سیستم در حالتی که نقطه‌ی کوانتومی اول در تراز انرژی اول قرار دارد، در زیر آمده است:

$$P = \sum_{A-\{r_1\}=1}^2 \sum_{f_1=0}^8 |\phi(r_{1 \rightarrow 1}, r_2, f_1)|^2 \quad (19-3)$$

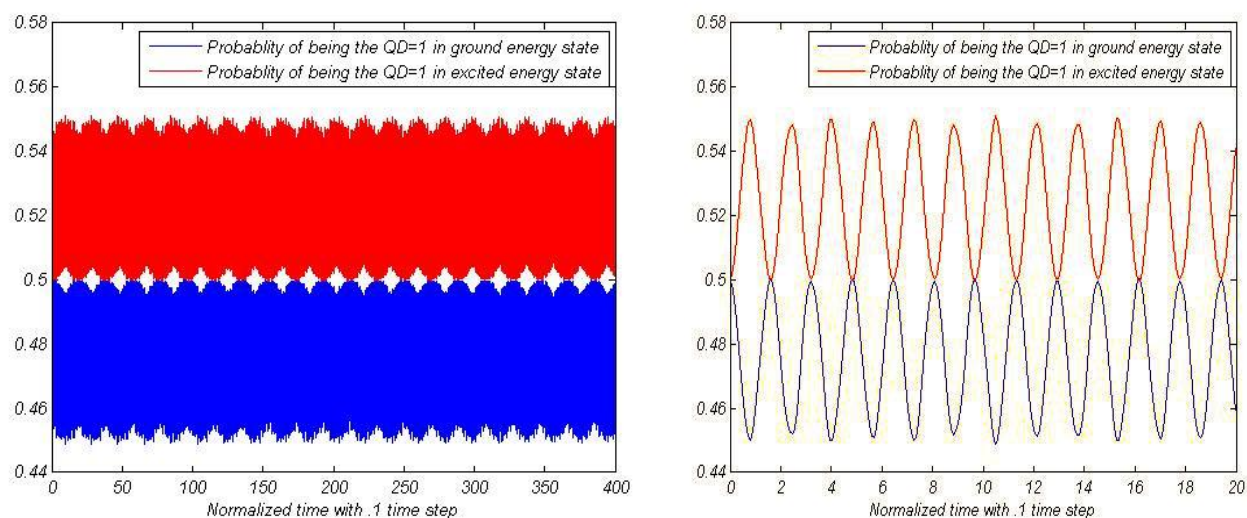
بنابر رابطه‌ی (۳-۱۶) (حالت‌های سیستم) P ، برابر خواهد شد با توان دوم اندازه سطرهای ۱ و ۲ و ۵ و ۶ و ... و $(4 + n \times 1)$ و $(4 + n \times 2)$ و $n:1:8$. در مورد محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم در حالت-های دیگر هم به همین طریق عمل می‌کنیم.

$$P = \sum_{n=1}^8 |\text{coeff}(4n+1, :)|^2 + \sum_{n=1}^8 |\text{coeff}(4n+2, :)|^2$$

منظور از $\text{coeff}(m, :)$ سطر m ام ماتریس ضرایب کت حالت سیستم است.

با استفاده از نرم افزار MATLAB این محاسبات انجام شد که نمودارهای حاصل به صورت زیر می-

باشد:



شکل (۱-۳) محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم در نقطه‌ی کوانتومی ۱ در ترازهای پایه و برانگیخته

در این قسمت دو پارامتر دیگر که جهت تحلیل سیستم‌های پیچیده کوانتومی کاربرد دارند از طریق

دستی رسم شده‌اند. این پارامترها عبارتند از چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی و چشم‌داشتی عمل گر گذار

اتمی.

محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل گر نابودی فوتونی در کلی‌ترین حالت از طریق رابطه‌ی زیر محاسبه می-

شود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m}^N f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m = 0$$

$$\sqrt{f_v} \phi^*(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v - 1, \dots, f_m) \phi(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m) \quad (17-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۷-۳) چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2=1}^2 \sum_{f_1=1}^8 f_1 = 0 \sqrt{f_v} \phi^*(r_1, r_2, f_1 - 1) \phi(r_1, r_2, f_1) \quad (18-3)$$

بنا به رابطه‌ی (۳-۱۸) مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در ماتریس ضرایب کت حالت سیستم به دست آمده از طریق دستی برابر خواهد بود با :

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_1 = \sum_{n=1}^8 \sqrt{n} (\text{coeff}(4n, :))^* \times \text{coeff}(4n + 4, :)$$

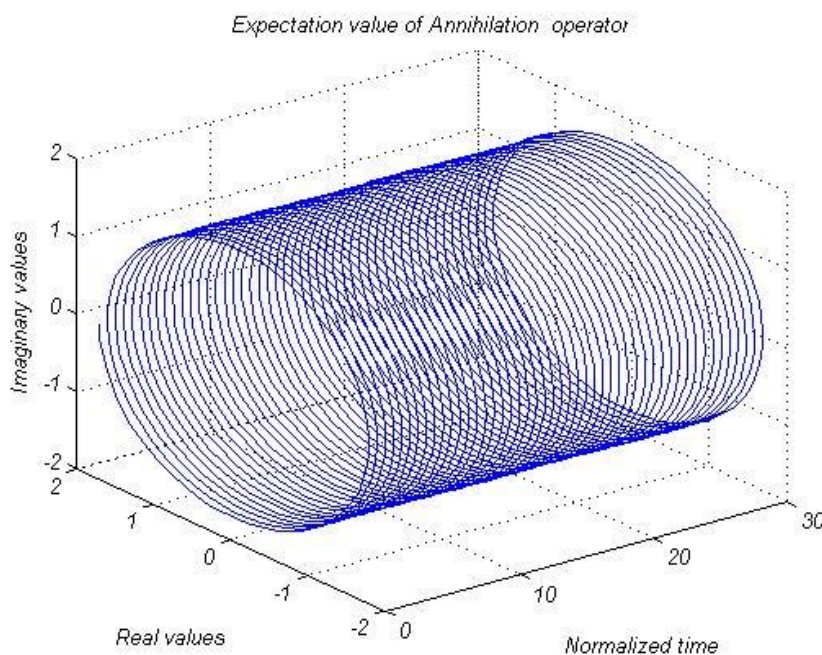
$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_2 = \sum_{n=1}^8 \sqrt{n} (\text{coeff}(4n - 1, :))^* \times \text{coeff}(4n + 3, :)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_3 = \sum_{n=1}^8 \sqrt{n} (\text{coeff}(4n - 3, :))^* \times \text{coeff}(4n + 1, :)$$

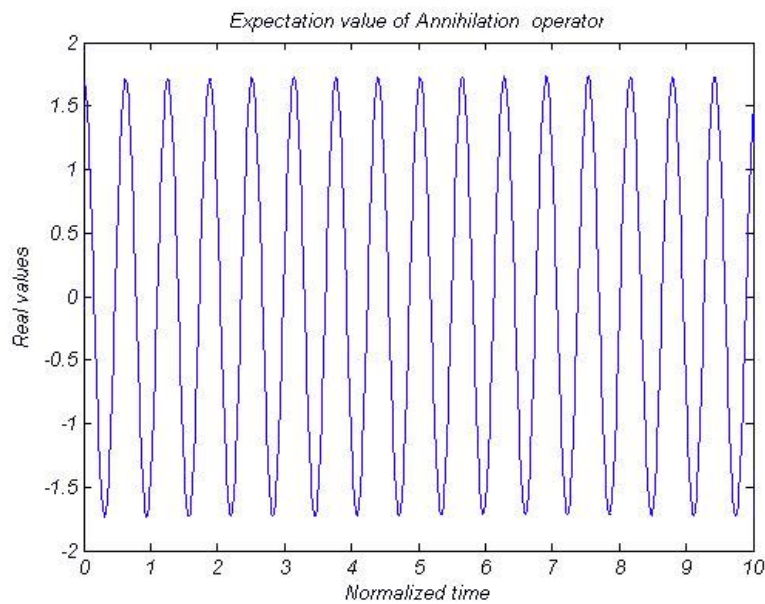
$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_4 = \sum_{n=1}^8 \sqrt{n} (\text{coeff}(4n - 2, :))^* \times \text{coeff}(4n + 2, :)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_1 + \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_2 + \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_3 + \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle_4$$

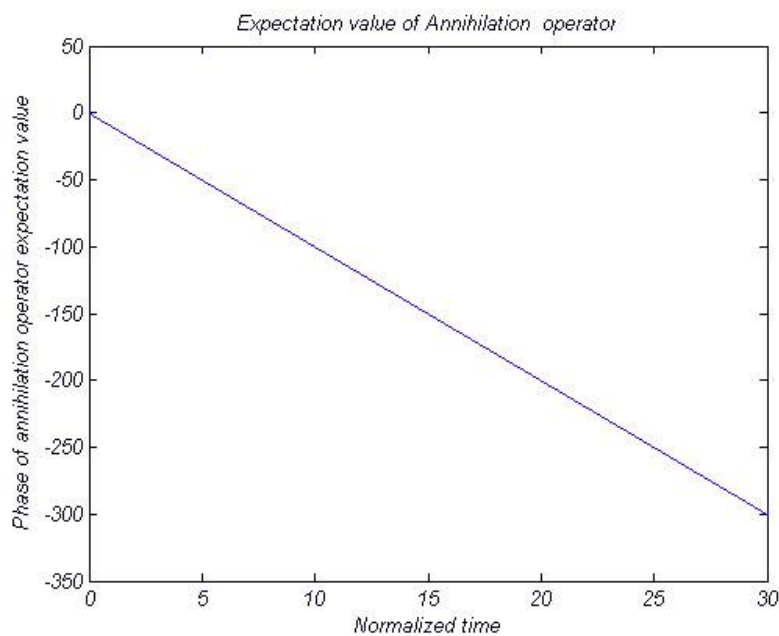
نمودار حاصل که نشان‌دهنده مقادیر حقیقی و موهومی بر حسب زمان بهنجارش شده می‌باشد رسم شده است. با توجه به این که مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی به صورت مختلط می‌باشد جهت بررسی و تحلیل بهتر این مقدار، نمودار مقادیر حقیقی و فاز چشم‌داشتی این عمل‌گر هم جداگانه در زمان‌های متفاوت رسم شده است.



شکل (۳-۲) مقادیر موهومی و حقیقی چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی بر حسب زمان



شکل (۳-۳) مقادیر حقیقی چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی در طول زمان‌های متفاوت



شکل (۴-۳) فاز مقدار چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی

محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل گر گذار اتمی در کلی‌ترین حالت از طریق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود .

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle = \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m}^N \phi^*(r_1, r_2, r_l \rightarrow s, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m) \times \phi(r_1, r_2, \dots, r_l \rightarrow k, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m) \quad (19-3)$$

به عنوان مثال با توجه به (۳-۱۹) فوق چشم‌داشتی عمل گر گذار اتمی $\hat{\sigma}_{g,e}^2$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle = \sum_{A-\{r_2\}=1}^2 \sum_{f_1}^8 = 0 \phi^*(r_1, r_2 \rightarrow g, f_1) \phi(r_1, r_2 \rightarrow e, f_1) \quad (۳-۲۰)$$

بنا به رابطه‌ی (۳-۲۰) مقدار چشم‌داشتی عمل گر فنا فوتونی از طریق دستی برابر خواهد بود با :

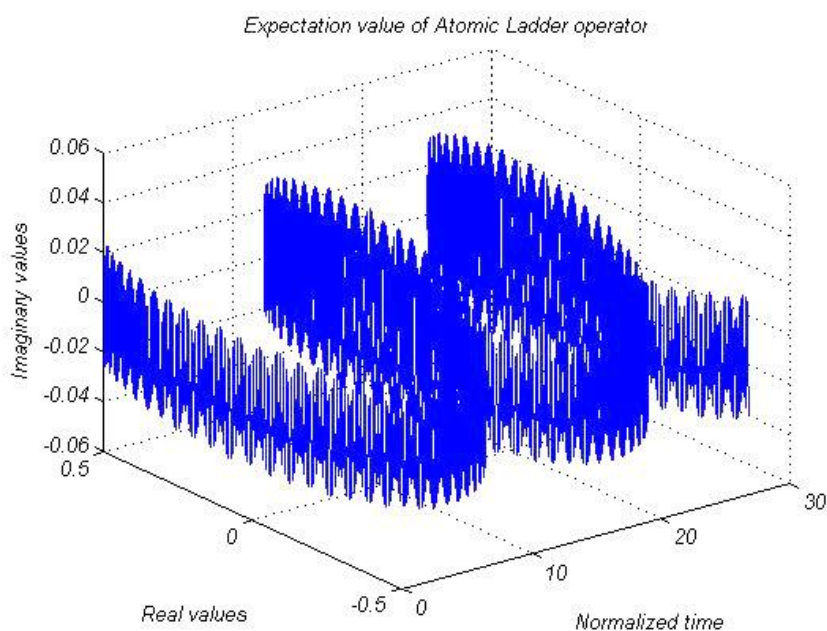
$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle_1 = \sum_{n=1}^8 \sqrt{n} (\text{coeff}(4n-3, :))^* \times \text{coeff}(4n-1, :)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle_2 = \sum_{n=1}^8 \sqrt{n} (\text{coeff}(4n-2, :))^* \times \text{coeff}(4n, :)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle_1 + \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle_2$$

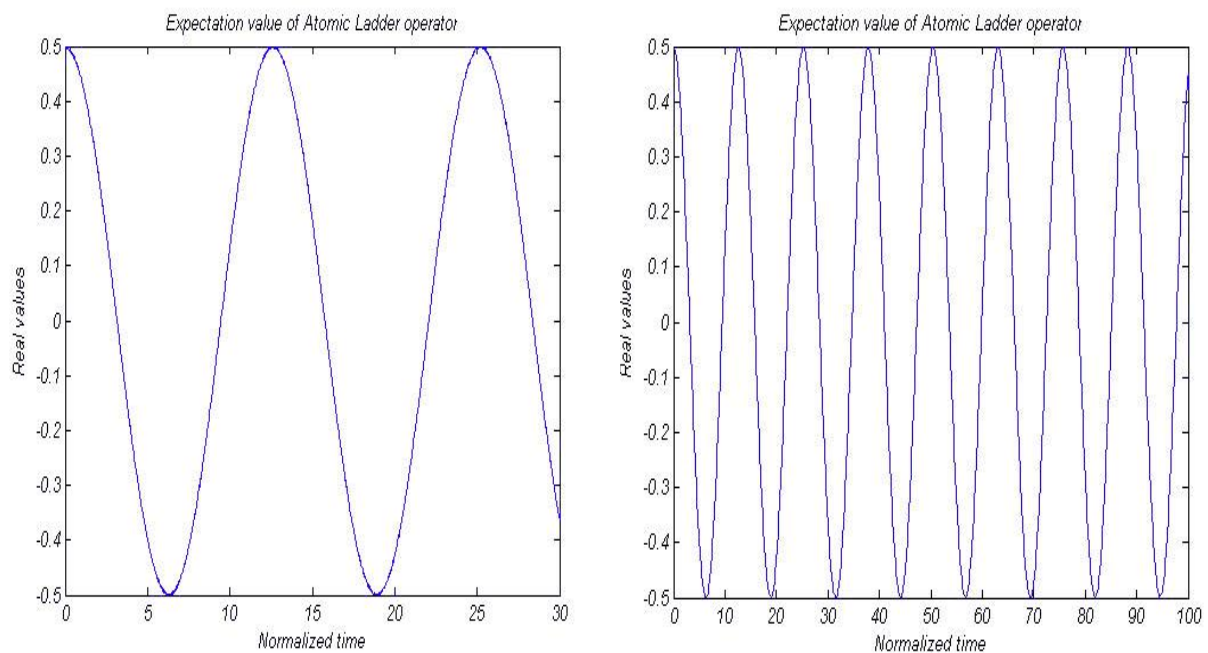
نمودار حاصل که نشان‌دهنده مقادیر حقیقی و موهومی چشم‌داشتی عمل گر گذار اتمی بر حسب زمان

به‌نچارشده و مربوط به سیستم مذکور می‌باشد، رسم شده است:

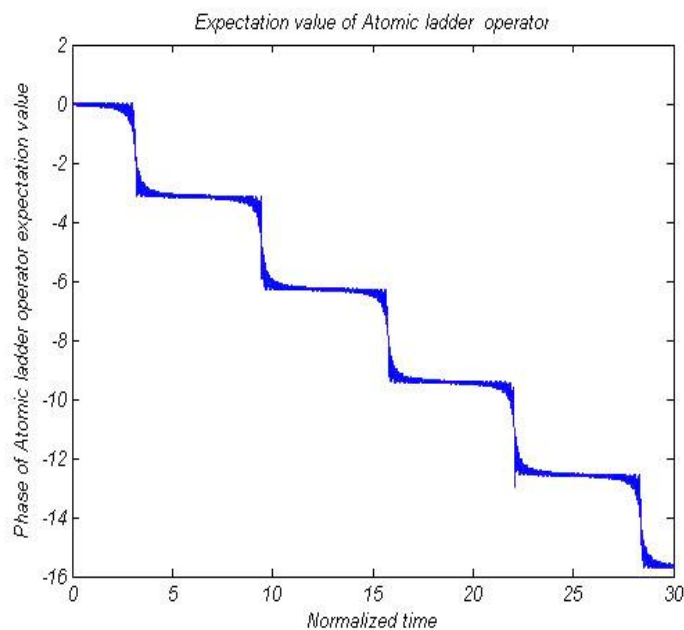


شکل (۳-۵) مقادیر موهومی و حقیقی چشم‌داشتی عمل گر گذار اتمی بر حسب زمان

نمودارهای مربوط به قسمت‌های حقیقی و فاز بر حسب زمان در شکل‌های صفحه بعد رسم شده است.



شکل (۳-۶) مقادیر حقیقی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در طول زمان‌های متفاوت



شکل (۳-۷) فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار فوتونی

۳-۱-۲- محاسبه از طریق نرم‌افزارهای نوشته شده

ابتدا با استفاده از نرم‌افزار تولید شرایط اولیه، حالات اولیه سیستم را به دست آوردیم و با وارد کردن مقادیر ورودی در مرحله‌ی اول ماتریس ضرایب کت حالت سیستم تعیین شد که کاملاً منطبق بر ماتریس

به دست آمده از روش دستی و حالت به حالت بود.

در مرحله‌ی بعد با استفاده از برنامه‌های نوشته شده احتمال حضور سیستم در حالت قرارگیری نقطه‌ی کوانتومی خاصی در تراز انرژی خاصی و مقادیر مختلف چشم‌داشتی عمل‌گرهای مورد نظر رسم شدند که کاملاً منطبق بر نمودارهای به‌دست آمده بودند.

در بخش‌های بعدی ابتدا یک سیستم واقعی مبتنی بر یک چاه کوانتومی سه ترازه، و سپس چند سیستم با تعداد نقاط کوانتومی بالا تحلیل خواهند شد.

۳-۲- تحلیل الکترودینامیک کوانتومی یک سیستم سه ترازه‌ی واقعی.

۳-۲-۱- مقدمه

اجزای تشکیل‌دهنده یک سیستم الکترودینامیک کوانتومی عبارتند از سیستم کوانتومی و مد کاواک که با یکدیگر دارای برهم‌کنش هستند. این سیستم کوانتومی شامل نقطه‌ی کوانتومی یا چاه کوانتومی می‌شود.

در پایان نامه‌ی [۷۴] یک چاه پتانسیل کوانتومی معرفی شده است و در آن نشان داده شده است که بهترین توصیف برای این چاه پتانسیل یک سیستم کوانتومی سه ترازه است. ضمناً در این پایان‌نامه مقادیر ترازهای انرژی و ممان‌های دوقطبی الکترون و حفره‌ها محاسبه شده‌اند. در این بخش قصد داریم این سیستم کوانتومی را به عنوان اجزای تشکیل‌دهنده‌ی سیستم الکترودینامیک کوانتومی در نظر گرفته و مورد بررسی قرار دهیم. بدین منظور مراحل زیر انجام خواهد شد:

۱. مشخصات سیستم مورد نظر تعیین خواهند شد و هامیلتونی مربوط به سیستم تعیین می‌شود.
۲. به منظور محاسبه‌ی ضرایب کت حالت سیستم، معادله‌ی شرودینگر با استفاده از نرم‌افزار نوشته شده حل خواهد شد و ضرایب کت حالت سیستم محاسبه می‌شوند.
۳. احتمال حضور سیستم در حالتی که سیستم کوانتومی در تراز خاصی باشد و تعداد دقیقی

فوتون در مد کاواک قرار گیرد (شرایط اولیه‌ی فوک) و در حالتی که حالات اولیه‌ی مد کاواک از حالات هم‌دوسی پیروی کند (شرایط اولیه‌ی هم‌دوسی) محاسبه خواهد شد. هم‌چنین چشم-داشتی عمل‌گر فنا و چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی محاسبه می‌گردند و نمودار مقادیر به دست‌آمده بر حسب زمان رسم خواهند شد.

۴. به منظور بررسی معیارهای درهم‌تنیدگی سیستم، چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی و دوگان هرمیتی آن و پارامتر هم‌نوایی در مرحله‌ی بعد محاسبه و بر حسب زمان رسم خواهند شد.

۵. مراحل ۲ تا ۵، با ثابت‌های تزویج متفاوت که ناشی از درهم‌کنش با سیستم کوانتومی با میدان-های الکتریکی اعمالی متفاوت است، تکرار می‌شوند و پاسخ‌های به‌دست آمده مقایسه می‌گردند.

۳-۲-۲- مشخصات سیستم الکترو دینامیک مذکور:

در مرجع [۷۴] $\text{In}_{0.52}(\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x})\text{As} / \text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As} / \text{In}_{0.52}(\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x})_{0.48}\text{As}$ ساختار چاه پتانسیل ارائه شده می‌باشد.

هم‌چنین فرض وجود یک نوار برای الکترون‌ها در نوار هدایت و وجود دو نوار برای حفره‌های سنگین و سبک در نوار ظرفیت، به عنوان تقریبی قابل قبول برای ساختار نوار چاه پتانسیل کوانتومی به کار رفته است.

در مرحله بعد نشان داده شده است که در طراحی این چاه پتانسیل با انتخاب $x=0.9$ (درصد Al در AlGaAs) و $Z_0=9\text{nm}$ (عرض چاه) مقدار انرژی گذار الکترون-حفره سنگین 799meV به دست آمده است و تفاوت انرژی مابین حفره‌های سنگین و سبک حدود 30meV به دست آمده است. با توجه به نتایج به دست آمده و مدل سیستم کوانتومی سه‌ترازه، ترازهای انرژی این مدل را به ترتیب 829,30,0 meV در نظر می‌گیریم.

در این قسمت بسامد رابی محاسبه می‌شود، بسامد رابی شدت تزویج یا درهم‌کنش مابین میدان

الکتریکی با سیستم کوانتومی سه ترازه است.

در این سیستم بسامد رابی عبارتست از:

$$\begin{aligned} G_h &= \frac{1}{\hbar} (E_0 \hat{E}) \cdot \langle \psi_e | e\mathcal{R} | \varphi_{hh} \rangle \\ G_l &= \frac{1}{\hbar} (E_0 \hat{E}) \cdot \langle \psi_e | e\mathcal{R} | \varphi_{lh} \rangle \end{aligned} \quad (21-3)$$

در پایان نامه‌ی [۷۴] مقادیر زیر برای ممان‌های دوقطبی محاسبه شده است و با اعمال میدان الکتریکی بسامد رابی مربوط به هر گذار مشخص می‌شود.

$$\langle \psi_e | e\mathcal{R} | \varphi_{hh} \rangle = 26.15 \text{ Debye} = 26.15 \times 0.20822678 \times 10^{-10} \text{ em} = 5.4451 \times 10^{-10} \text{ em}$$

$$\langle \psi_e | e\mathcal{R} | \varphi_{lh} \rangle = 15.21 \text{ Debye} = 15.21 \times 0.20822678 \times 10^{-10} \text{ em} = 3.1671 \times 10^{-10} \text{ em}$$

$$\omega_\lambda = \frac{0.799}{\hbar} \text{ eV} = 1.2126 \times 10^{15} \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

جدول ۳-۵. مقادیر بسامد رابی

E_0	$G_h (\frac{\text{Rad}}{\text{s}})$	$G_l (\frac{\text{Rad}}{\text{s}})$	$\frac{G_h}{\omega_\lambda}$	$\frac{G_l}{\omega_\lambda}$
$100 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$	8.2640×10^{12}	4.8067×10^{12}	0.0068	0.0040
$1 \frac{\text{MV}}{\text{cm}}$	8.2640×13	4.8067×10^{13}	0.0681	0.0396
$10 \frac{\text{MV}}{\text{cm}}$	8.2640×10^{14}	4.8067×10^{14}	0.6815	0.3964

با توجه به جدول ۳-۵ و به دلیل این که فرض شده سیستم کوانتومی دارای برهم‌کنش با فوتون‌های با طول موج $\lambda = 1.55 \mu$ می‌باشد، پس بسامد گذار و بسامد موج الکترومغناطیس (ω_0) تقریباً برابر خواهد بود. بنابراین در حالتی که $G_h = 0.0068\omega_h$ و $G_l = 0.004\omega_l$ است تزویج از نوع ضعیف بوده، و در حالت $G_h = 0.0681\omega_h$ و $G_l = 0.0396\omega_l$ تزویج از نوع قوی، در حالت $G_h = 0.3964\omega_l$ و $G_l = 0.6815\omega_h$ تزویج از نوع بسیار قوی در نظر گرفته می‌شود.

هامیلتونی وکت حالت سیستم را به شکل رابطه زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)\rangle &= \sum_{A_1=lh, hh, e} \sum_{f=1}^8 \phi(A_1, f) |A_1\rangle |f\rangle \\
 \mathbb{H} &= \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_{r,r} + \mathbb{H}_{r,e} \\
 \mathbb{H}_0 &= \sum_{1,i} E_i^1 \hat{\sigma}_i^1 + \hbar \Omega a^\dagger a = E_{lh}^1 \hat{\sigma}_{lh}^1 + E_{hh}^1 \hat{\sigma}_{hh}^1 + E_e^1 \hat{\sigma}_e^1 + \hbar \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \\
 \mathbb{H}_{r,e} &= \sum_{1,i < j} (\gamma_{1ij} \hat{\sigma}_{i,j}^1 + \gamma_{1ij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^1) (g_{1ij} \hat{a} + g_{1ij}^* \hat{a}^\dagger) = \gamma_{1lh,e} g_{1lh,e} \hat{\sigma}_{lh,e}^1 \hat{a} + \\
 &\gamma_{1lh,e} g_{1lh,e}^* \hat{\sigma}_{lh,e}^1 \hat{a}^\dagger + \gamma_{1lh,e}^* g_{1lh,e} \hat{\sigma}_{e,lh}^1 \hat{a} + \gamma_{1lh,e} g_{1lh,e}^* \hat{\sigma}_{e,lh}^1 \hat{a}^\dagger + \\
 &\gamma_{1hh,e} g_{1hh,e} \hat{\sigma}_{hh,e}^1 \hat{a} + \gamma_{1hh,e} g_{1hh,e}^* \hat{\sigma}_{hh,e}^1 \hat{a}^\dagger + \gamma_{1hh,e}^* g_{1hh,e} \hat{\sigma}_{e,hh}^1 \hat{a} + \\
 &\gamma_{1hh,e} g_{1hh,e}^* \hat{\sigma}_{e,hh}^1 \hat{a}^\dagger \\
 \mathbb{H}_{r,r} &= 0
 \end{aligned} \tag{۲۲-۳}$$

هامیلتونی $\mathbb{H}_{r,r}$ صفر است زیرا تنها یک سیستم کوانتومی سه ترازه داریم و این هامیلتونی بیان گر

برهم کنش بین دو، دوقطبی است که در اینجا به وجود نمی آید.

شرایط اولیه ی هم دوس در سیستم مذکور با استفاده از رابطه ی زیر بیان می شود.

$$|\phi(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^8 \left| \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \right|^2}} \sum_{n=0}^8 \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} |n\rangle \times (|lh\rangle, |hh\rangle, |e\rangle) \tag{۲۳-۳}$$

با استفاده از برنامه ی تولید شرایط اولیه، شرایط اولیه ی این سیستم را ایجاد می کنیم. در این مرحله با

توجه به مشخصات به دست آمده و G_l و G_h که در واقع بیان کننده ی رژیم تزویج ضعیف، قوی و بسیار

قوی هستند، ضرایب کت حالت سیستم و پارامترهای مورد نیاز را در اعمال میدان الکتریکی متفاوت

محاسبه و تحلیل می کنیم. در هر مورد، محاسبات هر سه رژیم تزویج، به دلیل ضرورت مقایسه، در کنار

هم آورده می شود.

۳-۲-۳- تحلیل و محاسبات احتمال سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه فوک

در این قسمت با محاسبه‌ی احتمال سیستم در حالت شرایط اولیه به صورت فوک در نظر داریم تا ابتدا تاثیر افزایش ضریب تزویج در احتمال حضور سیستم متغیر با زمان را بررسی کنیم، و در مرحله‌ی بعد اثر این افزایش و تغییر از رژیم تزویجی به رژیم تزویج دیگر را در عدم استفاده از تقریب موج چرخنده در یک سیستم کوانتومی سه‌ترازه مطالعه نماییم.

در روش حل ضرایب کت حالت سیستم استفاده شده همان طور که در بخش قبل توضیح داده و به صورت دستی هم حل شد، معادله‌ی شرودینگر در در حالی که کت حالات تابعی از زمان هستند حل می‌شود، و تاثیر جمله‌ی $\hat{\sigma}_{j,i}^l \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}_{i,j}^{l\dagger} \hat{a}^\dagger$ نادیده گرفته نمی‌شود.

با توجه به رابطه‌ی (۳-۳) جمله‌ی $\hat{\sigma}_{j,i}^l \hat{a}^\dagger$ موجب افزایش تعداد فوتون‌ها و گذار سیستم کوانتومی به یک تراز انرژی بالاتر می‌شود، ابتدا در بررسی تاثیر جمله‌ی مذکور در حالتی که گذار از تراز انرژی اول $|lh\rangle$ به تراز انرژی $|e\rangle$ رخ می‌دهد، حالتی را در نظر می‌گیریم که تحت تاثیر این جمله از هامیلتونی به حالتی دیگر تبدیل شود، و در حالت شرایط اولیه حالت اولیه در نظر گرفته شده را مقدار یک در نظر گرفته و بقیه حالات را صفر می‌گیریم. در نهایت احتمال حالت به دست آمده را بررسی می‌کنیم.

در اینجا حالت $|1, lh\rangle$ را در نظر می‌گیریم، با توجه به رابطه (۳-۳) در قسمت تاثیر جمله‌ی $\hat{\sigma}_{j,i} \hat{a}^\dagger$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \hat{H}_{r,E} |\varphi(t)\rangle = \gamma^*_{nij} g^*_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v^\dagger \sum_{A,F} \phi(A, F) |A\rangle |F\rangle =$$

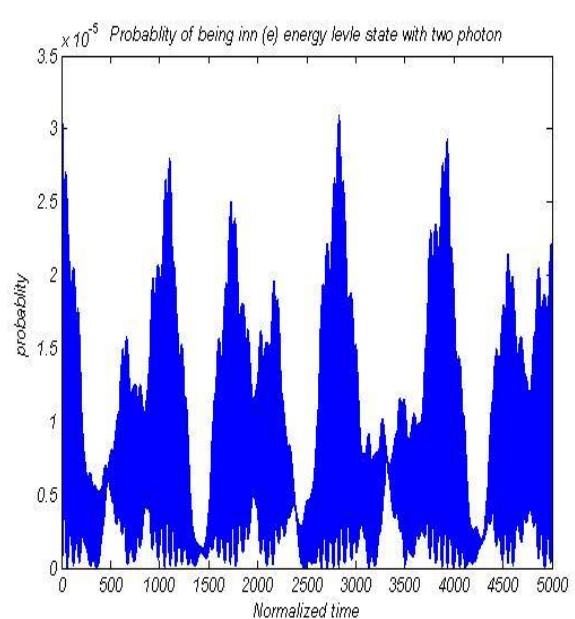
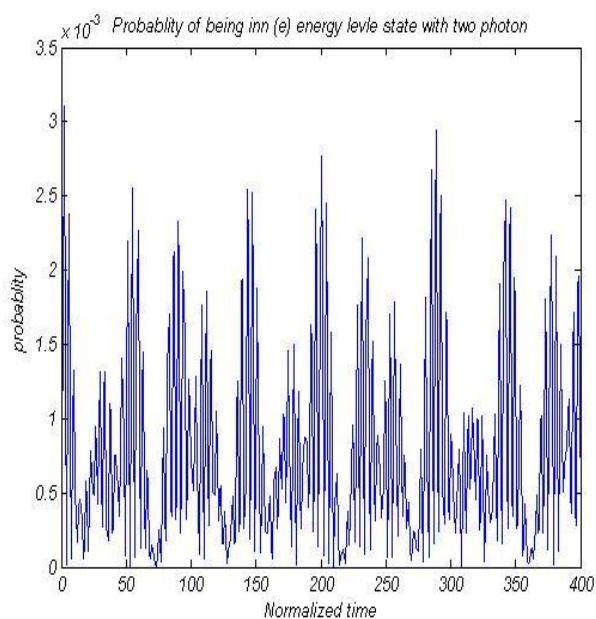
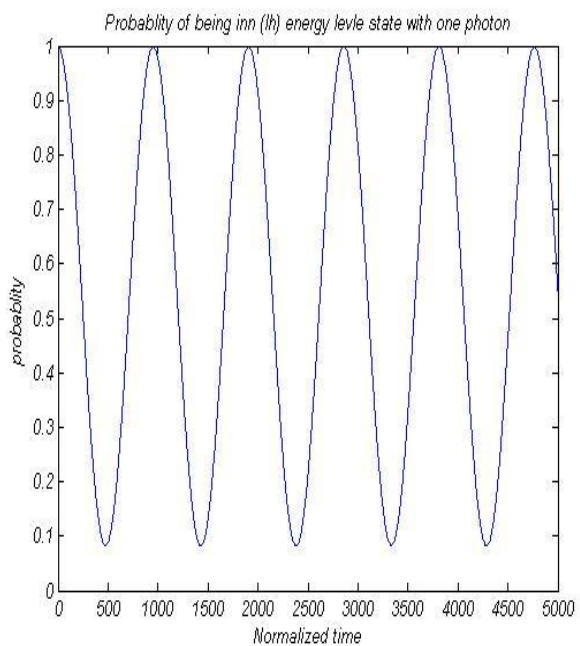
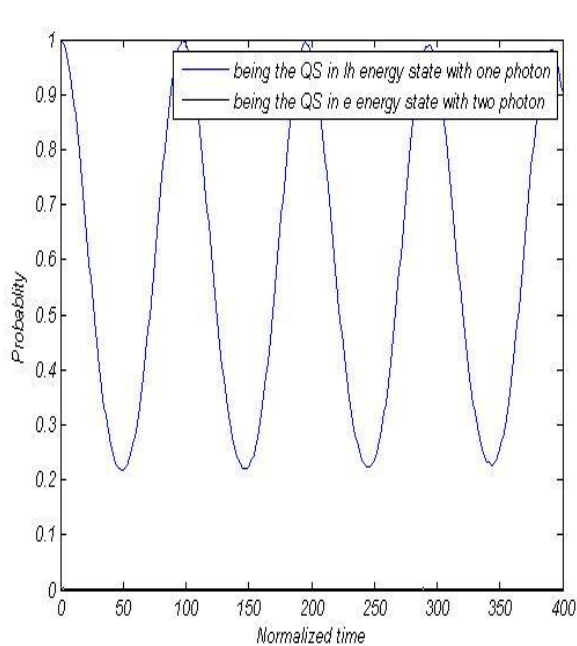
$$\sum_{n,i < j} (\gamma^*_{nij} g^*_{nijv} \sqrt{f_v + 1} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow i}, f_v) |A_{r_n \rightarrow j}\rangle |f_v + 1\rangle |1, lh\rangle =$$

$$\sqrt{2} \gamma^*_{1,lh,hh} g^*_{1,lh,hh} |2, hh\rangle + \sqrt{2} \gamma^*_{1,lh,e} g^*_{1,lh,e} |2, e\rangle$$

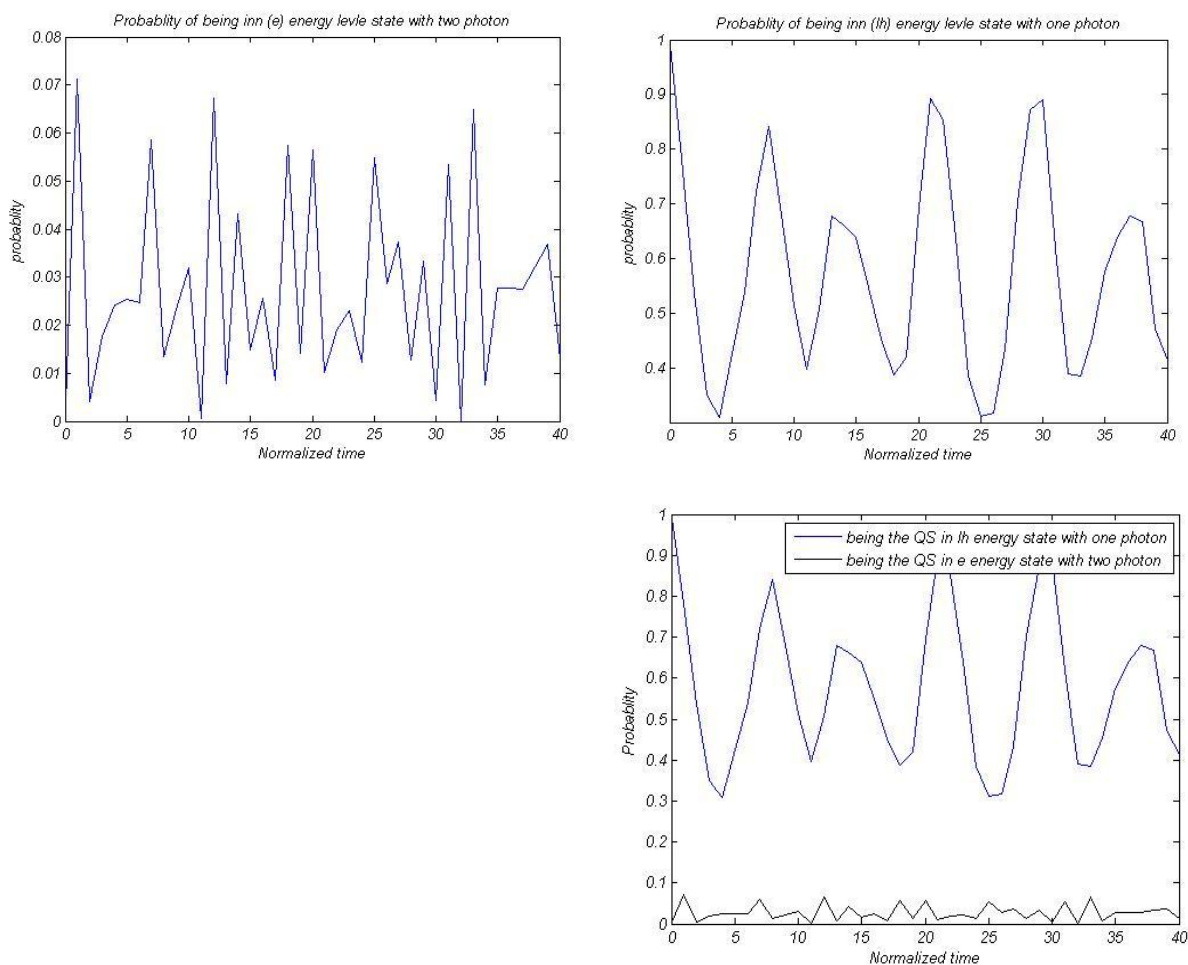
و چون $\gamma^*_{1,lh,hh} g^*_{1,lh,hh} = 0$ در نظر گرفته شده است (ممان الکترون - حفره در گذار از ترازهای حفره‌های سنگین به حفره‌های سبک صفر است) بنابراین:

$$\hat{H}_{r,E} |\varphi(t)\rangle = \sqrt{2} \gamma^*_{1,lh,e} g^*_{1,lh,e} |2, e\rangle$$

در نتیجه برای بررسی اثر جمله $\hat{\sigma}_{j,i}\hat{a}^\dagger$ با اعمال شرایط اولیه به فرم کت اولیه $|1, lh\rangle = 1$ و باقی حالات صفر، احتمال حالت $|1, lh\rangle, |2, e\rangle$ را به دست می آوریم. نتایج در شکل (۳-۸) و شکل (۳-۹) آمده است.



شکل (۳-۸) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف، ستون راست و چپ به ترتیب تزویج ضعیف و قوی



شکل (۹-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف، تزویج بسیار قوی

همان‌طور که مشخص است:

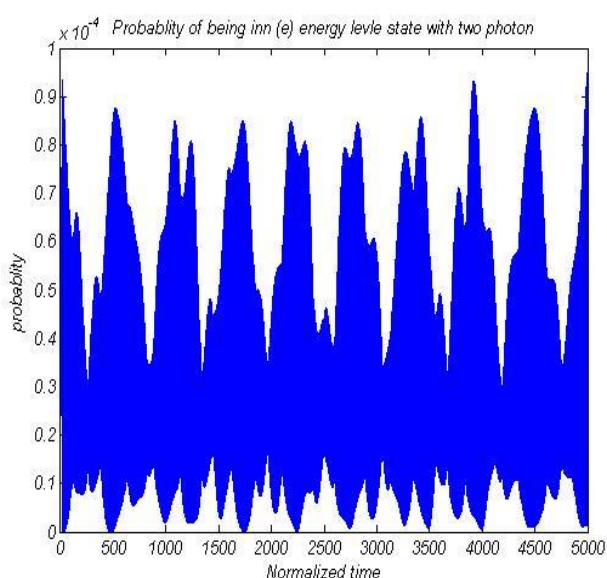
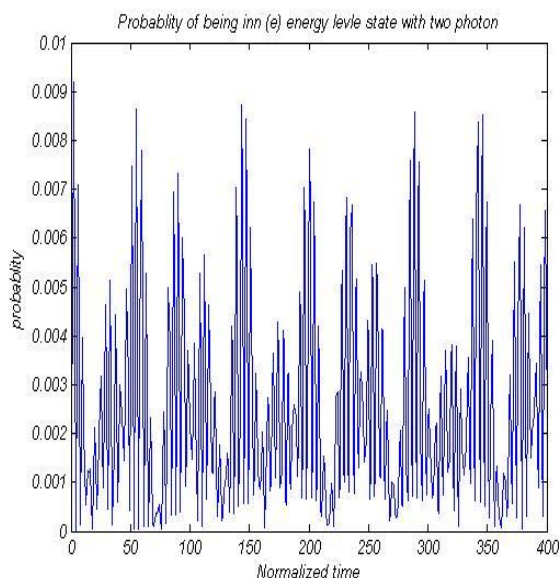
- ۱- با افزایش میدان الکتریکی و افزایش ثابت تزویج میزان نوسان احتمالات افزایش پیدا کرده‌است.
- ۲- با ورود با رژیم تزویج قوی تابع احتمالات متغیر با زمان فرم سینوسی خود را حفظ کرده است اما با ورود به تزویج بسیار قوی این‌طور نیست.
- ۳- در مهم‌ترین نتیجه‌گیری به وضوح دیده می‌شود که احتمال حضور سیستم در حالت $|2, e\rangle$ با افزایش ثابت تزویج در حال افزایش است و در رژیم تزویج بسیار قوی این احتمال بسیار بیشتر هم شده و در نتیجه تقریب موج چرخنده دیگر قابل استفاده نیست. پس روش حل موجود کامل‌ترین حل ممکن در رژیم‌های تزویج قوی و مهم‌تر بسیار قوی است.

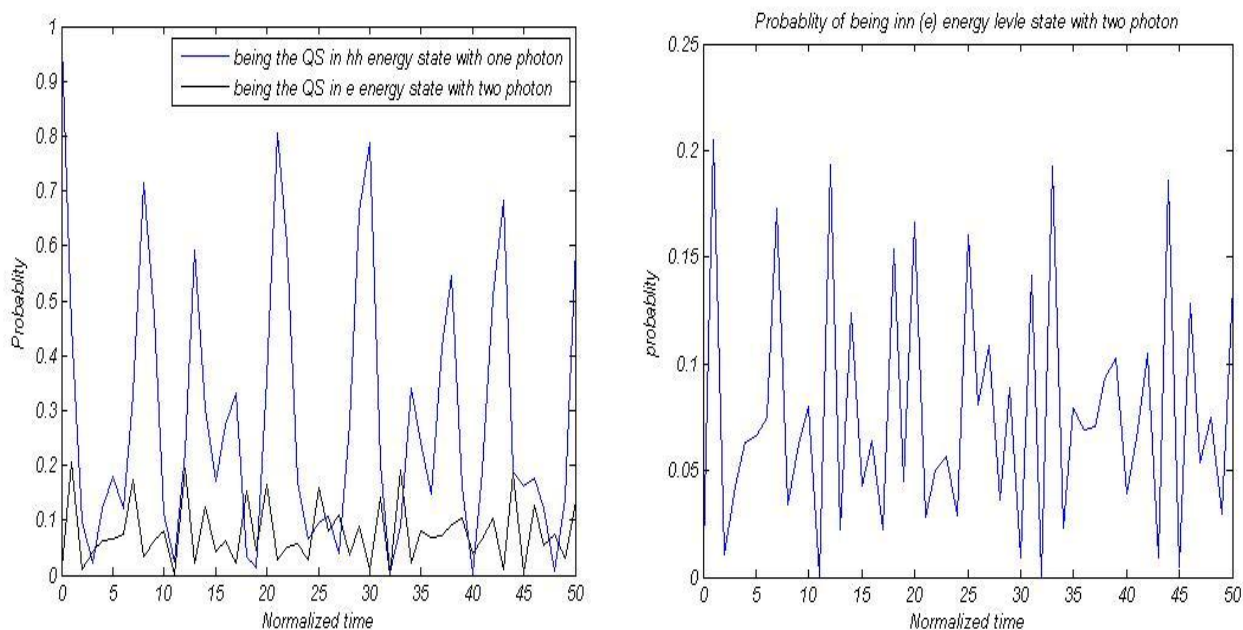
به دلیل این‌که سیستم مورد بررسی سه‌ترازه است و گذار مابین ترازهای الکترون و حفره‌های سنگین

هم وجود دارد این روند را در مورد این گذار هم امتحان می‌کنیم. در این قسمت با توجه به رابطه‌ی (۳-۳) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \hat{\mathbb{H}}_{r.E}|\varphi(t)\rangle = \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij}^* g_{nij}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{A-\{r_n\}, F} \phi(A_{r_n \rightarrow i}, f_v) |A_{r_n \rightarrow j}\rangle |f_v + 1\rangle |1, hh\rangle) \\ = \sqrt{2} \gamma_{1, lh, hh}^* g_{1, hh, e}^* |2, e\rangle$$

در نتیجه برای بررسی اثر جمله‌ی $\hat{\sigma}_{j,i} \hat{a}^\dagger$ با اعمال شرایط اولیه با کت اولیه $|1, hh\rangle$ و باقی حالات صفر، احتمال حالت $|2, e\rangle$ را به دست می‌آوریم. نتایج در شکل (۳-۱۰) آمده است. در حالت تزویج ضعیف این بار هم احتمال حالت $|2, e\rangle$ بسیار کم بود اما در رژیم تزویج قوی بیشتر و در رژیم بسیار قوی بسیار بیشتر شده است، به نحوی که دیگر تقریب موج چرخنده اعتبار نخواهد داشت. در ضمن همان‌طور که مشاهده می‌شود احتمال حضور سیستم در حالت $|1, hh\rangle$ از فرم سینوسی خارج شده و نوسانات آن مانند شکل (۳-۱۰) بسیار زیاد شده است.





شکل (۱۰-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف، ردیف اول صفحه‌ی قبل، سمت راست و چپ به ترتیب رژیم تزویج ضعیف و قوی، ردیف این صفحه، رژیم تزویج بسیار قوی

۳-۲-۴- محاسبه‌ی احتمال حضور سیستم کوانتومی در ترازهای مختلف در رژیم‌های تزویج متفاوت با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس

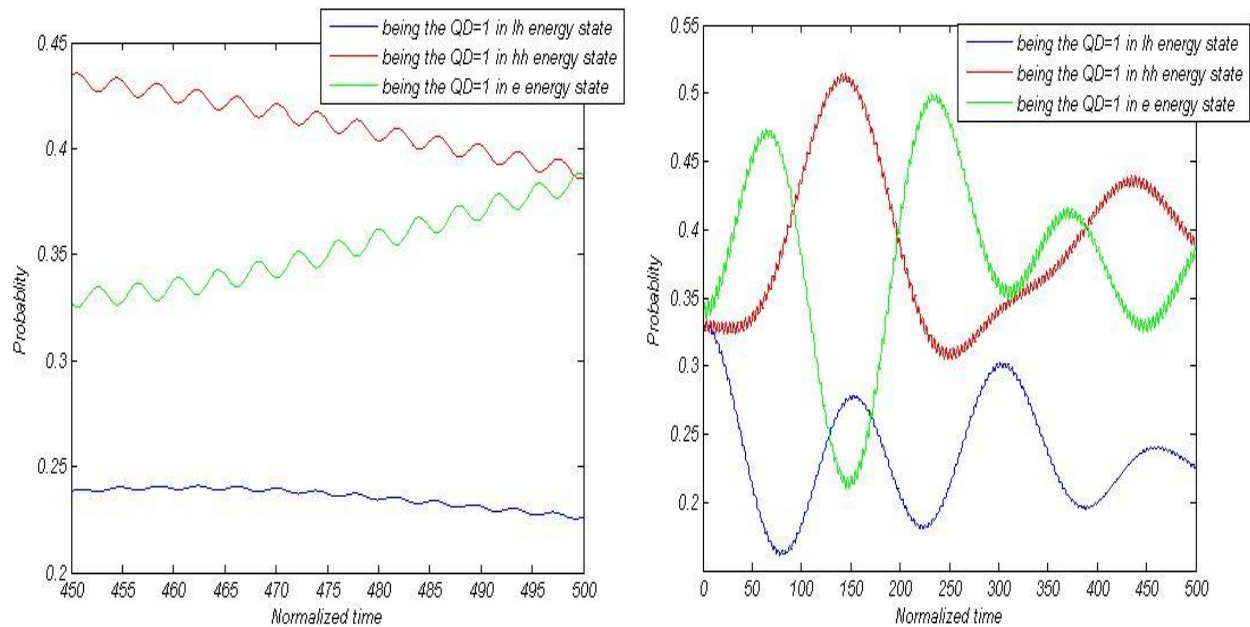
با توجه به رابطه‌ی زیر احتمال حضور سیستم مورد بررسی مثلاً در حالتی که سیستم در تراز انرژی الکترون‌ها قرار دارد به صورت زیر خواهد بود:

$$P = \sum_{A-\{r_1\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v=0}^N |\phi(r_1, r_2, \dots, r_{l \rightarrow k}, r_n, f_1, \dots, f_v)|^2$$

$$P = \sum_{r_1=e} \sum_{f_1=0}^8 |\phi(r_1, r_n, f_1, \dots, f_v)|^2 \quad (24-3)$$

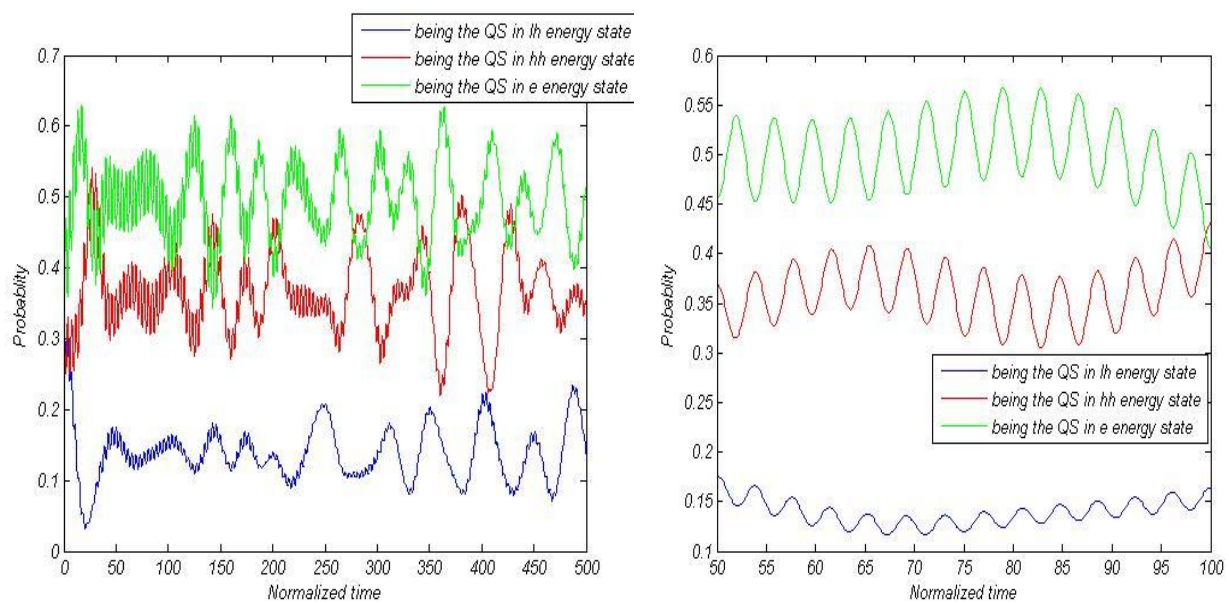
با استفاده از کد نوشته شده احتمال را مانند اشکال (۱۱-۳) و (۱۲-۳) و (۱۳-۳) محاسبه می‌کنیم.

رژیم تزویج ضعیف:



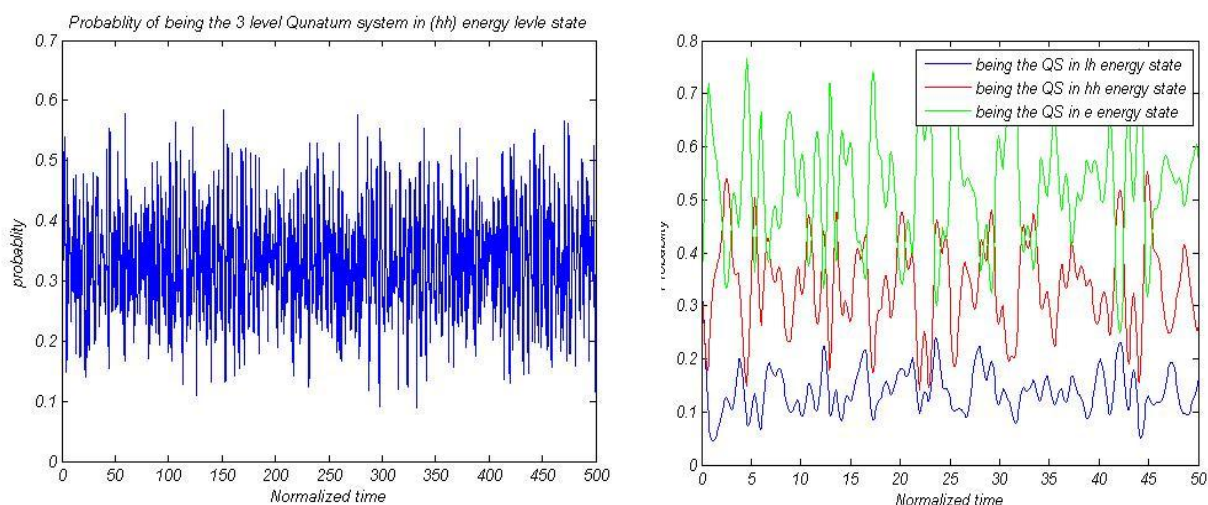
شکل (۱۱-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج ضعیف

رژیم تزویج قوی:



شکل (۱۲-۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج قوی

رژیم تزویج بسیار قوی:



شکل (۳-۱۳) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه همدوس در رژیم تزویج بسیار قوی

آن چه که از مقایسه‌ی نمودارهای احتمال حضور سیستم کوانتومی در ترازهای انرژی مختلف مشخص

است:

۱- احتمال حضور سیستم در رژیم تزویج ضعیف و قوی به صورت سینوسی و بدون اعوجاج در حال

تغییر است و بر روی یک سیگنال مدوله شده است.

۲- با افزایش میدان الکتریکی اعمال شده و در نتیجه افزایش ثابت تزویج مشاهده می‌شود بسامد

تغییر احتمال حضور سیستم افزایش پیدا می‌کند و در حالت تزویج بسیار قوی بسیار زیاد می-

شود.

۳- در رژیم تزویج بسیار قوی احتمال حضور بر روی یک سیگنال مدوله نمی‌شود و همان طور که

در بازه زمانی کوچک‌تر نشان داده شده است به هیچ‌وجه به صورت سینوسی و منظم تغییر

نمی‌کند.

۴- مجموعاً می‌توان گفت با افزایش میدان الکتریکی اعمالی در حالی که ممان گذار ثابت است و

افزایش ثابت تزویج احتمال حضور سیستم کوانتومی در ترازهای انرژی رفتاری نامنظم دارد.

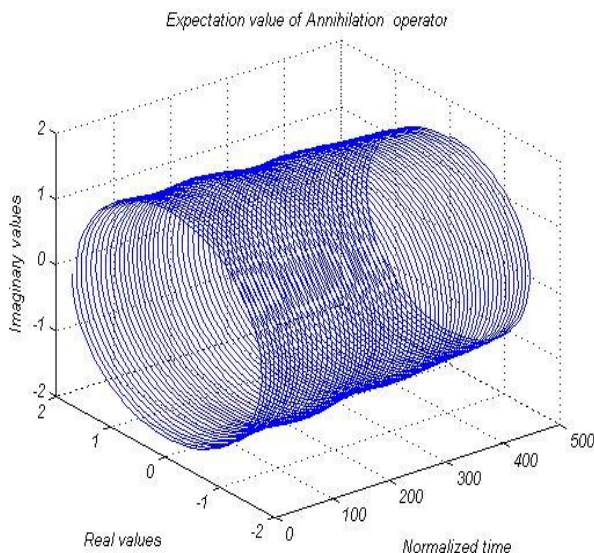
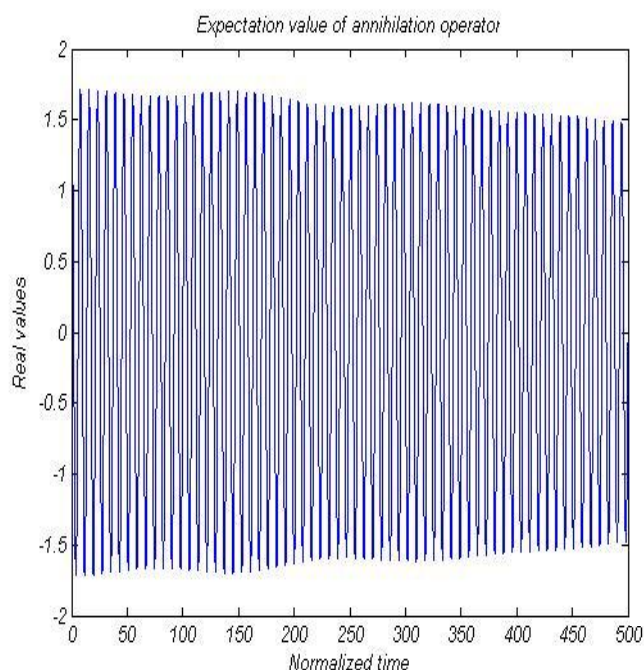
۳-۲-۵- محاسبه چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم‌های تزویج متفاوت

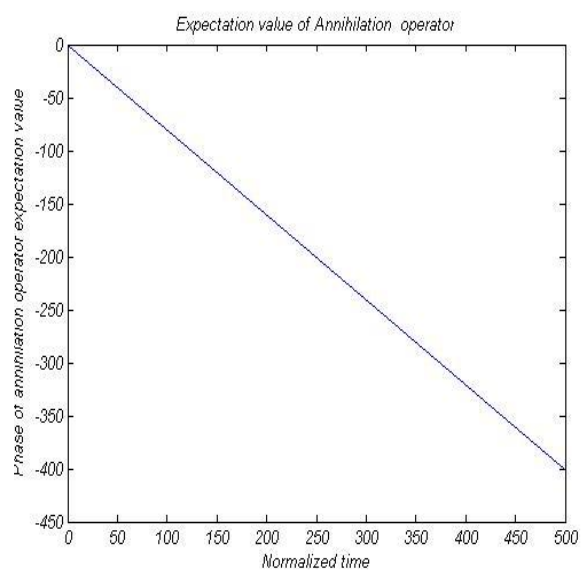
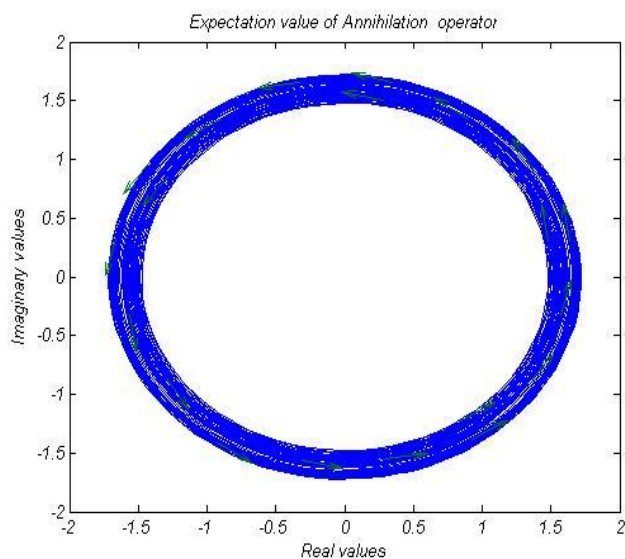
با توجه به رابطه‌ی زیر چشم‌داشتی سیستم مورد بررسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle \\ &= \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m=0}^N \sqrt{f_v} \phi^*(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m) \\ & \quad - 1 \dots, f_m) \phi(r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_v, \dots, f_m) \\ & \langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1=1h, hh, e} \sum_{f_1=0}^8 \sqrt{f_v} \phi^*(r_1, f_1) \phi(r_1, f_1) \end{aligned} \quad (۲۵-۳)$$

با استفاده از کد نوشته شده، چشم‌داشتی عمل‌گر فنا در اشکال (۳-۱۴) تا (۳-۱۶) رسم شده است..

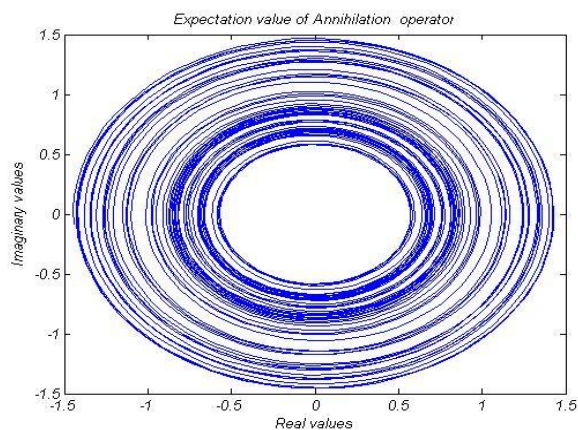
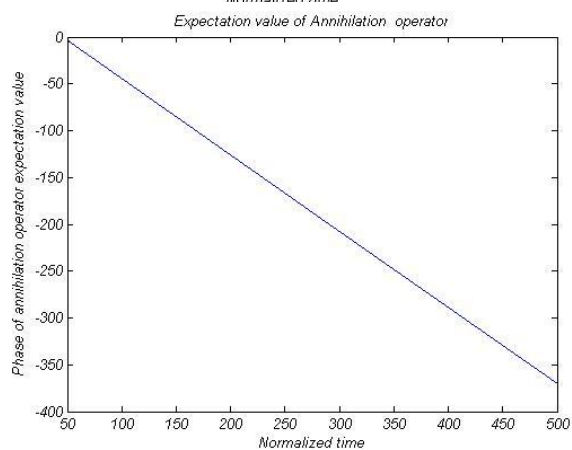
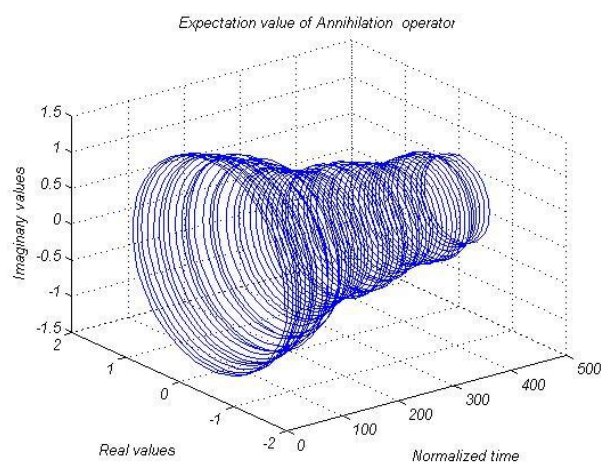
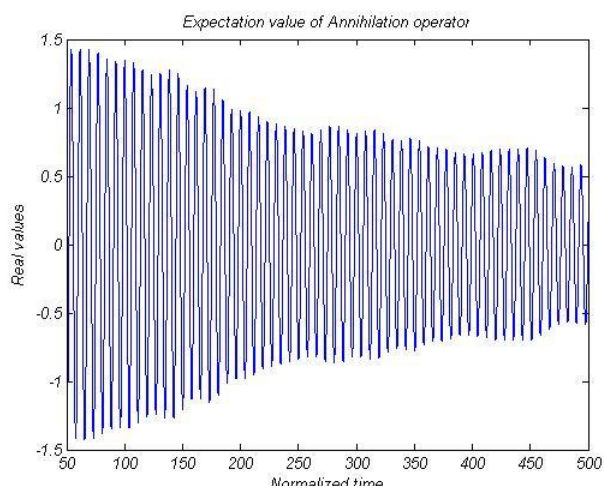
تزویج ضعیف:





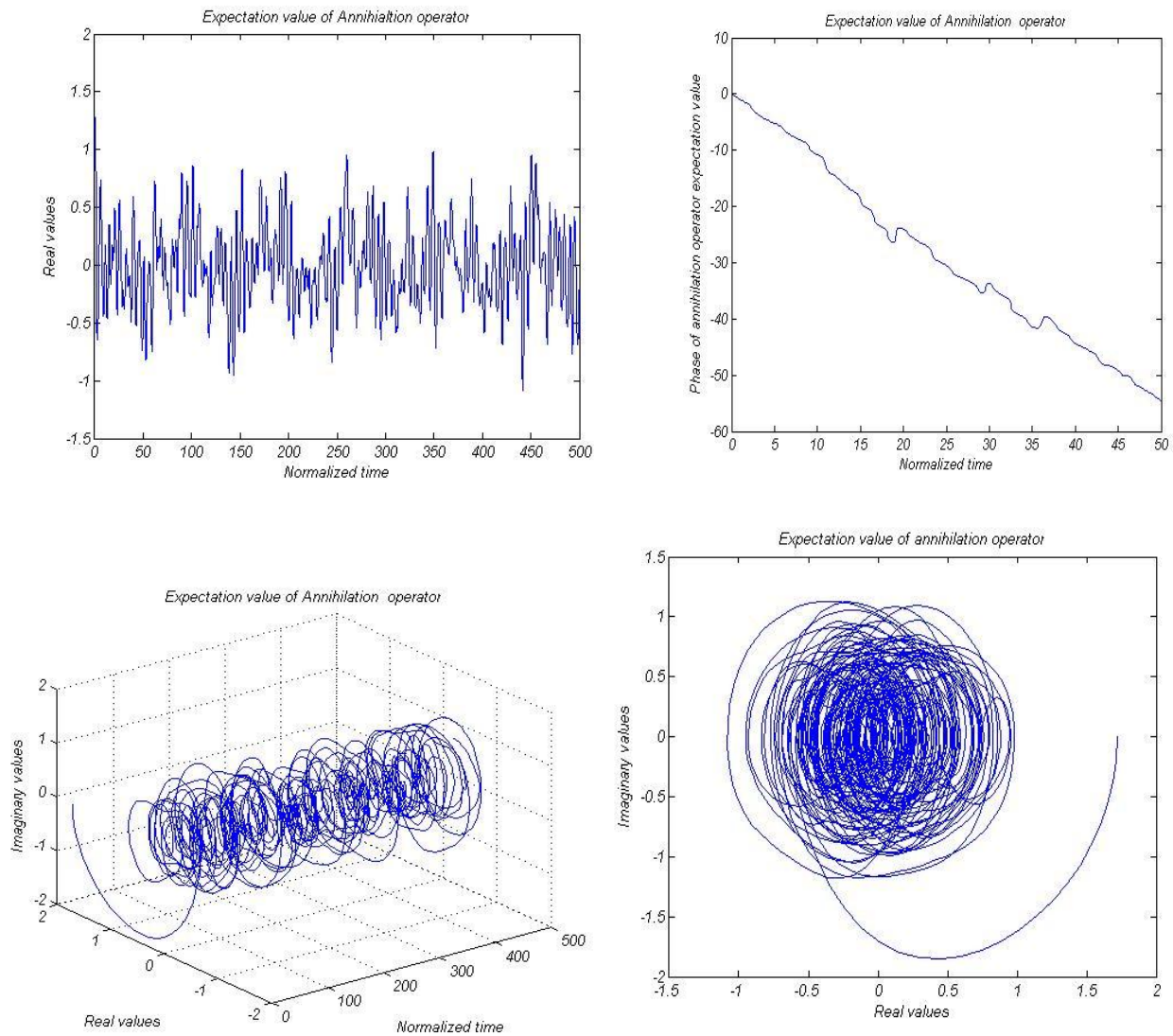
شکل (۳-۱۴) چشم داشتی عمل گر فنا فوتونی در زمان های مختلف در رژیم تزویج ضعیف

تزویج قوی:



شکل (۳-۱۵) چشم داشتی عمل گر فنا فوتونی در زمان های مختلف در رژیم تزویج قوی

رژیم تزویج بسیار قوی:



شکل (۳-۱۶) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی

با مشاهده و مقایسه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم‌های تزویج متفاوت می‌توان نتیجه گرفت:

- ۱- هنگامی که ثابت تزویج به اندازه‌ای است که سیستم در رژیم تزویج ضعیف است، رفتار چشم-داشتی عمل‌گر میدانی، عمل‌گر فنا فوتونی رفتاری کاملاً سینوسی است، و این نشان‌دهنده‌ی این

موضوع است که راه حل پویش آزاد^۱ که در آن \hat{a}, \hat{a}^+ به فرم $e^{\pm i\omega\lambda t}$ در نظر گرفته می شود در

این رژیم پاسخ گو است، ضمناً نمودار فاز چشمداشتی فنا در این رژیم خطی می باشد.

۲- با افزایش ثابت تزویج و ورود سیستم به رژیم تزویج قوی ، آن طور که از نمودارها مشخص است

همچنان رفتار چشمداشتی عمل گر مذکور سینوسی باقی می ماند اما دامنه ی آن در طول زمان

کاهش پیدا کرده و به عبارتی پوش منحنی رفتار یکسانی ندارد. ولی منحنی فاز همچنان خطی

باقی مانده است.

۳- با افزایش بیشتر ثابت تزویج دیگر چشمداشتی عمل گر فنا فوتونی رفتاری سینوسی ندارد، با

توجه به نمودارها واضح است که همچنان فرم پویشی دارد اما کاملاً بی نظم و غیر سینوسی،

ضمناً نمودار فاز این چشمداشتی بر حسب زمان دیگر خطی نمی باشد.

۴- در نتیجه می توان گفت افزایش ثابت تزویج در این سیستم و رسیدن به رژیم تزویج بسیار قوی

موجب نامنظم شدن چشمداشتی عمل گر فنا فوتونی شده و ثابت می کند که استفاده فرم پویش

آزاد وابسته به زمان این عمل گر ممکن نیست و روش حل کنونی بهترین روش ممکن است.

¹ free running solution

۳-۲-۶- محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج متفاوت

با توجه به رابطه‌ی زیر چشم‌داشتی سیستم مورد بررسی به صورت زیر خواهد بود:

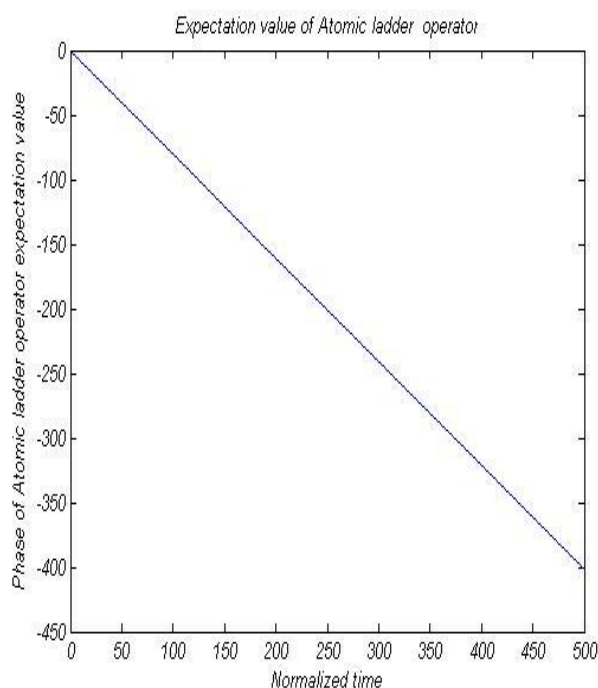
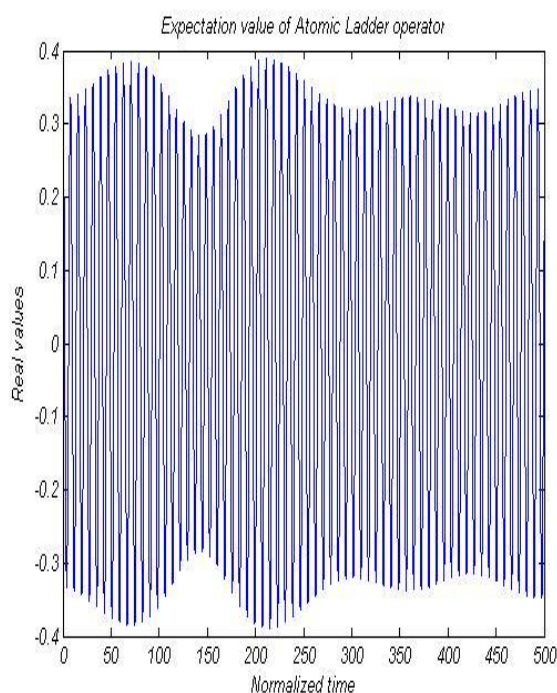
$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle = \sum_{A-\{r_l\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m=0}^N \phi^*(r_1, r_2, r_l \rightarrow s, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m) \phi(r_1, r_2, \dots, r_n \rightarrow k, f_1, f_2, \dots, f_m) \quad (26-3)$$

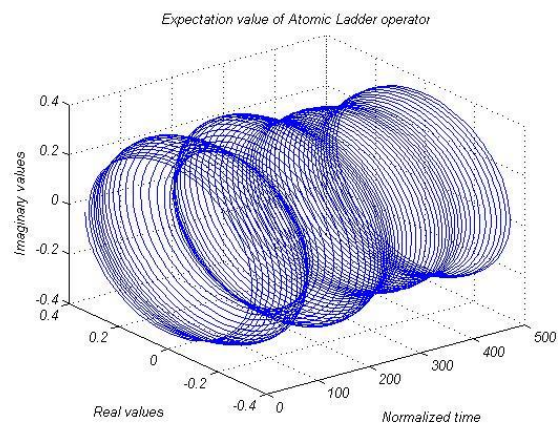
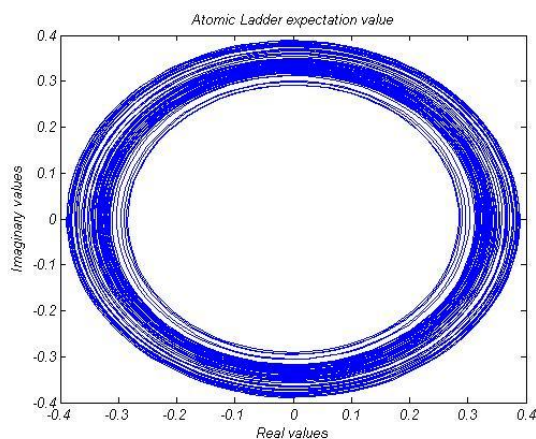
$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{lh,e} | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1=lh, hh, e}^{B_n} \sum_{f_1=0}^8 \phi^*(r_1 \rightarrow lh, f_1) \phi(r_1 \rightarrow e, f_1)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{hh,e} | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1=lh, hh, e}^{B_n} \sum_{f_1=0}^8 \phi^*(r_1 \rightarrow hh, f_1) \phi(r_1 \rightarrow e, f_1)$$

با استفاده از کد نوشته شده چشم‌داشتی عمل‌گر گذار از تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در اشکال (۳-۱۷) تا (۳-۲۲) رسم شده است.

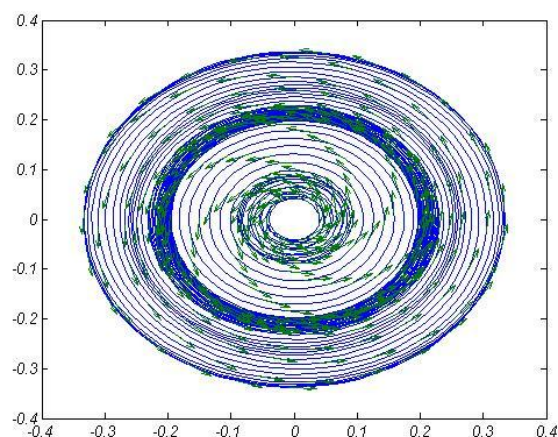
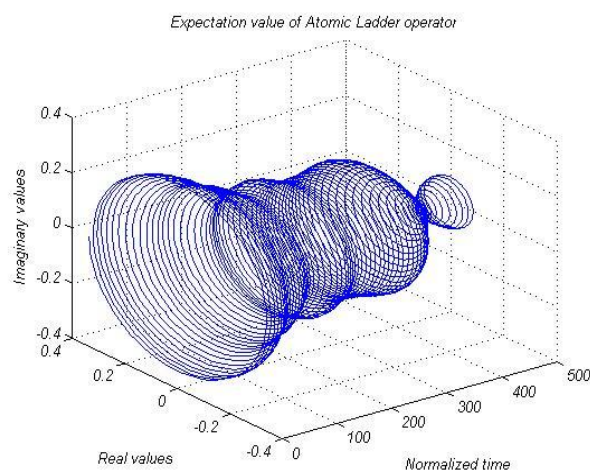
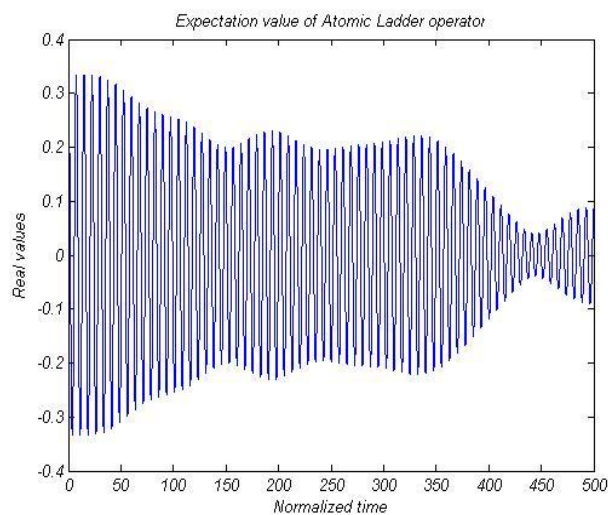
رژیم تزویج ضعیف گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سنگین :





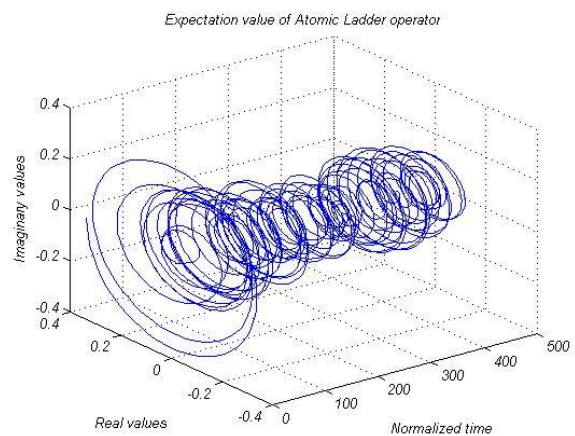
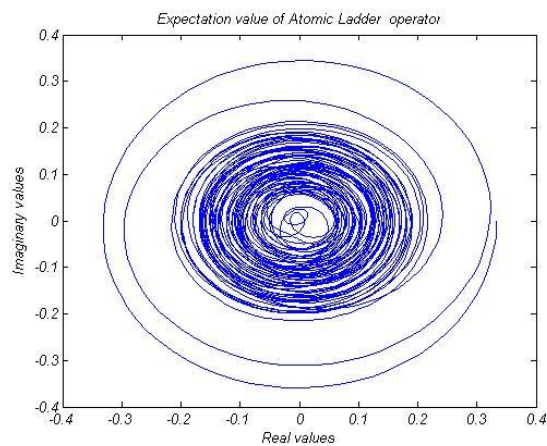
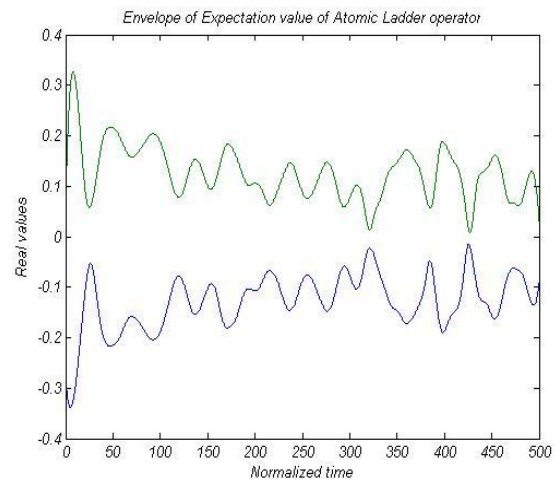
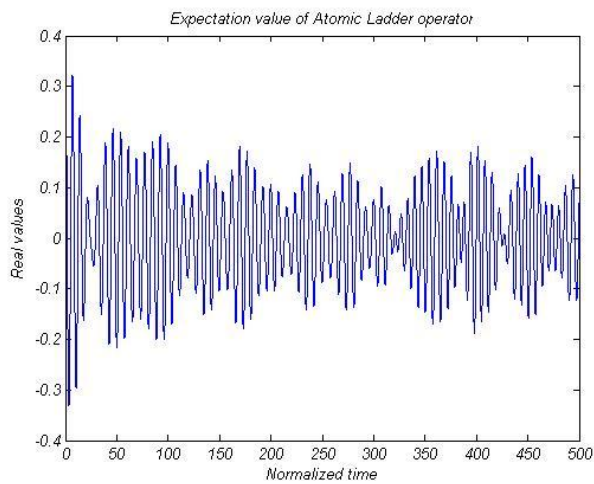
شکل (۳-۱۷) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در زمان‌های مختلف در رژیم ضعیف

رژیم تزویج ضعیف، گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سبک :



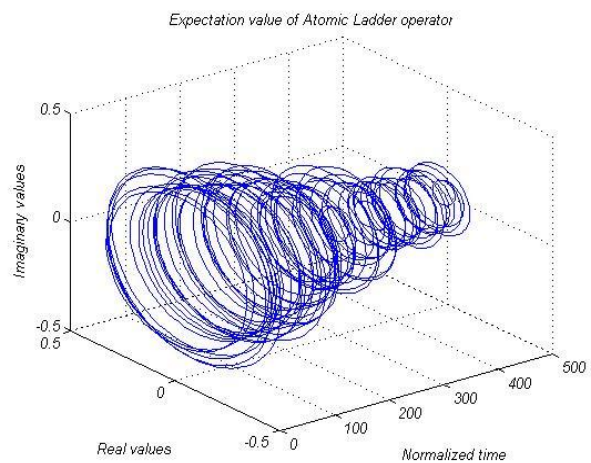
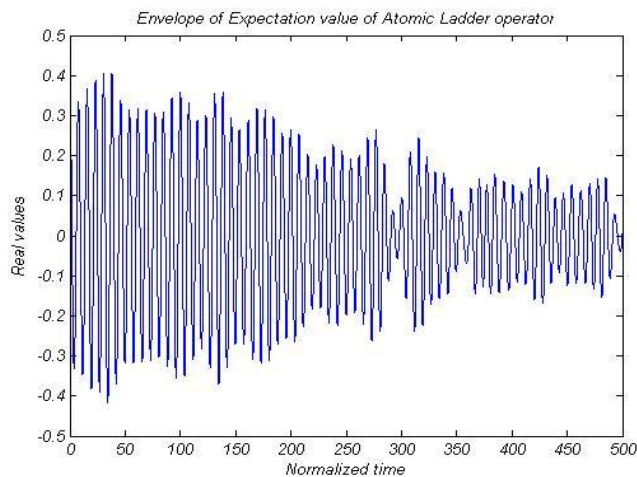
شکل (۳-۱۸) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان‌های مختلف در رژیم ضعیف

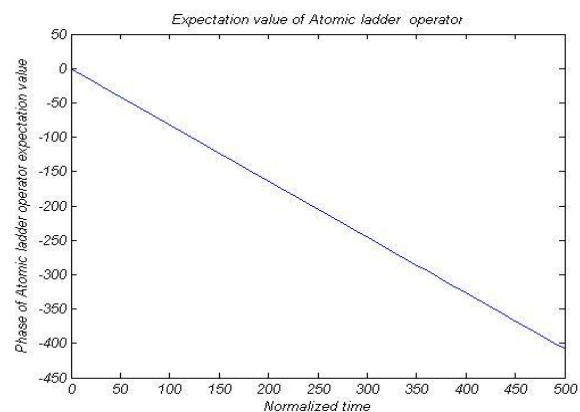
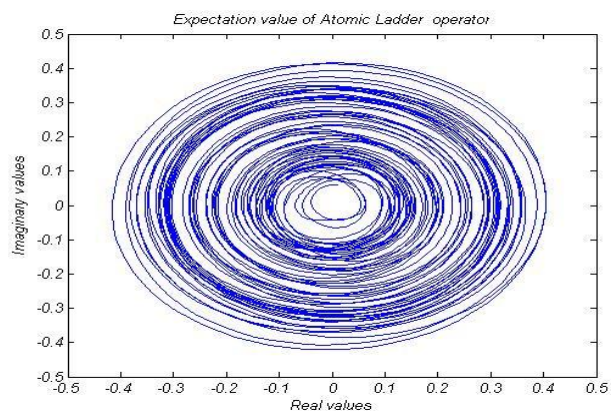
رژیم تزویج قوی، گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سبک :



شکل (۳-۱۹) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان‌های مختلف در رژیم قوی

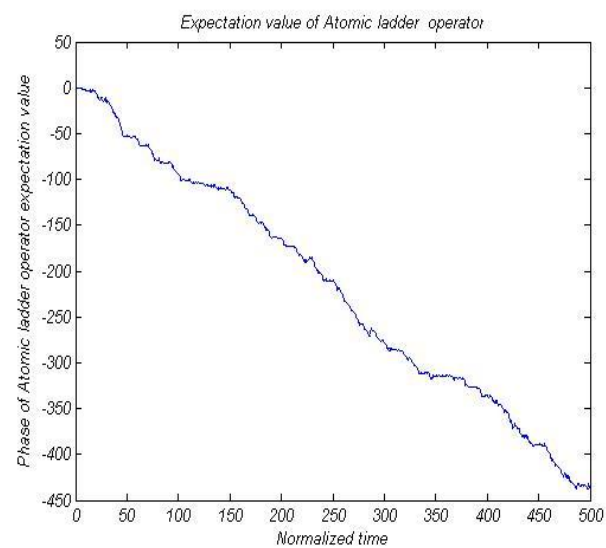
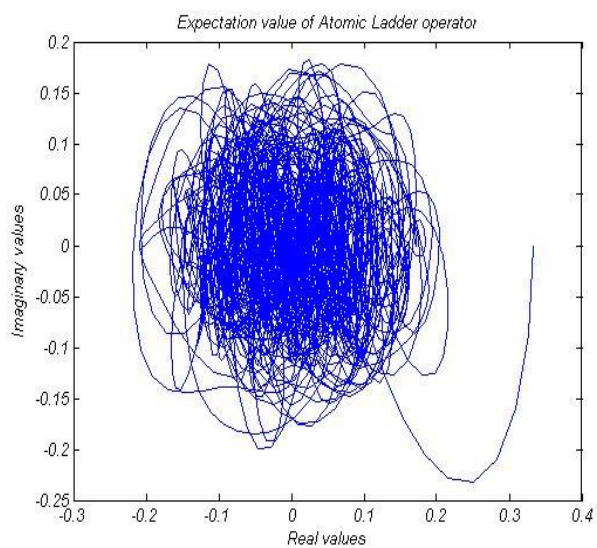
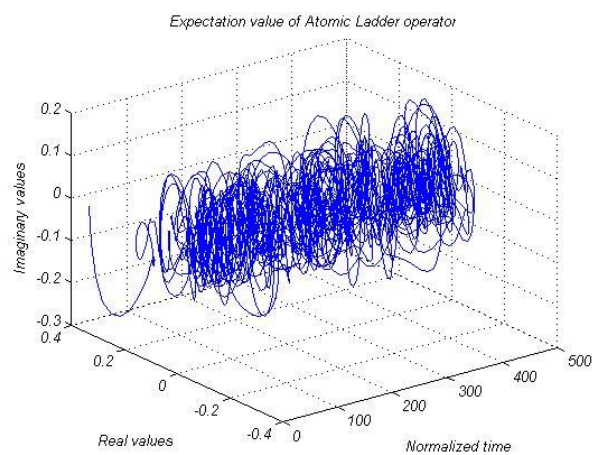
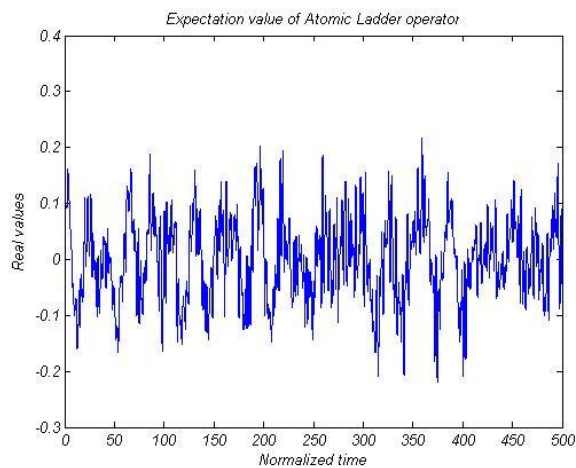
رژیم تزویج قوی، گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سنگین :





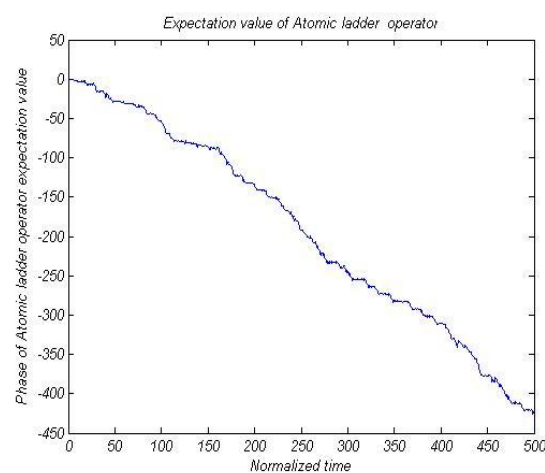
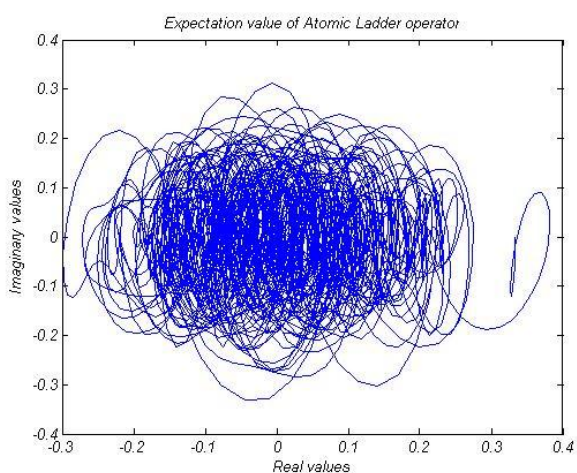
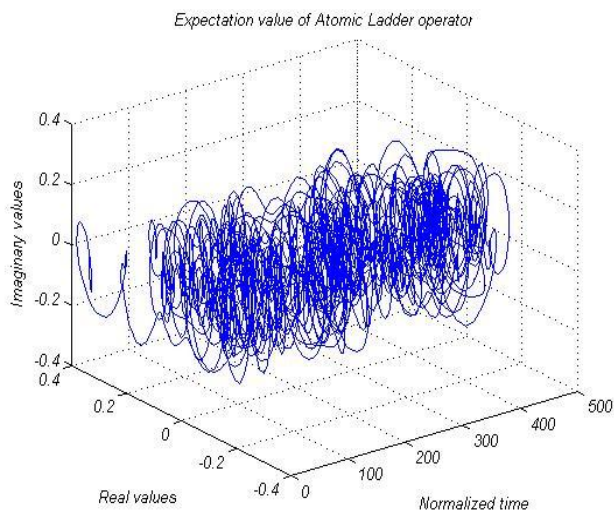
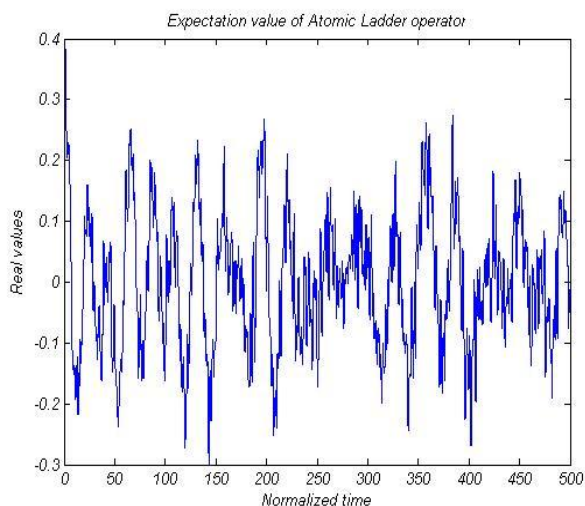
شکل (۳-۲۰) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در زمان‌های مختلف در رژیم قوی

رژیم تزویج بسیار قوی، گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سبک :



شکل (۳-۲۱) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان‌های مختلف در رژیم بسیار قوی

رژیم تزویج بسیار قوی، گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره های سنگین :



شکل (۲۲-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی

می‌توان این‌گونه جمع‌بندی کرد که:

- ۱- در رژیم تزویج ضعیف رفتار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در گذار از تراز انرژی الکترون به حفره‌ی سنگین رفتاری سینوسی است و در زمان بهنجار طولانی هم به صورت سوار بر یک سیگنال مدوله سینوسی است، هم‌چنین منحنی فاز آن نسبت به زمان هم خطی می‌باشد، این وضعیت مشابه گذار از الکترون به حفره‌ی سبک است با این تفاوت که دامنه‌ی نوسانات چشم‌داشتی در طول زمان در حالت دوم کاهش پیدا می‌کند.

۲- با ورود به رژیم تزویج قوی رفتار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در گذار از تراز انرژی الکترون به حفره سنگین باز هم سینوسی است با این تفاوت که منحنی پوش دچار اعوجاج می‌شود و در طول زمان از میزان سینوسی بودن کاسته می‌شود و منحنی فاز آن نسبت به زمان هم‌چنان خطی می‌باشد، در این رژیم تزویج رفتار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در گذار از تراز انرژی الکترون به حفره سبک مانند حالت دیگر است، با این تفاوت که در زمان‌های ابتدایی رفتار بیشتر سینوسی است و در ادامه اعوجاج بیشتر می‌شود.

۳- در رژیم تزویج بسیار قوی در هر دو حالت گذار رفتار نامنظم می‌شود و با اینکه کمی فرم پویایی دارد اما اصلاً سینوسی نیست. ضمناً منحنی فاز بر حسب زمان هم غیرخطی است.

۳-۲-۷- درهم‌تنیدگی سیستم از طریق محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گر گذار اتمی

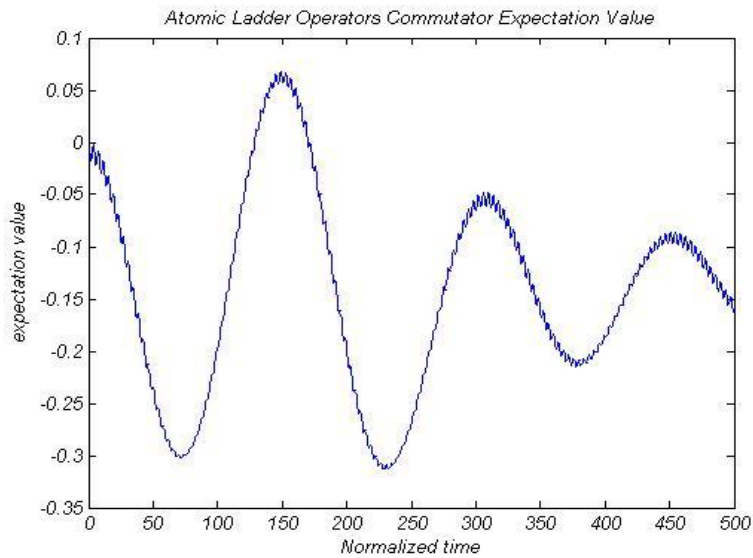
با توجه به رابطه‌ی زیر چشم‌داشتی جابجایی عمل‌گرهای مذکور به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger] | \varphi(t) \rangle = \\ \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m=0}^N |\phi(r_1, r_2, r_l \rightarrow s, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m)|^2 - \\ \sum_{A-\{rl\}=1}^{B_n} \sum_{f_1, f_2, \dots, f_m=0}^N |\phi(r_1, r_2, r_l \rightarrow k, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_m)|^2 \end{aligned} \quad (27-3)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{lh,e}, (\hat{\sigma}_{lh,e})^\dagger] | \varphi(t) \rangle = \sum_{f_1=0}^N |\phi(r_1 \rightarrow lh, f_1)|^2 - \\ \sum_{f_1=0}^N |\phi(r_1 \rightarrow e, f_1)|^2 \\ \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{hh,e}, (\hat{\sigma}_{hh,e})^\dagger] | \varphi(t) \rangle = \sum_{f_1=0}^N |\phi(r_1 \rightarrow hh, f_1)|^2 - \\ \sum_{f_1=0}^N |\phi(r_1 \rightarrow e, f_1)|^2 \end{aligned}$$

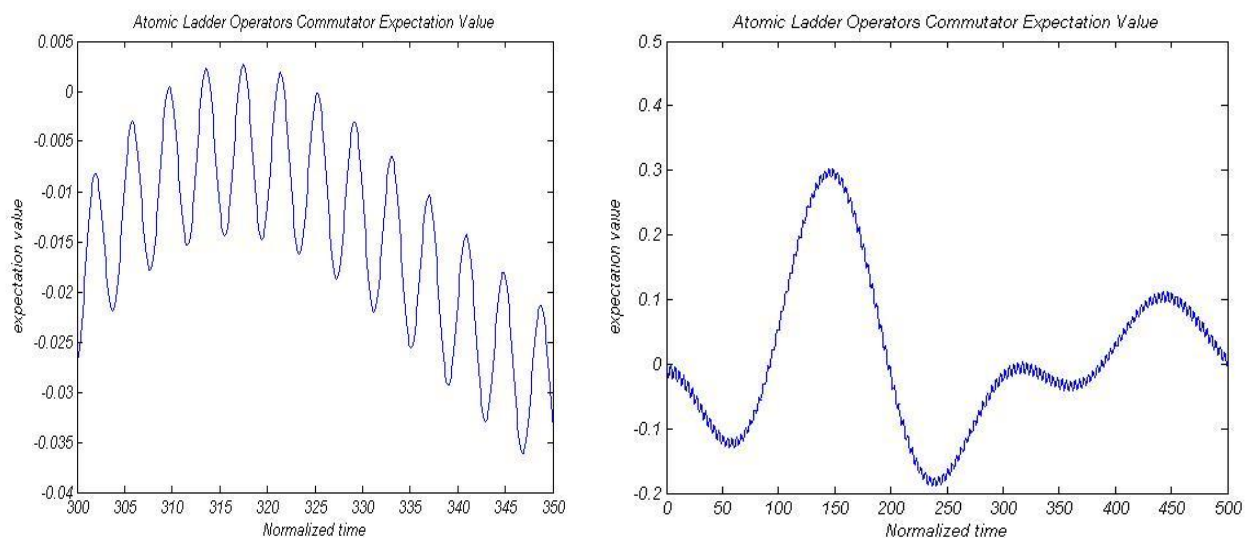
با استفاده از کد نوشته‌شده‌ی چشم‌داشتی جابجایی عمل‌گرهای مذکور در اشکال (۳-۲۳) تا (۳-۲۸) رسم شده‌است.

رژیم تزویج ضعیف، در گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سبک:



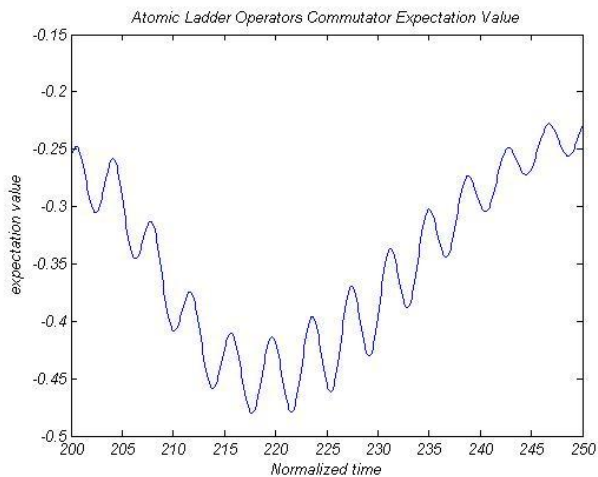
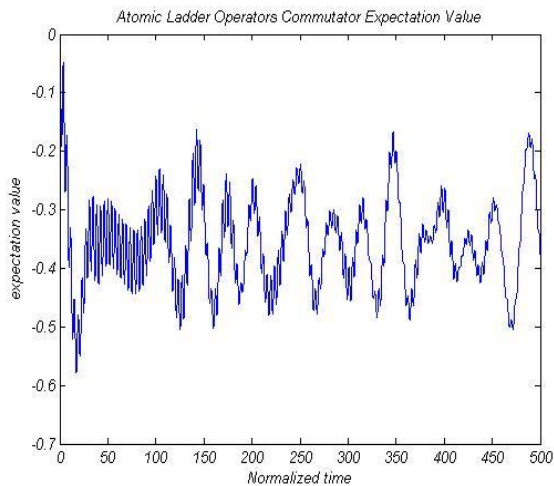
شکل (۳-۲۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در زمان در رژیم تزویج ضعیف

رژیم تزویج ضعیف، در گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سنگین:



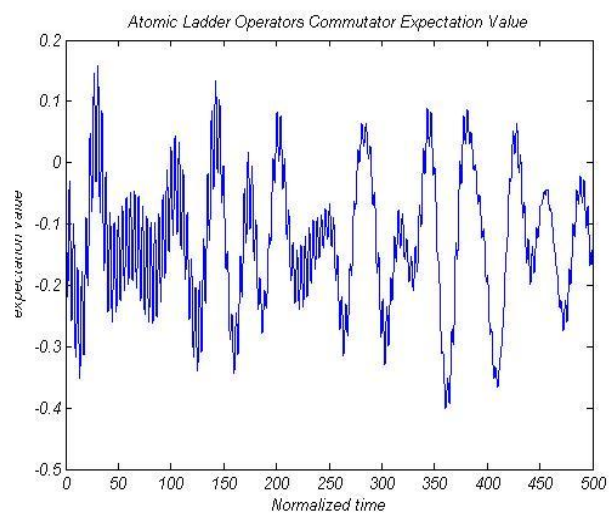
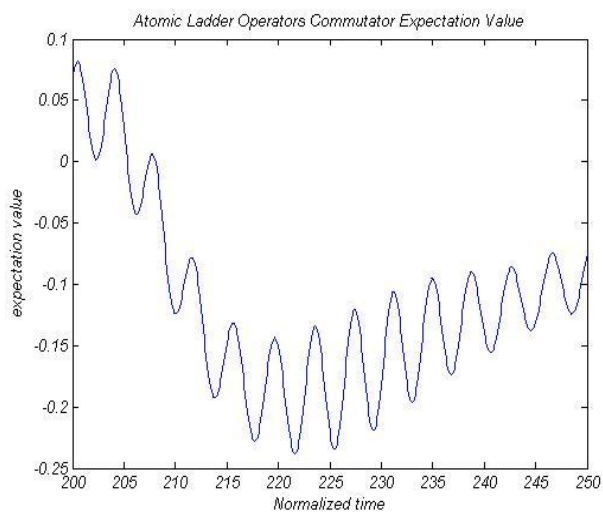
شکل (۳-۲۴) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در رژیم تزویج ضعیف

رژیم تزویج قوی، در گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سبک:



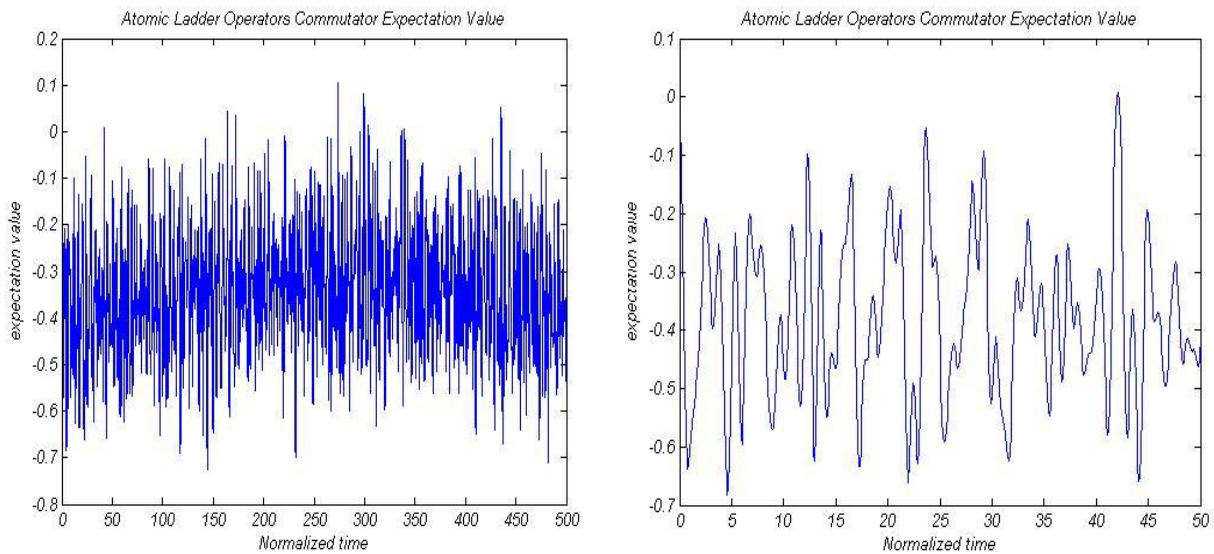
شکل (۳-۲۵) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در رژیم تزویج قوی

رژیم تزویج قوی، در گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سنگین:



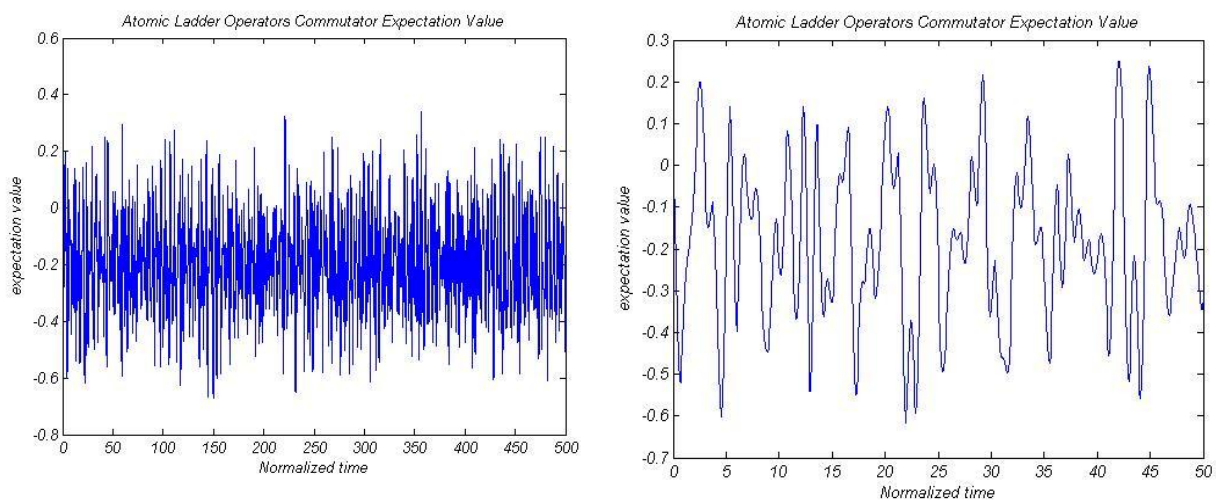
شکل (۳-۲۶) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در رژیم تزویج قوی

رژیم تزویج بسیار قوی، در گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سبک:



شکل (۲۷-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سبک در رژیم تزویج بسیار قوی

رژیم تزویج بسیار قوی، در گذار از تراز انرژی الکترون به تراز انرژی حفره‌های سنگین:



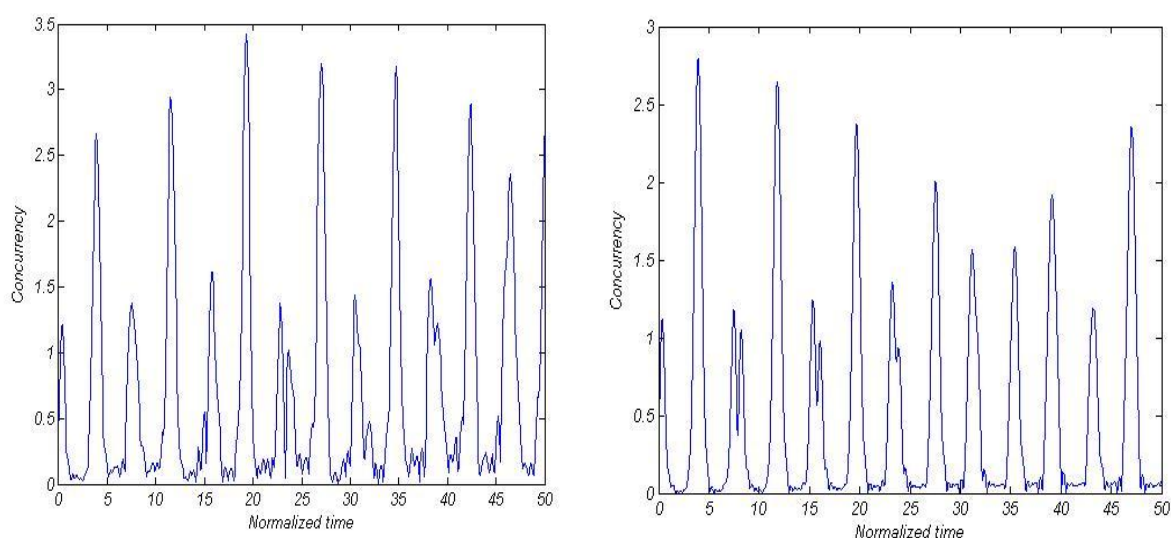
شکل (۲۸-۳) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی الکترون به حفره‌های سنگین در رژیم تزویج بسیار قوی

با توجه به نمودارها:

۱. همان طور که از رابطه مشخص است رفتار این چشم‌داشتی باید شبیه رفتار احتمال حضور سیستم شود که همین اتفاق افتاد. یعنی با افزایش ثابت تزویج بسامد تغییرات مقدار چشم‌داشتی افزایش پیدا کرد.
۲. با افزایش ثابت تزویج تغییرات مقدار چشم‌داشتی جابجاگر بر حسب زمان از فرم سینوسی و سوار شده بر یک سیگنال مدوله خارج شده و همان طور که در نمودارها هم واضح است دچار بی‌نظمی می‌شود.

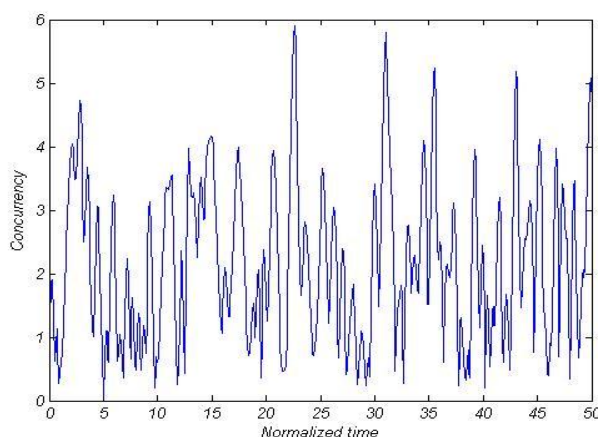
۳-۲-۸ - محاسبه‌ی هم‌نوایی سیستم

اشکال (۳-۲۹) و (۳-۳۰) هم‌نوایی سیستم در رژیم تزویج ضعیف و قوی را نشان می‌دهد:



شکل (۳-۲۹) پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج ضعیف و قوی، سمت راست و چپ به ترتیب

رژیم تزویج بسیار قوی:



شکل (۳-۳۰) پارامتر هم نوایی در رژیم تزویج بسیار قوی

همان طور که مشخص است با ورود به رژیم تزویج بسیار قوی پارامتر هم نوایی به شدت دچار اغوجاج و

بی نظمی می شود.

۳-۳- تحلیل حالت و پارامترهای مختلف تعداد دل خواهی از نقاط و مدهای کوانتومی با برهم کنش به دلخواه قوی.

۳-۳-۱- مقدمه

در این بخش قصد داریم یک گام جلوتر گذاشته و سیستمی را بررسی کنیم که در آن اجزای تشکیل دهنده بیشتر از دو بخش است و حالات مختلف سیستم در آن بسیار زیاد می شود. سیستمی که در این بخش مورد بررسی قرار خواهد گرفت متشکل از تعداد دل خواهی نقطه کوانتومی و یک مد کاواک است. در این مد کاواک حداکثر تعداد مشخصی فوتون قرار می گیرد. هدف اصلی از این بخش، استفاده از روابط به دست آمده در فصل قبل و نشان دادن چگونگی استفاده از آن ها در انجام محاسبات مربوطه می باشد. با استفاده از برنامه های شبیه سازی فراهم شده روابط استخراج شده حل و محاسبه می شوند. در ادامه نمودارهای حاصل با تکرار محاسبات در رژیم های تزویج مختلف رسم، و در نهایت مقایسه و تحلیل می شوند.

در ادامه به منظور انجام موارد ذکر شده، مراحل زیر انجام خواهد شد:

۱. مشخصات سیستم معرفی شده تعیین می گردند و کت حالت سیستم مذکور را می نویسیم.
۲. هامیلتونی مربوط به این سیستم تعیین می شود و معادله ی شرودینگر در کلی ترین حالت ممکن و بدون هر گونه تقریبی در فضای شرودینگر با استفاده از نرم افزار مربوطه حل شده و ماتریس ضرایب کت حالات سیستم محاسبه خواهد شد.
۳. با استفاده از ضرایب محاسبه شده، احتمال حضور سیستم در حالتی که هر نقطه ی کوانتومی دلخواهی در تراز انرژی خاصی باشد محاسبه می شود. سپس چشم داشتی عمل گر فنا فوتونی سیستم، چشم داشتی عمل گر گذار اتمی مربوط به هر نقطه کوانتومی محاسبه و و متغیر با زمان بهنجارش رسم می شوند. در نهایت چشم داشتی عمل گر جابجاگر گذار اتمی سیستم محاسبه و رسم خواهد شد.
۴. جهت تحلیل و مقایسه ی مقادیر به دست آمده کلیه مراحل را در سه رژیم ضعیف، قوی و بسیار قوی تکرار و بررسی خواهیم کرد.

۳-۳-۲ - مشخصات سیستم الکترو دینامیک مذکور

سیستم الکترو دینامیک استفاده شده شامل شش نقطه کوانتومی می باشد که هر یک دارای دو حالت انرژی پایه و برانگیخته $(|g\rangle, |e\rangle)$ هستند. مقادیر ترازهای انرژی ۰ و ۱ الکترون ولت در نظر گرفته شده است و ساختار نقاط کوانتومی به گونه ای فرض شده است که دارای ممان دو قطبی گذار Debye ۱۹۲ هستند، ضمناً ضریب برهم کنش هر دو، دوقطبی که وابسته به شدت دوقطبی ایجاد شده در گذار از تراز به تراز دیگر هر نقطه کوانتومی است، برای هر نقطه ی کوانتومی مقدار 5meV در نظر گرفته شده است. فرض شده است این سیستم دارای برهم کنش با یک مد کاواک دارای بسامد تشدید $w_0 = \frac{E_i - E_g}{\hbar}$ برابر $\frac{1}{\hbar}$ می باشد.

در این سیستم الکتروپدینامیک ساختار یکسان فرض شده است و با اعمال میدان‌های الکتریکی متفاوت، سیستم در رژیم‌های تزویج متفاوت قرار گرفته است.

با استفاده از رابطه‌ی زیر بسامد رابی که معیار شدت تزویج است را محاسبه و از آن به عنوان معیار ثابت تزویج در تحلیل سیستم مذکور استفاده کرده‌ایم.

$$G_{e,g} = \frac{1}{\hbar} (E_0 \hat{E}) \cdot \langle \psi_e | e\mathcal{R} | \varphi_g \rangle \quad (28-3)$$

که عبارت $\langle \psi_e | e\mathcal{R} | \varphi_g \rangle$ همان ممان دوقطبی گذار می‌باشد.

$$\omega_\lambda = \frac{1}{\hbar} eV = 1.5177 \times 10^{15} \frac{Rad}{s}$$

جدول ۳-۶. مقادیر بسامد رابی

E_0	$G_{e,g}(\frac{Rad}{s})$	$\frac{G_{e,g}}{\omega_\lambda}$
$10 \frac{kV}{cm}$	6.0676×10^{12}	0.004
$100 \frac{kV}{cm}$	6.0676×10^{13}	0.04
$1 \frac{MV}{cm}$	6.0676×10^{14}	0.4

با توجه به جدول ۳-۶ با توجه به این که فرض شده است بسامد گذار و بسامد موج الکترومغناطیس (w_0) تقریباً برابر هستند، بنابراین در حالتی که $G_{e,g} = 0.004w_\lambda$ است تزویج از نوع ضعیف خواهد بود، و در حالت $G_{e,g} = 0.04w_\lambda$ تزویج از نوع قوی و در حالت $G_{e,g} = 0.4w_\lambda$ تزویج از نوع بسیار قوی در نظر گرفته می‌شود.

کت حالت سیستم را به شکل رابطه‌ی زیر می‌توان نوشت:

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 = e, g} \sum_{f=1}^8 \phi(A_1, f) |A_1\rangle |f\rangle \quad (29-3)$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_{r,r} + \mathbb{H}_{r,E}$$

$$\mathbb{H}_0 = \sum_{n=0, i=e, g}^6 E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \hbar \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$\mathbb{H}_{r,r} = \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \rightarrow \mathbb{H}_{r,r} =$$

$$\sum_{n=1 < m=2, i=g < j=e}^{n=5, m=6} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \quad (30-3)$$

$$\mathbb{H}_{r,E} = \sum_{n=0, i=g < j=e}^6 (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (g_{nij} \hat{a} + g_{nij}^* \hat{a}^\dagger)$$

شرایط اولیه‌ی این سیستم، به صورت فوک و هم به صورت هم‌دوس تعیین می‌شود. شرایط اولیه‌ی

هم‌دوس در سیستم مذکور با استفاده از رابطه‌ی زیر بیان می‌شود.

$$|\phi(t_0)\rangle = \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^8 \left| \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} \right|^2} \sum_{n=0}^8 \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} |n\rangle \right) (\sum_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 = g, e} |r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\rangle) \quad (31-3)$$

با استفاده از برنامه‌ی تولید شرایط اولیه، شرایط اولیه این سیستم را محاسبه می‌کنیم. در این مرحله با توجه به مشخصات به دست آمده و $G_{g,e}$ که در واقع بیان کننده رژیم تزویج ضیف، قوی و بسیار قوی است با استفاده از نرم افزارهای نوشته شده، ضرایب کت حالت سیستم را محاسبه می‌کنیم و پارامترهای مورد نیاز را در اعمال میدان های الکتریکی متفاوت محاسبه و تحلیل می‌کنیم. محاسبات مربوط به هر سه رژیم تزویج، به دلیل ضرورت مقایسه، در کنار هم آورده می‌شود.

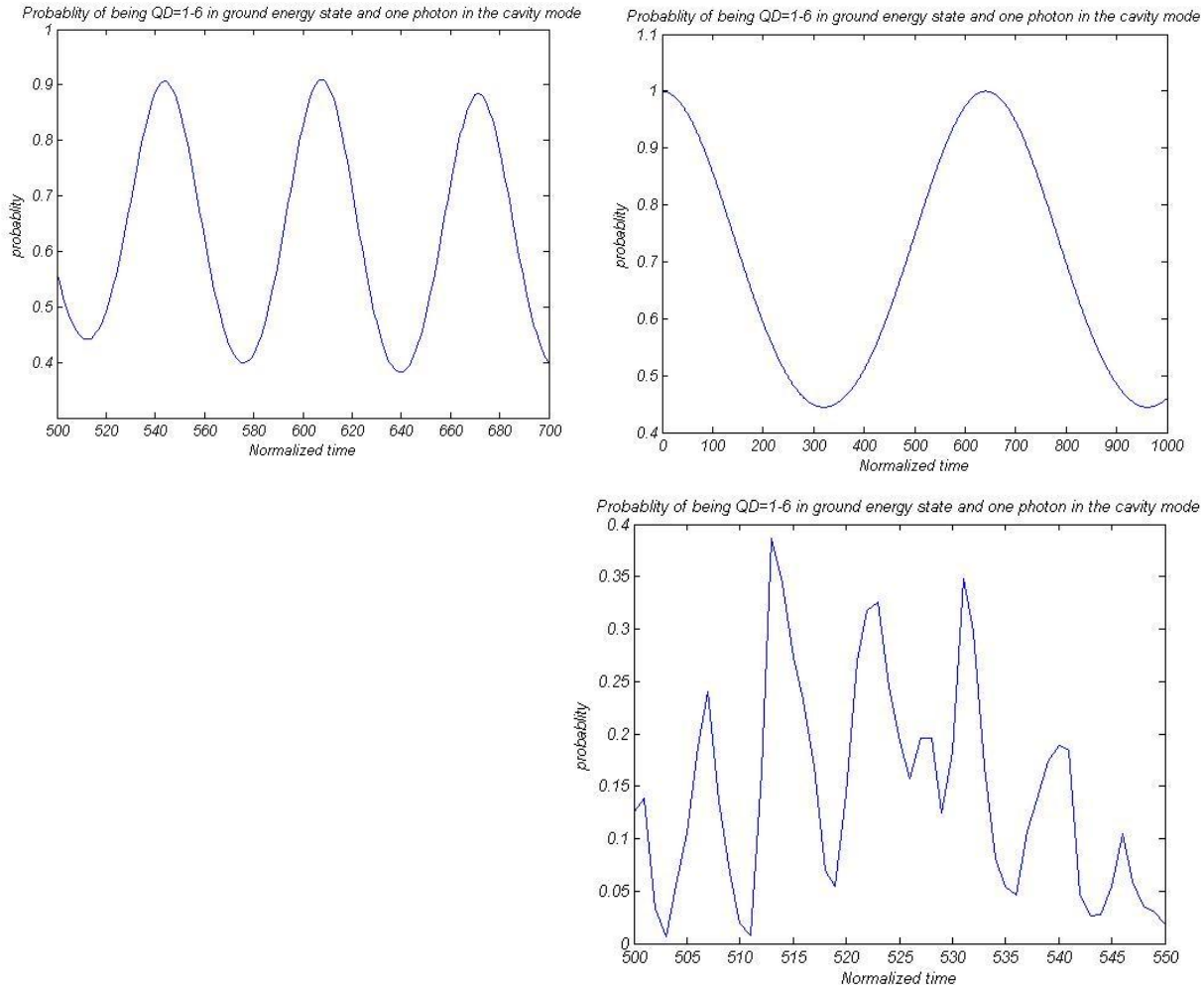
۳-۳-۳ تحلیل و محاسبات احتمال سیستم در حالات مختلف با شرایط

اولیه‌ی فوک

در این قسمت محاسبه‌ی احتمال سیستم در حالت شرایط اولیه‌ی به صورت فوک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در اینجا احتمال حضور سیستم در حالت $|1, g, g, g, g, g\rangle$ را در رژیم‌های تزویج مختلف محاسبه، رسم و مقایسه می‌کنیم. با توجه به رابطه (۲۴-۳) احتمال حالت فوق به صورت زیر خواهد شد.

$$P = |\phi(g, g, g, g, g, g, 1)|^2$$

با استفاده از کد نوشته شده احتمال را محاسبه می کنیم و در شکل (۳-۳۱) رسم می کنیم.



شکل (۳-۳۱) احتمال حضور سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه همدوس در رژیم های تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی، بالا سمت راست، بالا سمت چپ و پایین سمت راست به ترتیب

همان طور که به وضوح دیده می شود در این سیستم الکتروپدینامیک نیز با افزایش میدان الکتریکی اعمالی و در نتیجه افزایش ثابت تزویج و رفتن به رژیم های تزویج بالاتر، دو اتفاق در حال رخ دادن است، اول این که بسامد نوسانات تغییر حالات حضور سیستم در حالت مشخص در نظر گرفته شده افزایش پیدا می کند و دوم این که با ورود به رژیم تزویج بسیار قوی شکل نوسانات از فرم سینوسی خارج شده، بسیار بی نظم و غیرقابل پیش بینی می باشد. همان طور که در بخش قبل توضیح داده شده این اتفاق به دلیل اثر جمله $\hat{\sigma}_{j,i} \hat{a}^{\dagger}$ می باشد. در نتیجه همان طور که در این سیستم هم به وضوح دیده می شود در

رژیم تزویج بسیار قوی به هیچ عنوان مجاز به استفاده از تقریب موج چرخنده نمی‌باشیم.

۳-۳-۴- محاسبه‌ی احتمال حضور نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی مختلف در رژیم های تزویج متفاوت با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس

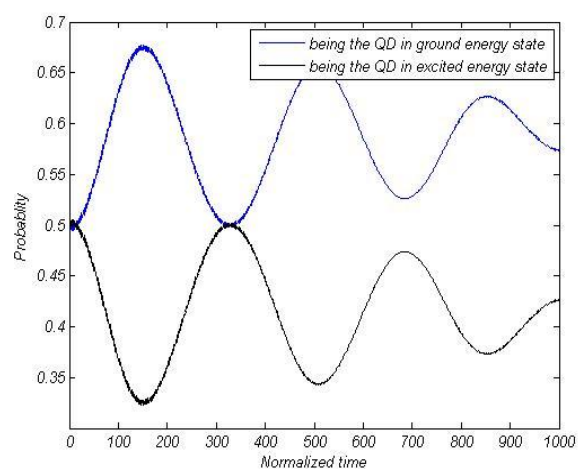
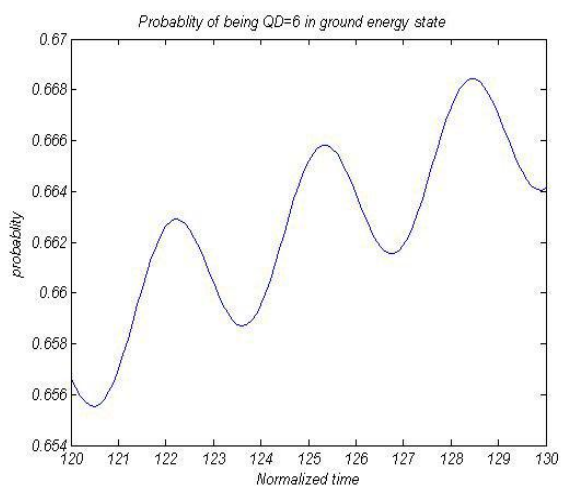
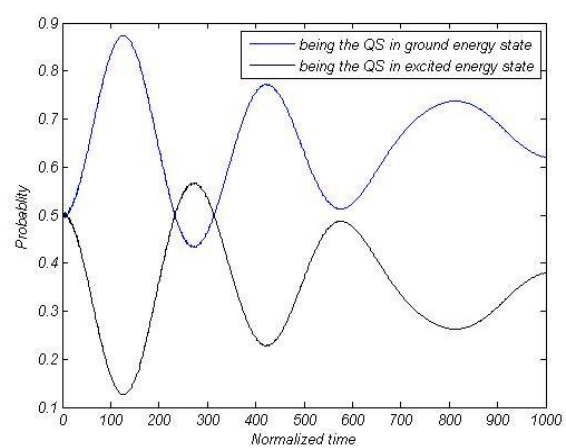
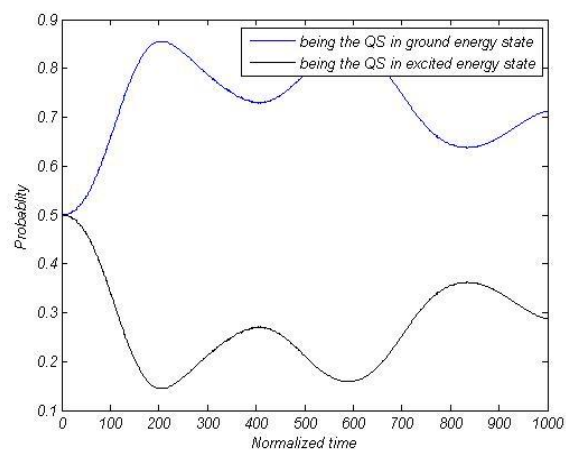
با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۴) احتمال حضور سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این قسمت احتمال حضور نقاط کوانتومی ۱، ۳ و ۶ در هر یک از ترازهایشان مورد بررسی قرار می‌گیرند، رابطه‌ی (۳-۲۴) مثلاً در مورد محاسبه‌ی احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی سوم در تراز انرژی برانگیخته به صورت زیر خواهد شد.

$$P = \sum_{r_1, r_2, r_4, r_5, r_6=g,e} \sum_{f_1=0}^8 |\phi(r_1, r_2, r_{3 \rightarrow e}, r_4, r_5, r_6, f_1)|^2 \quad (3-32)$$

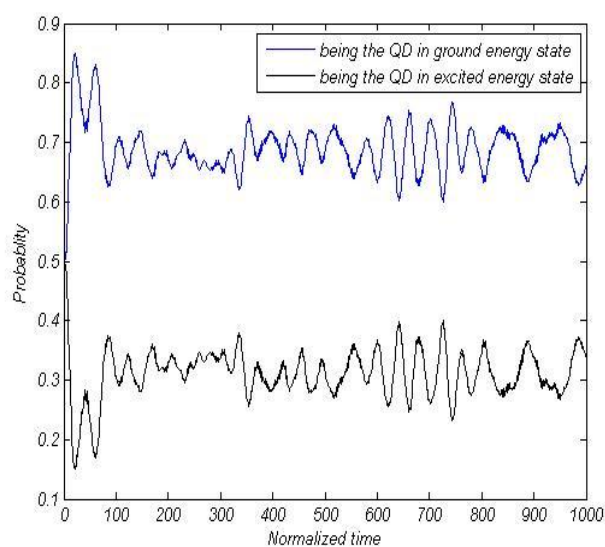
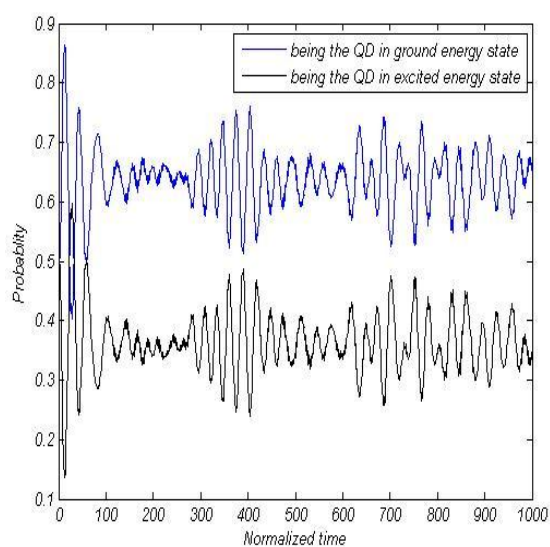
در مورد سایر نقاط هم احتمال به همین صورت نوشته و محاسبه می‌شود، این محاسبات در مورد همه نقاط کوانتومی و حالت‌های آن‌ها نیز انجام شد که به دلیل شباهت و همین‌طور بسیار زیاد شدن شکل‌ها فقط این سه نقطه‌ی کوانتومی مورد بررسی قرار گرفتند. جهت بررسی بهتر، تابع احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی ششم در بازه زمانی کوتاه‌تر هم رسم شده است.

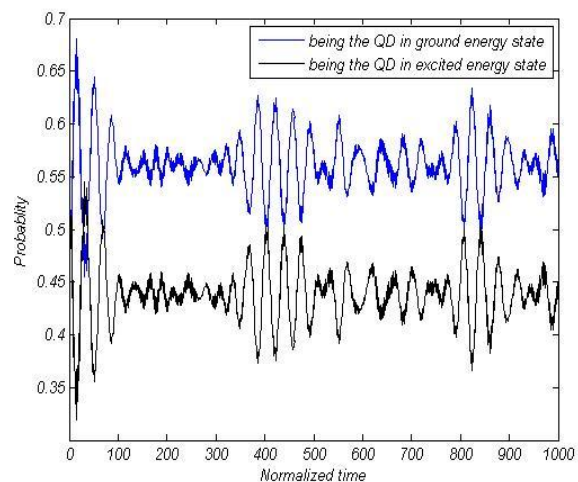
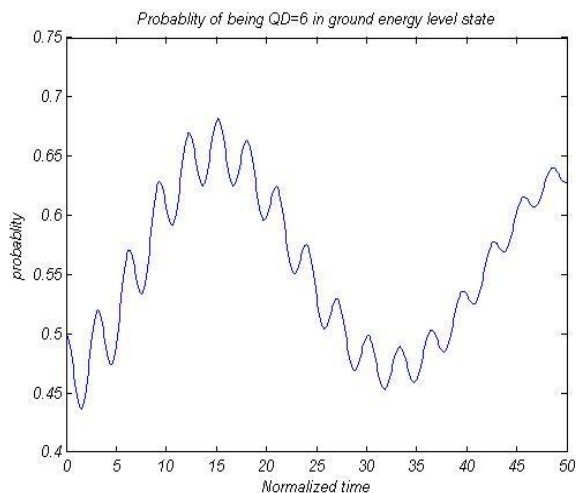
با استفاده از کد نوشته شده، احتمال را در هر حالت و در هر رژیم تزویج محاسبه و در شکل (۳-۳۲) تا

شکل (۳-۳۴) رسم می‌کنیم.

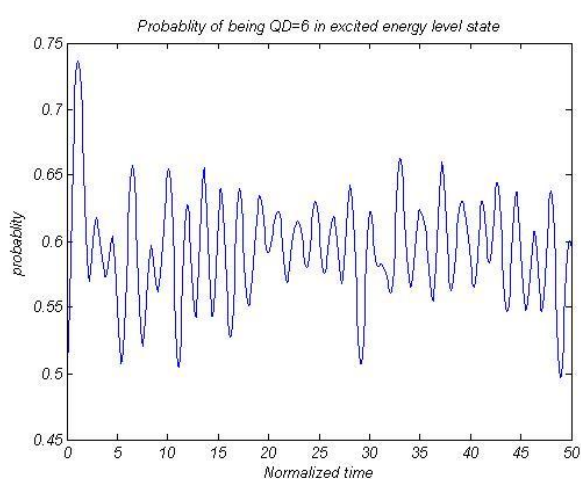
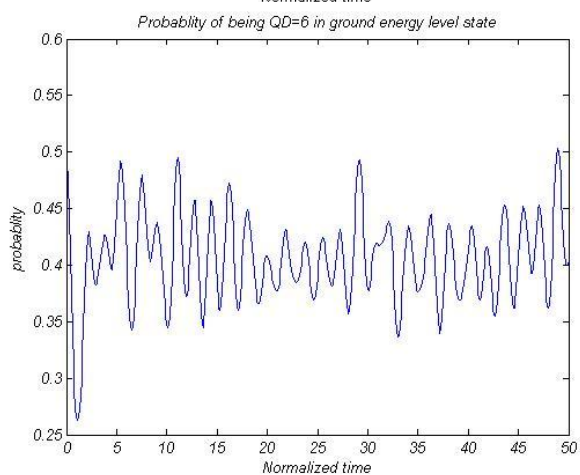
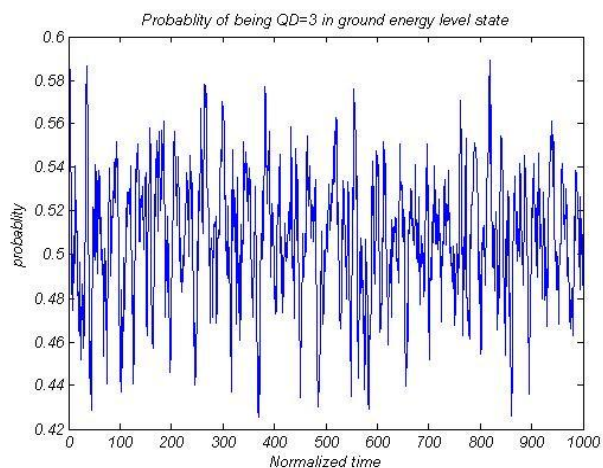
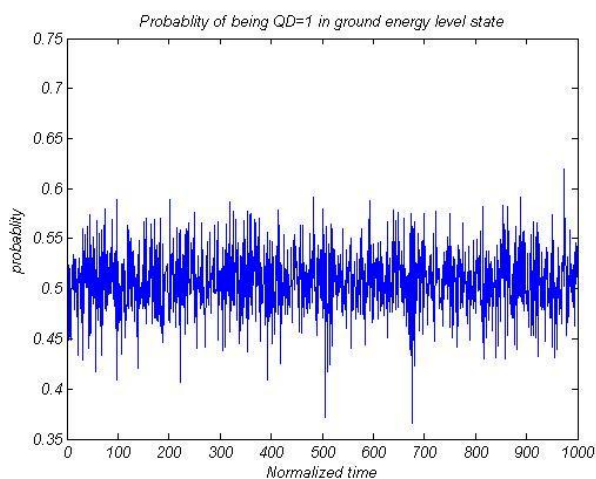


شکل (۳-۳) احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی ۱، ۳، ۶ و سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج ضعیف





شکل (۳-۳) احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی ۱، ۳، و ۶ سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه‌ی هم‌دوس در رژیم تزویج قوی



شکل (۳-۴) احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی ۱، ۳، و ۶ سیستم در حالات مختلف با شرایط اولیه هم‌دوس در رژیم تزویج بسیار قوی

از مقایسه‌ی نمودارهای احتمال حضور هر یک از نقاط کوانتومی در ترازهای انرژی مختلف مشخص

است:

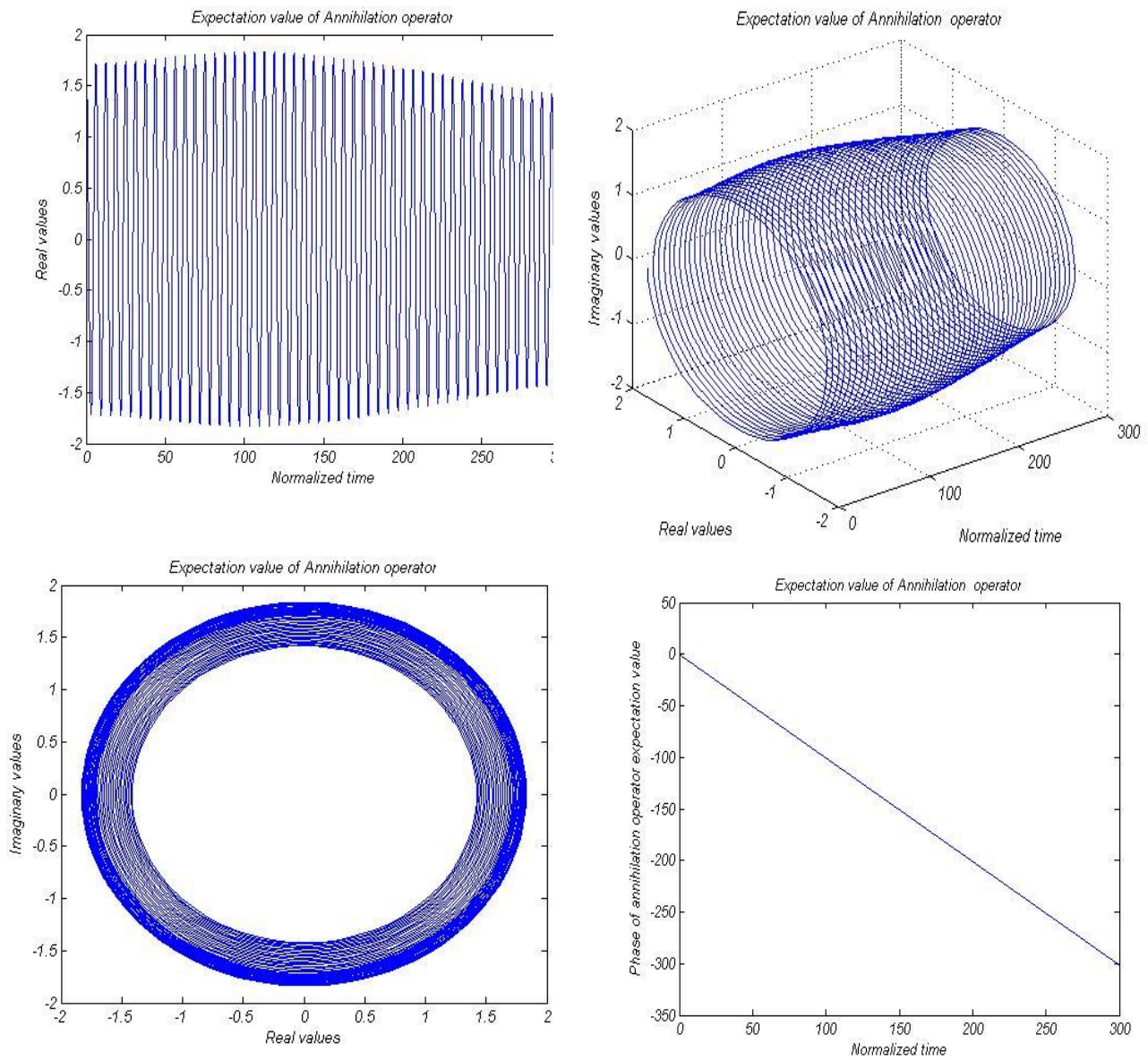
۱. احتمال حضور سیستم در رژیم تزویج ضعیف و قوی به صورت سینوسی و بدون اعوجاج در حال تغییر است و بر روی یک سیگنال مدوله شده است. موید این موضوع بررسی آن‌ها در زمان کوتاه است.
۲. با افزایش میدان الکتریکی اعمال شده و در نتیجه افزایش ثابت تزویج مشاهده می‌شود بسامد تغییر احتمال حضور سیستم افزایش پیدا می‌کند و در حالت تزویج بسیار قوی، بسیار زیاد می‌شود، در مورد ثابت تزویج قوی سیگنال مدوله هم دارای نوسانات بیشتری می‌شود.
۳. در رژیم تزویج بسیار قوی احتمال حضور بر روی یک سیگنال، مدوله نمی‌شود و همان‌طور که در بازه زمانی کوچک‌تر نشان داده شده است به هیچ‌وجه به صورت سینوسی و منظم تغییر نمی‌کند کاملاً مانند حالتی که در شرایط اولیه‌ی فوک رخ داد.
۴. مجموعاً می‌توان گفت با افزایش میدان الکتریکی اعمالی در حالی که ممان گذار و برهم‌کنش ممان دو قطبی‌های تولید شده در هر گذار ثابت است، با افزایش ثابت تزویج احتمال حضور سیستم کوانتومی در ترازهای انرژی رفتاری نامنظم دارد.

۳-۳-۵- محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم‌های تزویج متفاوت

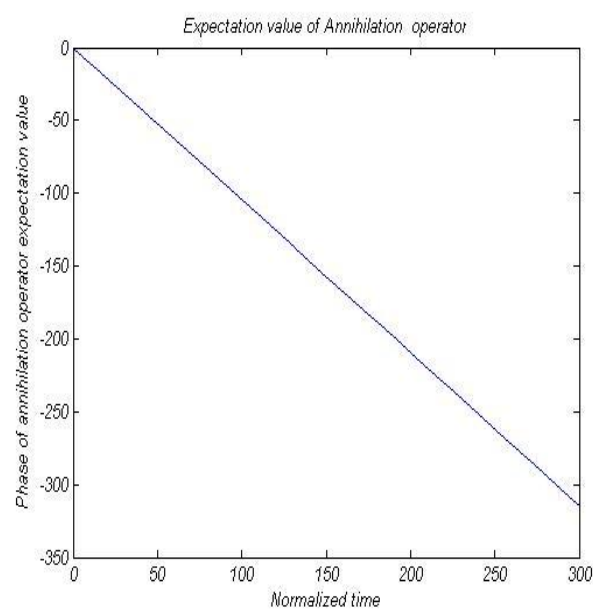
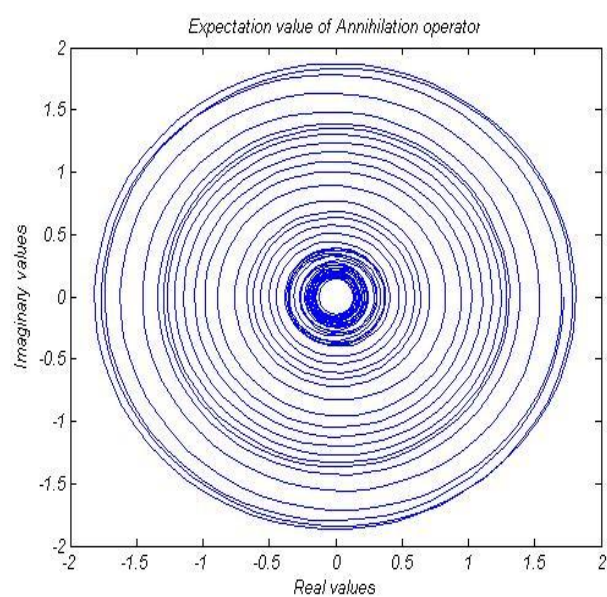
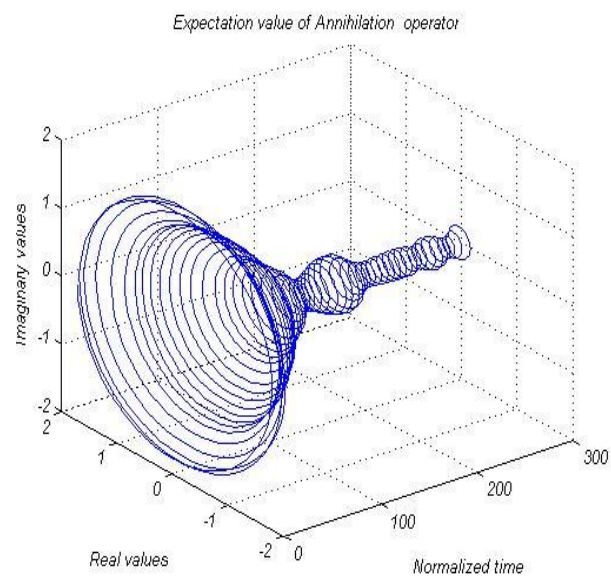
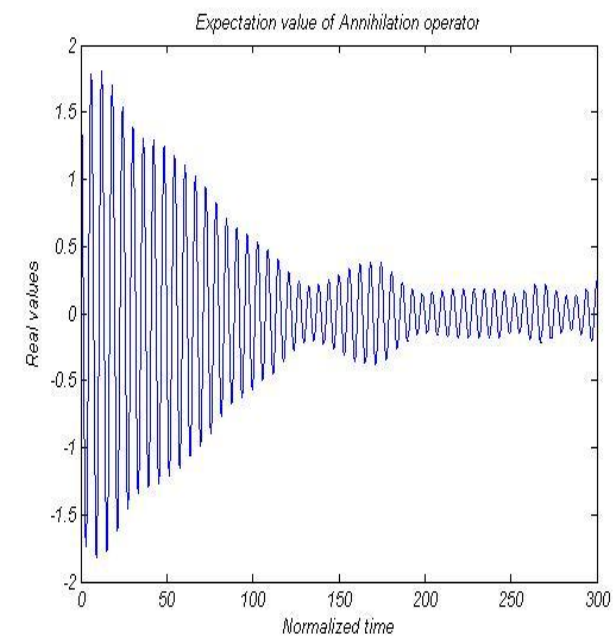
با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۵) چشم‌داشتی سیستم مورد بررسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 = g, e} \sum_{f_1}^8 = 0 \sqrt{f_1} \Phi^*(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1) \Phi(r_1, f_1) \quad (3-33)$$

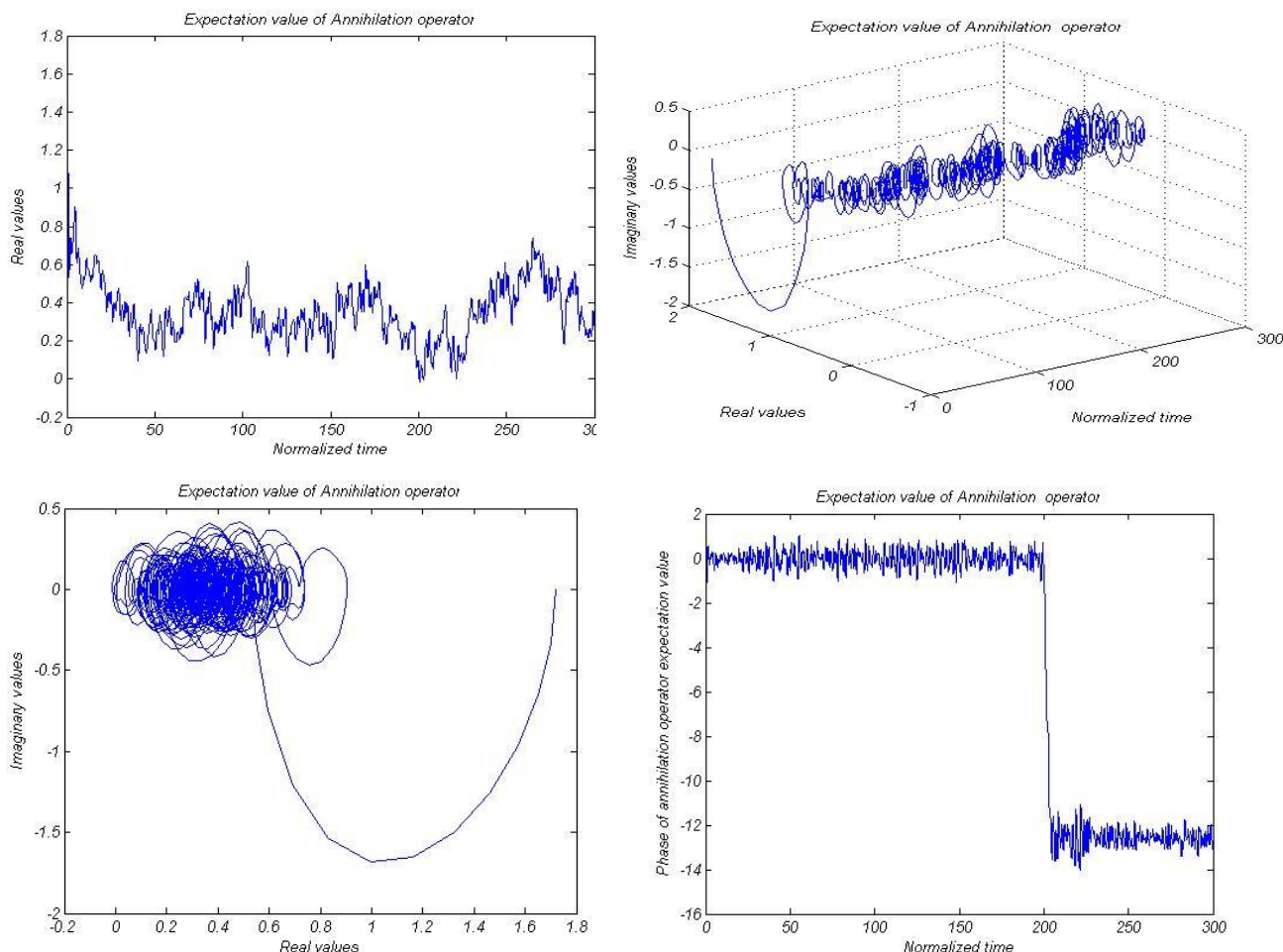
با استفاده از کد نوشته شده، در شکل (۳-۳۵) تا شکل (۳-۳۷) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا رسم شده است.



شکل (۳-۳) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم تزویج ضعیف



شکل (۳-۳۶) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم تزویج قوی



شکل (۳-۳۷) چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در زمان‌های مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی

با مشاهده و مقایسه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر فنا فوتونی در رژیم‌های تزویج متفاوت می‌توان نتیجه گرفت:

- ۱- در یک سیستم الکترودینامیک کوانتومی با تعداد دل‌خواهی نقطه‌ی کوانتومی، هنگامی که ثابت تزویج به اندازه‌ای است که سیستم در رژیم تزویج ضعیف است، رفتار چشم‌داشتی عمل‌گر میدانی و عمل‌گر فنای فوتونی رفتاری کاملاً سینوسی است و نمودار فاز چشم‌داشتی فنا در این رژیم خطی می‌باشد. مشاهده می‌شود که دامنه‌ی تغییرات قسمت حقیقی و موهومی افت ندارد بلکه در زمان تحلیل‌شده اندکی رشد هم داشته است. راه حل پویش آزاد در این رژیم پاسخ‌گو است حتی اگر تعداد نقاط کوانتومی افزایش پیدا کند.

۲- با افزایش ثابت تزویج و ورود سیستم به رژیم تزویج قوی، مشخص است که هم‌چنان رفتار چشم-داشتی عمل‌گر مذکور سینوسی باقی می‌ماند اما دامنه‌ی آن در طول زمان کاهش پیدا کرده است و به عبارتی پوش منحنی رفتار یکسانی ندارد، منحنی فاز هم‌چنان خطی باقی مانده است. در مقایسه با سیستم‌هایی که در بخش‌های قبل بررسی شده بودند کاهش دامنه‌ی قسمت حقیقی و موهومی در این سیستم که تعداد نقاط کوانتومی افزایش یافته است، بسیار بیشتر شده است.

۳- با افزایش بیشتر ثابت تزویج و ورود به رژیم تزویج بسیار قوی مشاهده می‌شود که دیگر چشم‌داشتی عمل‌گر فنای فوتونی رفتاری سینوسی ندارد. با توجه به نمودارها به نظر می‌رسد که هم‌چنان چشم-داشتی کمی فرم پویشی دارد اما کاملاً بی‌نظم و غیرسینوسی، ضمناً نمودار فاز این چشم‌داشتی برحسب زمان دیگر خطی نمی‌باشد. در مقایسه با سیستم‌های بررسی‌شده در بخش‌های قبل مشخص است که نمودار فاز مربوطه بسیار غیرخطی‌تر شده است بدین ترتیب است که تا مدت زمانی با اعوجاج بسیار زیاد درحوالی دامنه‌ی ثابتی تغییر می‌کند اما ناگهان افت بسیار شدیدی دارد و دوباره مانند قبل تغییر می‌کند، به هر حال رفتار بسیار نامنظم شده است.

۴- در نتیجه می‌توان گفت که در این سیستم با تعداد متعدد نقاط کوانتومی نیز، افزایش ثابت تزویج و رسیدن به رژیم تزویج بسیار قوی موجب نامنظم شدن چشم‌داشتی عمل‌گر فنای فوتونی شده و این موضوع ثابت می‌کند که استفاده فرم پویش آزاد وابسته به زمان دیگر ممکن نیست و روش حل کنونی بهترین روش ممکن است.

۳-۳-۶- محاسبه‌ی چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در رژیم‌های تزویج متفاوت

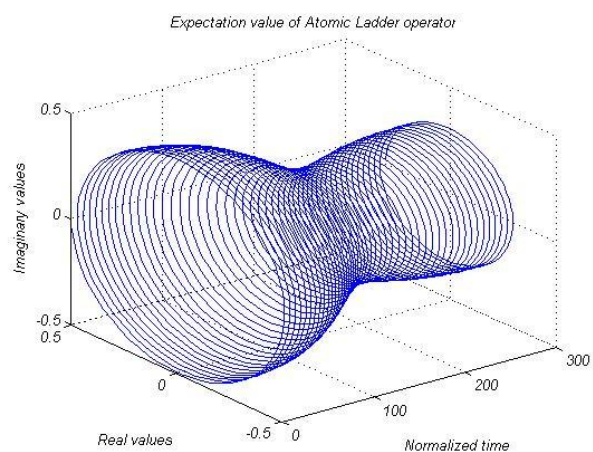
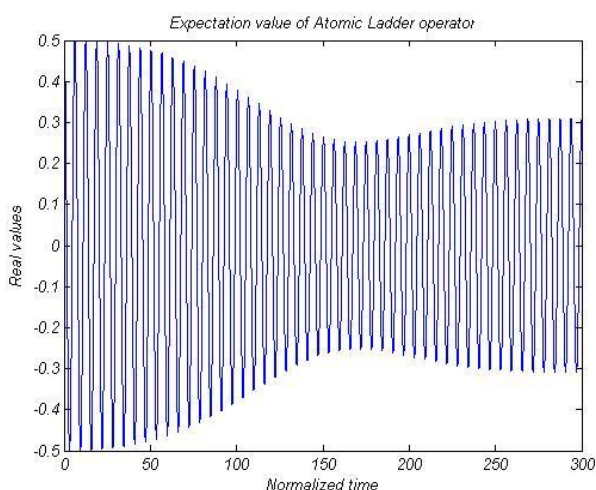
در این قسمت با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۶) چشم‌داشتی گذار اتمی مربوط به دو نقطه‌ی کوانتومی ۲ و ۶ محاسبه و رسم شده‌اند.

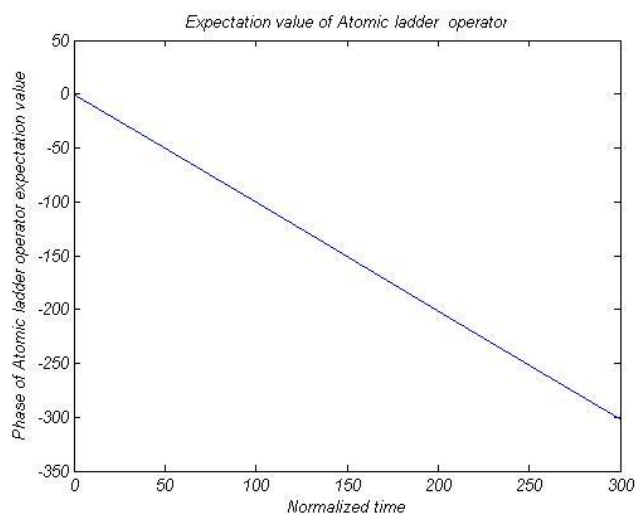
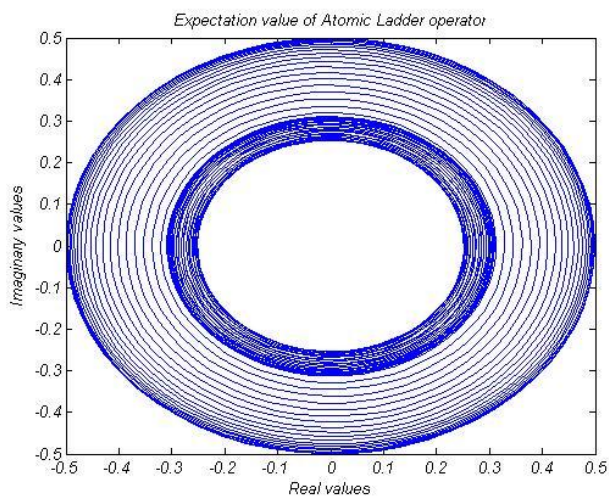
برای مثال چشم‌داشتی گذار نقطه‌ی کوانتومی ۲ با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{g,e}^2 | \varphi(t) \rangle = \sum_{r_1, r_3, r_4, r_5, r_6=g,e} \sum_{f_1=0}^8 \phi^*(r_1, r_{2 \rightarrow g}, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1) \phi(r_1, r_{2 \rightarrow g}, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1) \quad (3-34)$$

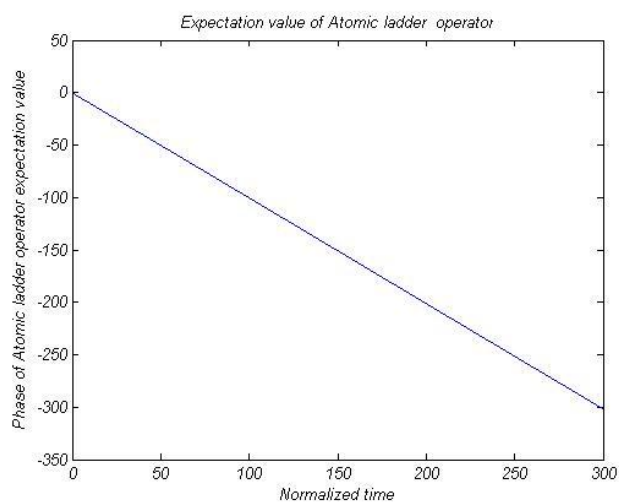
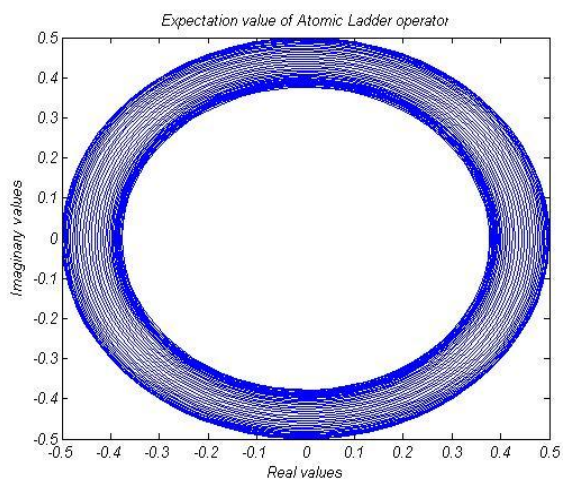
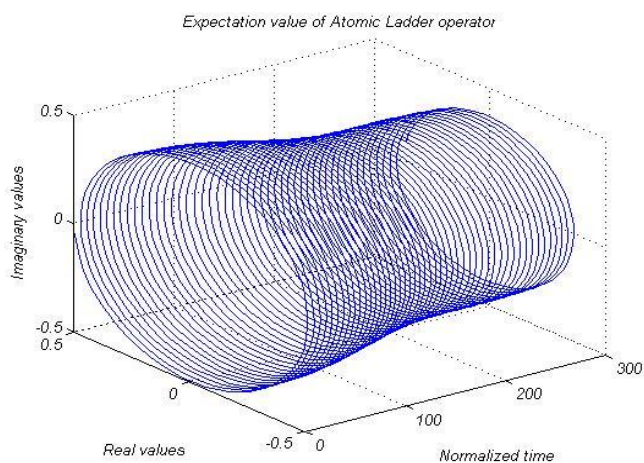
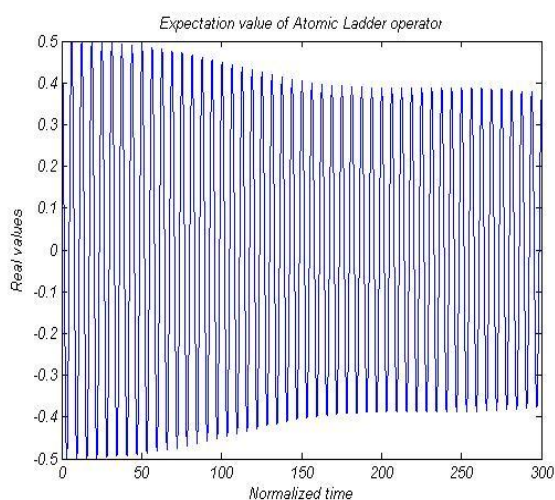
در مورد سایر نقاط هم چشم‌داشتی این عمل‌گر به همین صورت نوشته و محاسبه می‌شود. این محاسبات در مورد همه‌ی نقاط کوانتومی و حالت‌های آن‌ها نیز انجام شد که به دلیل شباهت و زیاد شدن اشکال فقط این ۲ نقطه‌ی کوانتومی آورده شدند.

با استفاده از کد نوشته شده، در شکل (۳-۳۸) تا شکل (۳-۴۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار از تراز انرژی برانگیخته به پایه رسم شده است.

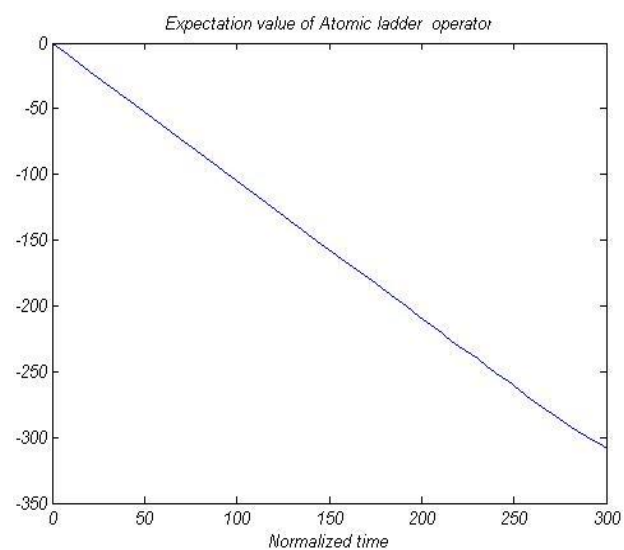
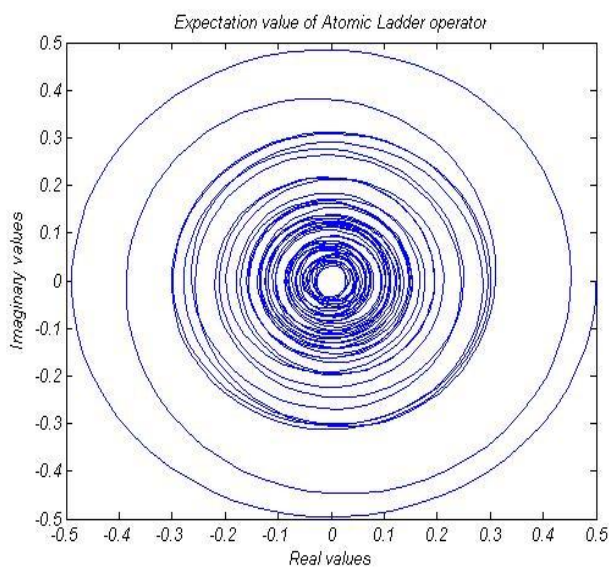
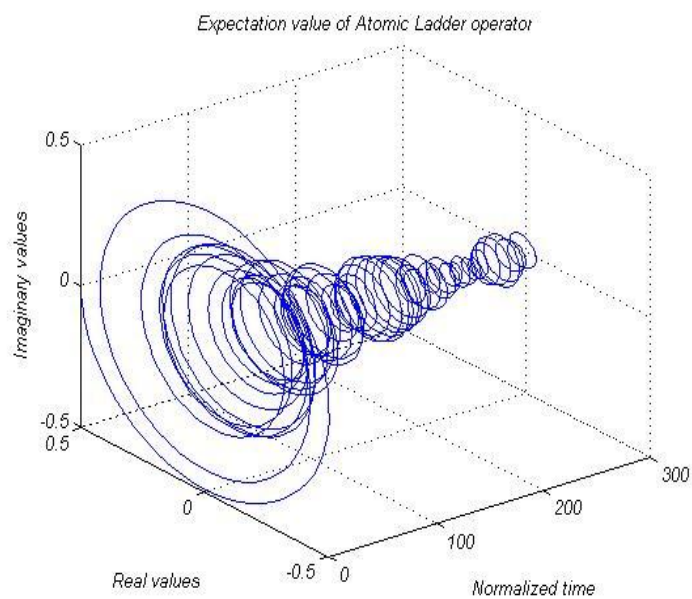
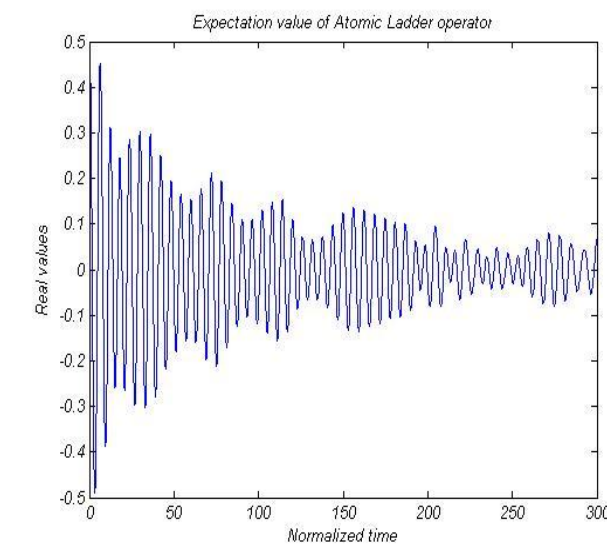




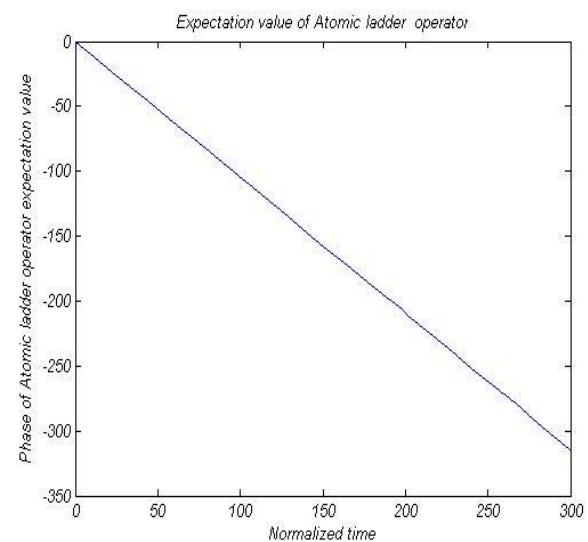
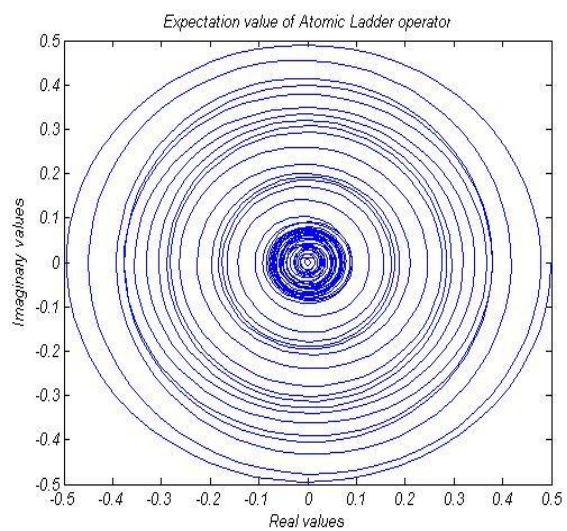
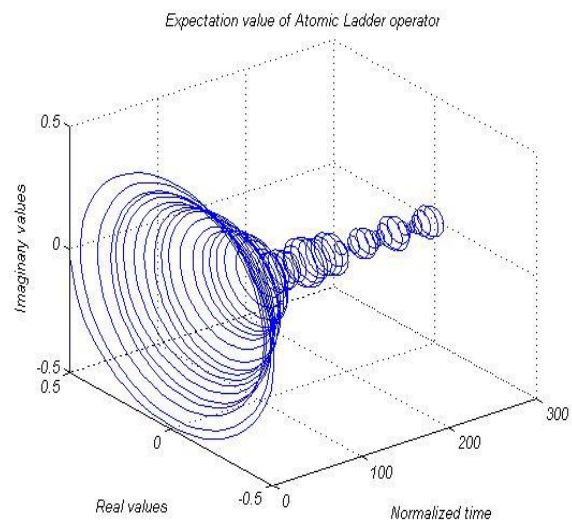
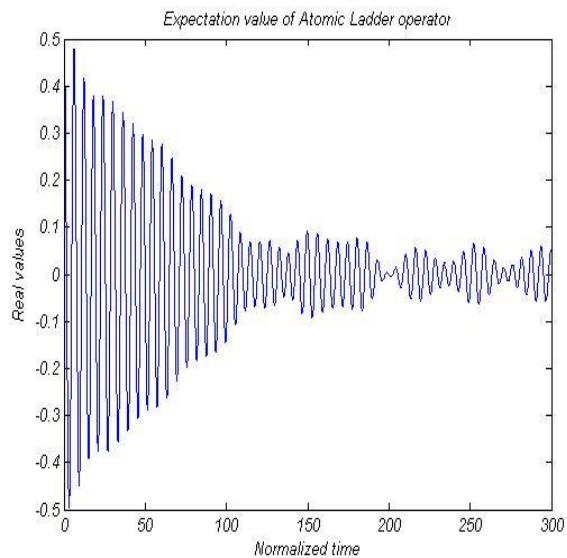
شکل (۳۸-۳) چشم داشتی عمل گر گذار اتمی نقطه‌ای کوانتومی ۲ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم ضعیف



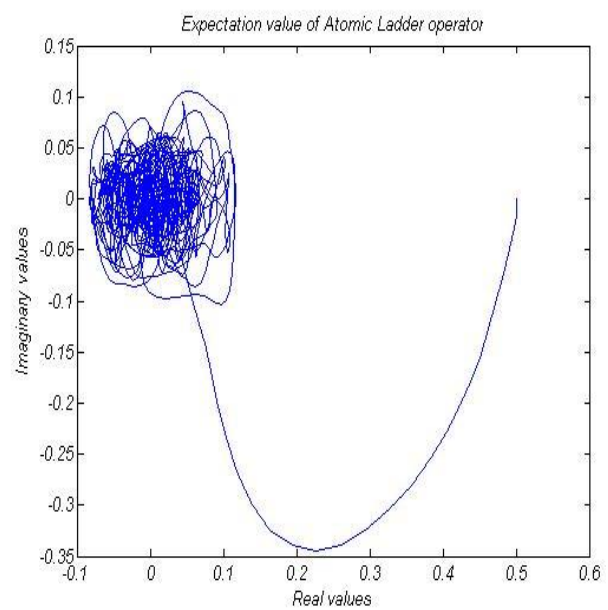
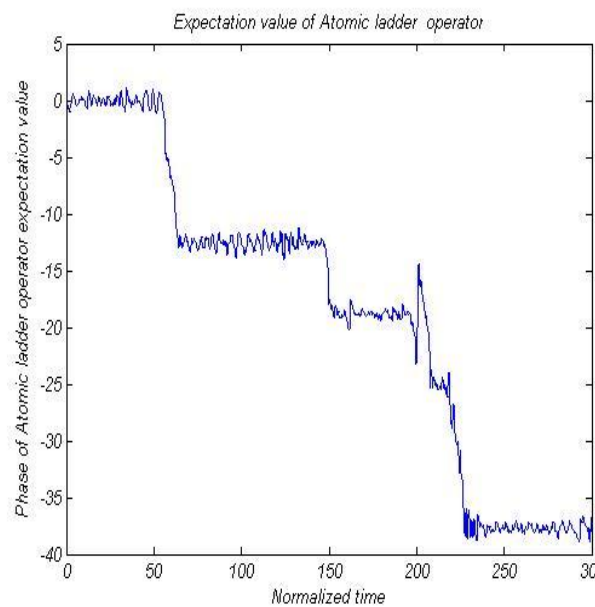
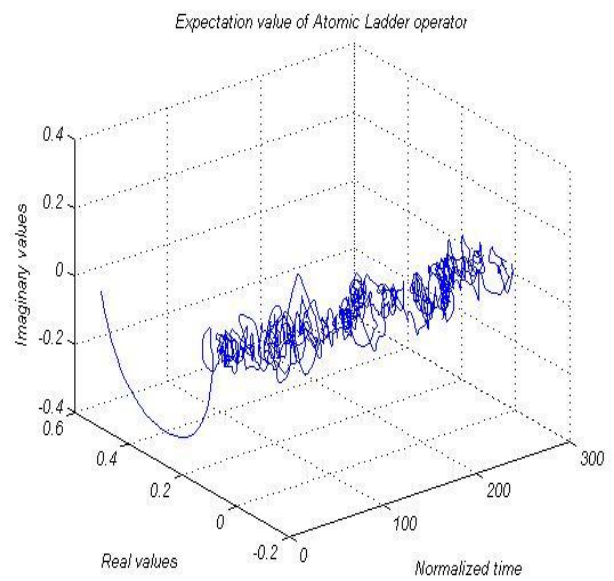
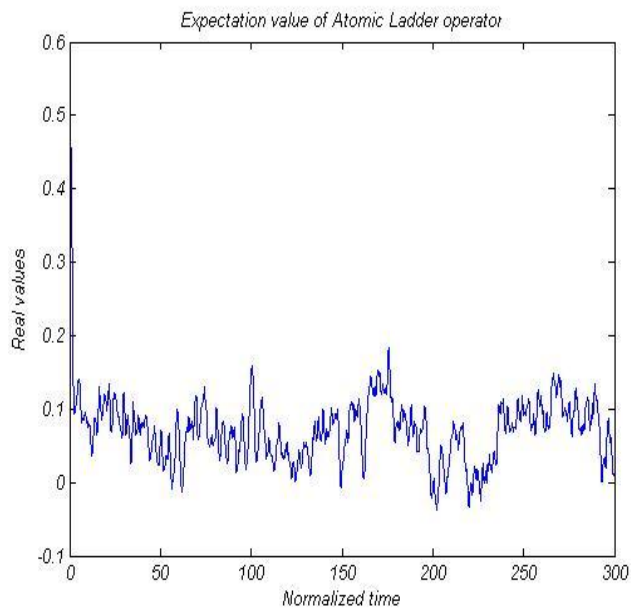
شکل (۳۹-۳) چشم‌داشتی عمل گر گذار اتمی نقطه‌ای کوانتومی ۶ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم ضعیف



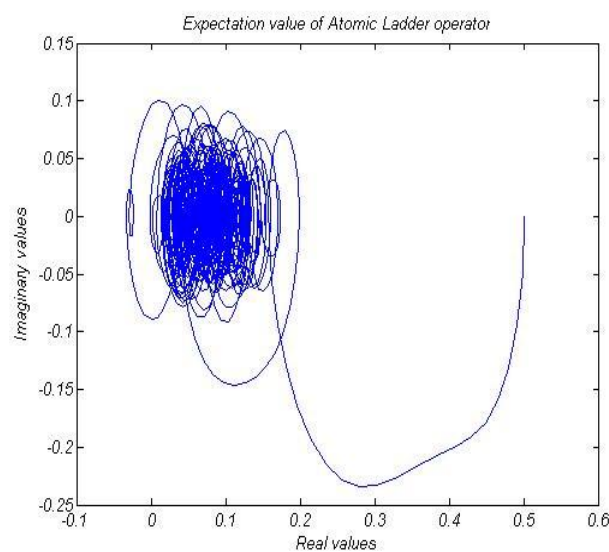
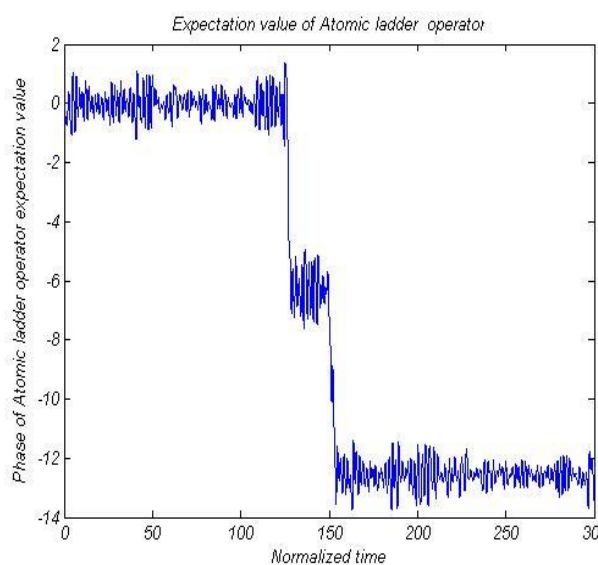
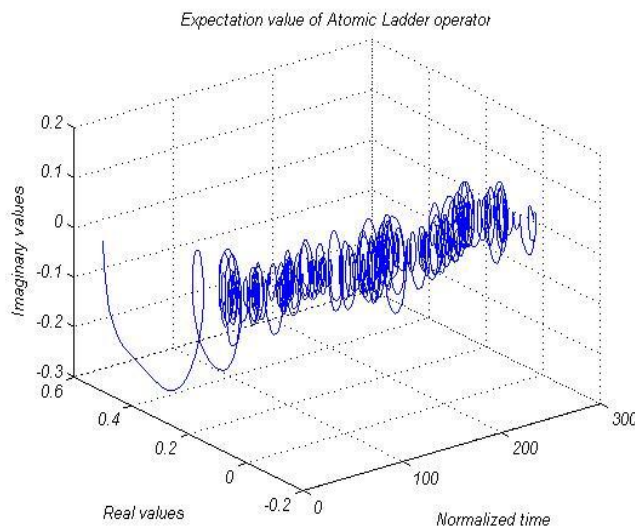
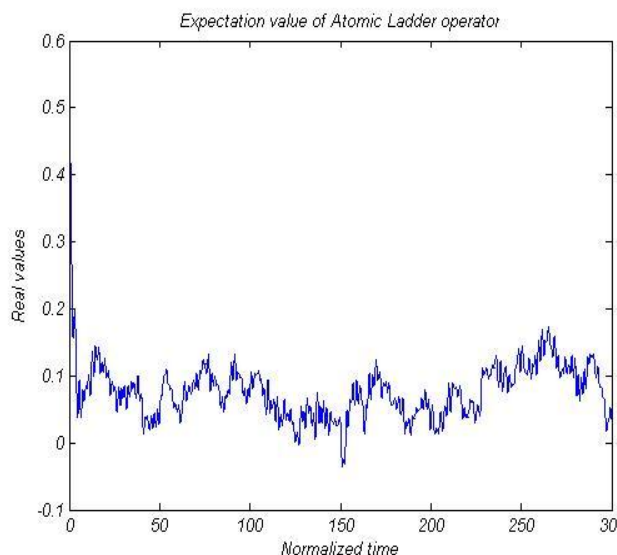
شکل (۳-۴۰) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ای کوانتومی ۲ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم قوی



شکل (۳-۴۱) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار انمی نقطه‌ی کوانتومی ۶ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم قوی



شکل (۳-۴) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه کوانتومی ۲ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم بسیار قوی



شکل (۳-۴۳) چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی نقطه‌ای کوانتومی ۶ در تراز انرژی برانگیخته به پایه در رژیم بسیار قوی

با توجه به مقایسه‌ی نمودارهای فوق:

- ۱- در رژیم تزویج ضعیف رفتار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در گذار از تراز انرژی برانگیخته به پایه رفتاری کاملاً سینوسی است و در زمان بهنجارش طولانی مشاهده می‌شود که دامنه‌ی مقادیر حقیقی و موهومی آن بعد از گذشت زمان مشخصی افت پیدا می‌کند و پس از مدت زمانی ثابت خواهد شد، از مقایسه نمودارهای مربوط به سایر نقاط کوانتومی مشاهده گردید که

این اتفاق در نقاط کوانتومی ۲ و ۳، بیشتر می‌شود اما از نقطه‌ی کوانتومی ۴ تا ۶، بهتر می‌شود همان‌طور هم که در نقطه‌ی کوانتومی ۶، مشاهده می‌شود میزان افزایش افت، کاهش یافته است. منحنی فاز چشم‌داشتی نسبت به زمان خطی می‌باشد و این وضعیت در مورد همه نقاط کوانتومی صادق است.

۲- با ورود به رژیم تزویج قوی رفتار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی در گذار از تراز انرژی برانگیخته به پایین باز هم سینوسی است با این تفاوت که میزان افت دامنه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی در یک زمان خاص بسیار افزایش پیدا کرده است و بعد از آن روند کاهش کم شده است، این اتفاق در مورد همه نقاط کوانتومی به صورت یکسان رخ داده است. منحنی فاز هم همچنان نسبت به زمان خطی می‌باشد و در همه نقاط کوانتومی هم بدین ترتیب است.

۳- اما در رژیم تزویج بسیار قوی همان‌طور که پیش‌بینی هم می‌شد در هر حالت گذار در هر نقطه کوانتومی رفتار نامنظم می‌شود اگرچه به نظر می‌رسد که تغییرات بر حسب زمان فرم پویشی دارد اما به هیچ‌وجه سینوسی یا سوار بر سیگنال سینوسی یا صافی نیست و غیرقابل پیش‌بینی. ضمناً منحنی فاز بر حسب زمان هم بسیار غیرخطی است و روند تغییرات آن تا حدی شبیه تغییرات نمودار فاز چشم‌داشتی عمل‌گر فنای فوتونی است.

۴- مجموعاً می‌توان گفت در تزویج بسیار قوی، سیستم دچار آشوبی شده است.

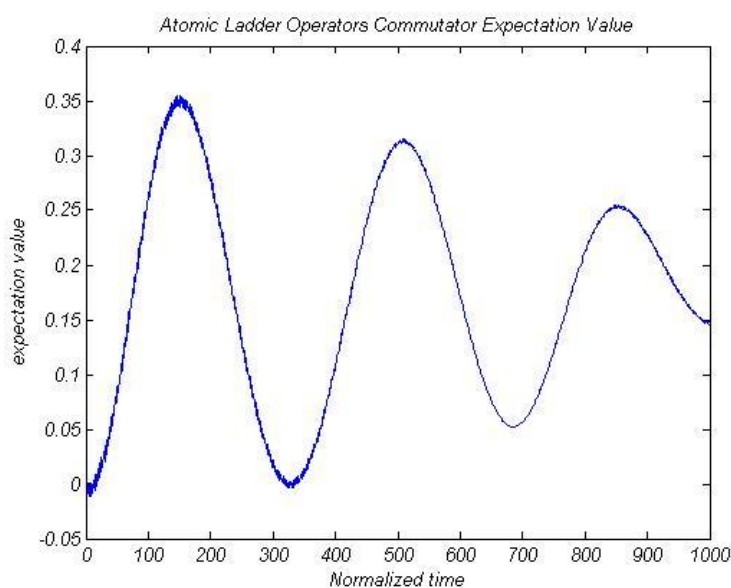
۳-۳-۷ محاسبه‌ی در هم‌تنیدگی از طریق چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گر گذار اتمی

در این قسمت با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۷) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گر گذار اتمی مربوط به نقاط کوانتومی محاسبه و رسم شده‌اند، برای مثال چشم‌داشتی جابجاگر گذار نقطه کوانتومی ششم، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

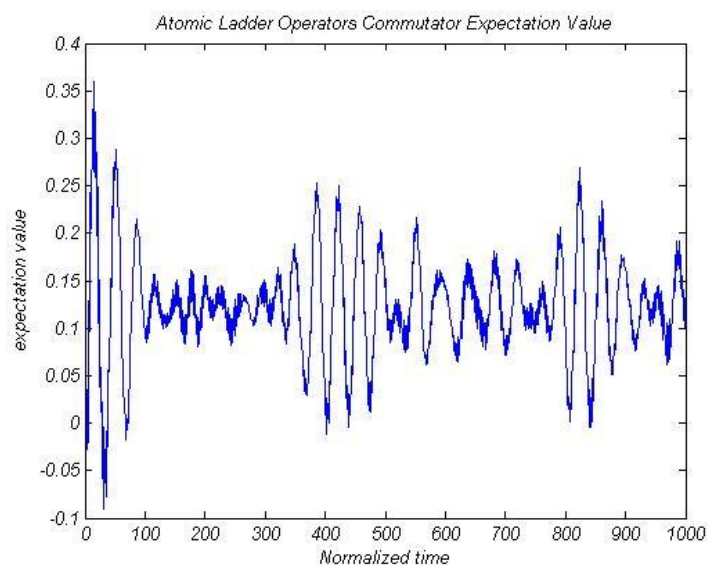
$$\begin{aligned} & \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{g,e}^6, (\hat{\sigma}_{g,e}^6)^\dagger] | \varphi(t) \rangle \\ &= \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5=g,e} \sum_{f_1=0}^8 |\phi(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_{6 \rightarrow g}, f_1)|^2 \\ & \quad - |\phi(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_{6 \rightarrow e}, f_1)|^2 \end{aligned} \quad (3-35)$$

در مورد سایر نقاط هم چشم‌داشتی این عمل‌گر به همین صورت نوشته و محاسبه می‌شود، این محاسبات در مورد همه‌ی نقاط کوانتومی و حالت‌های آن‌ها نیز انجام شد که به دلیل شباهت و زیاد شدن اشکال، فقط یک نقطه‌ی کوانتومی آورده شده است.

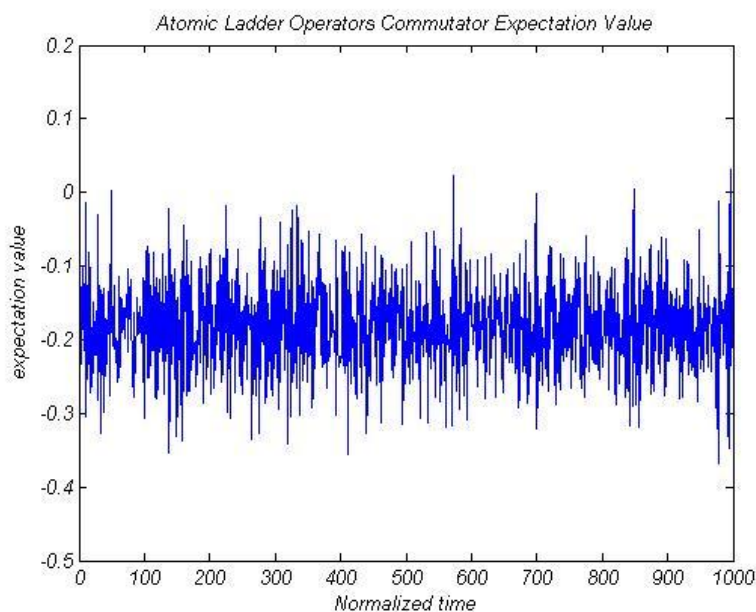
با استفاده از کد نوشته‌شده چشم‌داشتی جابجایی عمل‌گرهای مذکور در شکل (3-44) تا شکل (3-46) -
 (46) رسم شده است.



شکل (3-44) چشم‌داشتی جابجاگر عمل‌گرهای گذار اتمی تراز انرژی برانگیخته به پایه نقطه کوانتومی 6 در رژیم تزویج ضعیف



شکل (۳-۴۵) چشم‌داشتی جابجاگر عمل گرهای گذار اتمی تراز انرژی برانگیخته به پایه‌ی نقطه‌ی کوانتومی ۶ در رژیم تزویج قوی



شکل (۳-۴۶) چشم‌داشتی جابجاگر عمل گرهای گذار اتمی تراز انرژی برانگیخته به پایه نقطه‌ی کوانتومی ۶ در رژیم تزویج بسیار قوی

آنچه که از نمودارها مشخص است:

۱. رفتار چشم‌داشتی جابجاگر عمل گر گذار اتمی مربوط به هر یک از نقاط کوانتومی شبیه رفتار

احتمال حضور سیستم است و با افزایش ثابت تزویج بسامد تغییرات مقدار چشم‌داشتی

افزایش پیدا کرده است.

۲. با افزایش ثابت تزویج تغییرات مقدار چشم‌داشتی جابجاگر بر حسب زمان از فرم سینوسی و سوار شده بر یک سیگنال مدوله خارج شده و همان‌طور که در نمودارها هم واضح است دچار بی‌نظمی می‌شود.
۳. آنچه که مشخص است با افزایش ثابت تزویج مقدار منفی چشم‌داشتی افزایش پیدا می‌کند و این موضوع در مورد همه‌ی نقاط کوانتومی صادق است.

فصل ۴ : نتیجه‌گیری و کارهای آینده

در این پایان نامه سیستم های اپتیک کوانتومی شامل سیستم کوانتومی ساطع کننده ی نور کوانتومی شامل تعداد دل خواه نقطه ی کوانتومی دو ترازه یا چاه پتانسیل کوانتومی معادل یک سیستم کوانتومی سه ترازه در برهم کنش با تعداد دل خواه مدهای کاواک بررسی شدند. به منظور بررسی و تحلیل این سیستم ها به دلیل بالا بودن تعداد حالات، امکان محاسبه و تحلیل دستی این سیستم ها ممکن نبود و نیاز بود کلیه ی مراحل از طریق برنامه ی کامپیوتری انجام شود. بنابراین با به دست آوردن روابط مورد نیاز، برنامه های مورد نیاز تحلیل سیستم و تولید شرایط اولیه سیستم در کلی ترین حالت ممکن نوشته شدند. با داشتن نرم افزاری جامع، تحلیل و تولید شرایط اولیه ی سیستم های پیچیده ممکن شد، مطالعه و تحلیل این سیستم ها را با سیستمی متشکل از دو نقطه کوانتومی دو ترازه آغاز کردیم. سپس یک سیستم واقعی را که در آن یک چاه پتانسیل کوانتومی معادل یک سیستم سه ترازه بود و در نهایت یک سیستم چند بخشی شامل شش نقطه کوانتومی در برهم کنش با یک مد کاواک را در سه رژیم تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی مورد بررسی قرار دادیم. کلیه ی مقادیر احتمال حضور سیستم در حالت های مختلف را در شرایط اولیه حالت فوک و هم دوس محاسبه کردیم و همین طور کلیه ی مقادیر چشم داشتی عمل گرهای میدانی و اتمی و جابجاگر عمل گر گذار اتمی را محاسبه کردیم. جزئیات نتایج کلیه ی مشاهدات در فصل سوم آورده شده اما کلی ترین نتایج عبارت بودند از این که در همه ی سیستم های تحلیل شده در حالت اعمال شرایط اولیه در رژیم تزویج خیلی قوی نشان داده شد که به کارگیری تقریب موج چرخنده و استفاده از تصویر برهم کنش های زبرگ مردود است و اماکن پذیر نیست، ضمناً با افزایش ثابت تزویج حاصل از تغییر ساختار سیستم کوانتومی یا افزایش میدان برهم کنش و به دنبال آن افزایش بسامد رابی، سیستم به شدت دچار بی نظمی می شد. احتمال حضور سیستم در حالات مختلف اصلاً به صورت سینوسی یا سوار بر یک سیگنال مدوله نبود و بسامدهای تغییر حالات به صورت سقوط و احیا بسیار افزایش پیدا می کرد. و دیگر اینکه چشم داشتی عمل گرهای میدان و اتم نیز به هیچ وجه به صورت پویشی باقی نماندند و به نوعی سیستم دچار بی نظمی شده بود. به طور کلی با تحلیل و مشاهده ی رفتار سیستم -

های مذکور، راه برای مطالعه شرایط و دلایل بی نظمی و آشوبی در رژیم تزویج بسیار قوی فراهم شده است.

با توجه به تهیهی برنامهی جامع تحلیل سیستمهای کوانتومی بسیار پیچیده، در آینده به تحلیل سیستمهای پیچیدهتر خواهیم پرداخت. همینطور سیستمهایی را در رژیمهای تزویج مختلف مورد تحلیل قرار خواهیم داد که تعداد مدهای کاواک در آنها بیشتر از یک مد باشد. در بخش دیگر سیستمهایی با شرایط اولیهی متفاوت از شرایط اولیهی فوک و هم دوس تحلیل خواهیم کرد و نقش شرایط اولیه در رفتار سیستم از جمله رفتار آشوبی سیستم در تزویجهای بسیار قوی را مطالعه خواهیم نمود. همچنین می توان هامیلتونی توصیف کننده این سیستمها را با افزودن بخشی که توصیف کنندهی عوامل دیگر مانند غیرخطی بودن ساختار سیستم کوانتومی است، تعمیم و کامل تر نمود و سیستمهای واقعی تری را مورد تحلیل و بررسی قرار داد.

فصل ۵ : سپاس‌گزاری

این پژوهش توسط بنیاد ملی علوم ایران (Iranian National Science Foundation: INSF)، مورد حمایت قرار گرفته است.

فهرست الف: کد برنامه ها

```
clear all
close all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%to import required inputs
energylev=input('enter the number of energy levels please:');
save('energylevv','energylev');
QDno=input('enter the number of Quantum dots please:');
save('QDnoo','QDno');
N=input('enter the number of photons please:');
save('PhotonsNum','N');
cavitym=input('enter the number of cavity modes please:');
save('cavitymm','cavitym');
fockorcoherent=input(' Please enter F if fock state, enter C if coherent
sate:\n','s');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%measurment of initial fock state
if strcmp(fockorcoherent,'F')
    data1=input('In which energy level are quantum dots initially?nenter
the number of specified energy levels from the first quantum dot to the
last one:\n','s');
    data1=str2num(data1);
    data3=input('How many photons are in cavity modes exactly\nenter the
number of specified photons from the first cavity mode to the last
one:\n','s');
    data3=str2num(data3);
    a1=size(data3);
    jum=1;
    jam=1;
    for i=1:1:a1(1,2)
        jum=(data3(1,i))*(N+1)^(cavitym-i);
        jum=jum+jum;
    end
    a2=size(data1);
    for i=1:1:a2(1,2)
        jam=(data1(1,i)-1)*(energylev^(QDno-i));
        jam=jam+jam;
    end
    point=jam+(jum-1)*energylev;
    a=(energylev)^(QDno)*(N+1)^(cavitym);
    phii=zeros(1,a);
    phii(1,point)=1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%measurement of initial coherent state
else
    L=input('enter the avarage number of photons in the coherent state
please:\n');
    va1=(energylev)^(QDno);
    va2=sqrt(1/va1);
```

```

x=zeros(1,va1);
phase=input('enter N if energy level states have no phase, and Y if
they have:\n','s');
if strcmp(phase,'N')
    for i=1:1:va1
        x(1,i)=va2;
    end
    xx=x;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %to affect the phase of a specified energy level on the initial
coherent states
else
    va2=sqrt(1/energylev);
    x=[];
    data4=input('enter the phase of each energy level state of each
quantum dot repectively in one row of an input matrix(radian)\n','s');
    data4=str2num(data4);
    for i=1:QDno
        for j=1:energylev
            theta=data4(i,j);
            [R,I]=pol2cart(theta,va2);
            ij=(R+I*1i);
            x=[x,ij];
        end
    end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %to specify the state of energy levels of every quantum
dot
    xx=[];
    for jjj=0:1:(energylev)^(QDno)-1;
        jav=[];
        sel=jjj;
        if jjj<energylev
            mode=mod(sel,energylev);
            divide=floor(sel/energylev);
            jav=[jav,mode];
            if divide<energylev
                jav=[jav,divide];
                sel=divide;
            end
        else
            while sel>=energylev
                mode=mod(sel,energylev);
                divide=floor(sel/energylev);
                jav=[jav,mode];
                if divide>=energylev
                    sel=divide;
                else if divide<energylev
                    jav=[jav,divide];
                    sel=divide;
                end
            end
        end
    end
    if QDno==1
        jav=jav(1,1);
    end
end

```

```

else
    sizee=size(jav);
    for j=sizee(1,2)+1:1:QDno
        jav=[jav,0];
    end
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ta inja har satr tabdil be code
shod
end
javvv=1;
for zz=1:QDno
    javv=jav(zz)+1+(QDno-zz)*energylev;
    javvv=javvv*x(javv);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ta inja hasle zarbe har satr be dast aamad
xx=[xx,javvv];
sumxx=sum(abs(xx).^2);
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% writing the state of photons in cavity modes
for n=0:N
    y(n+1)=sqrt(((L^(n))*exp(-L))/factorial(n));
end
y=y.*(sqrt(1/(sum(y(1,1:end).^2))));
plot(0:N,y)
phii=[];
NN=(N+1)*cavitym;
if cavitym==1
    for ii=1:1:N+1
        for i=1:1:val
            phig(1,i)=xx(1,i)*y(1,ii);
        end
        phii=[phii,phig];
    end
else
    for iii=0:1:(N+1)^(cavitym)-1;
        anse=[];
        m=iii;
        if iii<N+1
            mode=mod(m,(N+1));
            divide=floor(m/(N+1));
            anse=[anse,mode];
            if divide<N+1
                anse=[anse,divide];
                m=divide;
            end
        else
            while m>=N+1
                mode=mod(m,(N+1));
                divide=floor(m/(N+1));
                anse=[anse,mode];
                if divide>=N+1
                    m=divide;
                else if divide<N+1
                    anse=[anse,divide];
                    m=divide;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

                                end
                            end
                        end
                    end
                if cavitym==1
                    anse=anse(1,1);
                else
                    sizee=size(anse);
                    for j=sizee(1,2)+1:1:cavitym
                        anse=[anse,0];
                    end
                end
                anseee=1;
                for jj=1:cavitym
                    ansee=anse(jj);
                    anseee=anseee*y(ansee+1);
                end
                for i=1:1:val
                    phig(1,i)=xx(1,i)*anseee;
                end
                phii=[phii,phig];
            end
        end
    end
    y0=phii';
    save('phi0','y0')
    a=(energylev)^(QDno)*(N+1)^(cavitym);
    sum((abs(y0).^2),1)
    plot(0:a-1,phii)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%importing data%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w=importdata('CQED.txt');
QDno=str2num(w{1}); %number of quantum dots
energylev=str2num(w{2}); %number of energylevels
cavitym=str2num(w{3}); %number of cavity modes
n=str2num(w{4}); %number of photons allowed in each
cavity mode
b=str2num(w{5}); %eign-frequencies of each mode of the
cavity
c=str2num(w{6}); %energies of energy levels of each
quantum dot
g=str2num(w{7}); %coupling factor
if cavitym>1
    for i=8:6+cavitym
        g(:, :, i-6)=str2num(w{i}); %coupling factor
    end
end
gstar=conj(g);
eta=str2num(w{cavitym+7});
etastar=conj(eta);
%phi0=str2num(w{cavitym+8});
phii=load('phi0.mat');
phi0=phii.y0;

```

```

a=(energylev)^(QDno)*(n+1)^(cavitym);
a1=(energylev)^(QDno);
a2=(n+1)^(cavitym);
save('num1','a1');
save('num2','a2');
A=zeros(a,a);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% writing H0 elements%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%First term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for q=1:(energylev)^(QDno)
    for nn=1:1:QDno
        j=floor((q-1)/(energylev)^(nn-1))+1;
        if mod(j,(energylev))==0
            jj=energylev;
        elseif mod(j,(energylev))~=0
            jj=mod(j,(energylev));
        end
        mmm=QDno-(nn-1);
        A(q,q)=A(q,q)+c(mmm,jj);
    end
end
for m=1:(n+1)^cavitym-1
    for mm=1:energylev^QDno
        A(m*energylev^QDno+mm,m*energylev^QDno+mm)=A(mm,mm);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Second term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F=0:n;
N=zeros(1,cavitym);
for ii=1:energylev^QDno*(n+1)^cavitym
    for i=1:cavitym
        B=floor((ii-1)/((n+1)^(cavitym-i)*energylev^QDno));
        F2=circshift(F,[0,-B]);
        N(i)=F2(1);
    end
    A(ii,ii)=A(ii,ii)+sum(N.*b);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% writing Hr.E elements%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%First & third term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for qq=cavitym:-1:1
    s=(n+1)^(cavitym-qq)*energylev^QDno;
    for i=1:energylev^QDno-1
        for j=s+1:s+i
            A(i,j)=A(i,j)+0;
        end
        if mod(i,energylev)~=0
            k=energylev-mod(i,energylev);
            jj=0;
            for q=1:mod(i,energylev)-1
                jj=jj+energylev-q;
            end
            for j=s+i+1:s+i+k
                A(i,j)=A(i,j)+g(QDno,jj+j-s-i,qq);
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    for m=1:QDno-1
        l=mod(floor((i-1)/(energylev^m)),energylev^m)+1;
        jj=0;
        for q=1:l-1
            jj=jj+energylev-q;
        end
        for d=1:energylev-1
            j=s+i+d*energylev^m;
            A(i,j)=A(i,j)+g(QDno-m,jj+d,qq);
        end
    end
end
block=A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno);

A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno)=A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno)+block.';
block2=A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno);
for q=1:(n+1)^cavitym-(n+1)^(cavitym-qq)-1
    F2=circshift(F,[0,-floor(q/((n+1)^(cavitym-qq))-1)]);

A(q*energylev^QDno+1:(q+1)*energylev^QDno,s+q*energylev^QDno+1:s+(q+1)*energylev^QDno)=block2*sqrt(F2(1));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%second & forth term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for qq=cavitym:-1:1
    s=(n+1)^cavitym*energylev^QDno-(n+1)^(cavitym-qq)*energylev^QDno-energylev^QDno;
    for i=a-energylev^QDno+1:a-1
        ii=i-a+energylev^QDno;
        for j=s+1:s+ii
            A(i,j)=A(i,j)+0;
        end
        if mod(ii,energylev)~=0
            k=energylev-mod(ii,energylev);
            jj=0;
            for q=1:mod(ii,energylev)-1
                jj=jj+energylev-q;
            end
            for j=s+ii+1:s+ii+k
                A(i,j)=A(i,j)+gstar(QDno,jj+j-s-ii,qq)*sqrt(n);
            end
        end
    end
    for m=1:QDno-1
        l=mod(floor((ii-1)/(energylev^m)),energylev^m)+1;
        jj=0;
        for q=1:l-1
            jj=jj+energylev-q;
        end
        for d=1:energylev-1
            j=s+ii+d*energylev^m;
            A(i,j)=A(i,j)+gstar(QDno-m,jj+d,qq)*sqrt(n);
        end
    end
end
end

```

```

end
block=A(((n+1)^cavitym-1)*energylev^QDno+1:a,s+1:s+energylev^QDno);
A(((n+1)^cavitym-
1)*energylev^QDno+1:a,s+1:s+energylev^QDno)=block+block.';
block2=A(((n+1)^cavitym-
1)*energylev^QDno+1:a,s+1:s+energylev^QDno)/sqrt(n);
for q=(n+1)^cavitym-(n+1)^(cavitym-qq)-1:-1:1
F2=circshift(F,[0,-floor((q-1)/((n+1)^(cavitym-qq))-1]);
A((q+(n+1)^(cavitym-qq)-1)*energylev^QDno+1:(q+(n+1)^(cavitym-
qq))*energylev^QDno,(q-
1)*energylev^QDno+1:q*energylev^QDno)=block2*sqrt(F2(1));
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
writing the Hr.r%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
first & forth term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if QDno>1
B=zeros(energylev^QDno,energylev^QDno);
for m=2:QDno
for r=1:m-1
for i=1:energylev^QDno-1
if m==QDno
nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-
r)),energylev^(QDno-r))+1;
mm=mod(i-1,energylev)+1;
else
nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-
r)),energylev^(QDno-r))+1;
mm=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-
m)),energylev^(QDno-m))+1;
end
if nn==1
q=0;
else
q=0;
for qq=1:nn-1
q=q+energylev-qq;
end
end
if mm==1
s=0;
else
s=0;
for ss=1:mm-1
s=s+energylev-ss;
end
end
for k=1:energylev-nn
q=q+1;
for l=1:energylev-mm
s=s+1;
j=i+k*energylev^(QDno-r)+l*energylev^(QDno-m);
if mm==energylev||nn==energylev
B(i,j)=B(i,j)+0;
else
B(i,j)=B(i,j)+eta(m,s)*eta(r,q);
end
end
end
end

```

```

end
s=s-(energylev-mm);
end
end
end
end
B2=B+B';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% writing the second & third term %%%%
D=zeros(energylev^QDno,energylev^QDno);
for m=2:QDno
    for r=1:m-1
        for i=1:energylev^QDno-1
            if m==QDno
                nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-
r)),energylev^(QDno-r))+1;
                mm=mod(i-1,energylev)+1;
            else
                nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-
r)),energylev^(QDno-r))+1;
                mm=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-
m)),energylev^(QDno-m))+1;
            end
            if nn==1
                q=0;
            else
                q=0;
                for qq=1:nn-1
                    q=q+energylev-qq;
                end
            end
            for k=1:energylev-nn
                q=q+1;
                for ss=1:mm-1
                    s=(ss-1)*energylev+mm-ss-(ss-1)*ss/2;
                    j=i+k*energylev^(QDno-r)-(mm-ss)*energylev^(QDno-
m);

                    if nn==energylev || mm==1
                        D(i,j)=D(i,j)+0;
                    else
                        D(i,j)=D(i,j)+ etastar(m,s)*eta(r,q);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
D2=D+D';
block=D2+B2;
for ii=1:(n+1)^cavitym
    A((ii-1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno,(ii-
1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno)=A((ii-
1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno,(ii-
1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno)+block;
end
end

```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
M=-1i*A;
[V,D]=eig(M);
Mdiag=D;
E=zeros(a,a);
T=0:.1:300;
coeff3000=[];
U=inv(V);
for i=1:a
    Ndiag(i)=Mdiag(i,i);
end
for t=0:.1:300;
    E=diag(exp(Ndiag*t));
    phi=(V*E*U)*phi0;
    coeff3000=[coeff3000,phi];
end
% fftcoeff=fft(coeff. ');
% fftcoeff=fftcoeff. ';
save('coeff3000','coeff3000');
save('time','T');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%calculating concurrency%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if QDno+cavitym==2
    fid=fopen('E:\moslem\concurrency.m','w');
    fprintf(fid,'C=zeros(1,length(T));\n');
    fprintf(fid,'for j=1:length(T)\n');
    fprintf(fid,'for k1=1:energylev-1\n');
    fprintf(fid,'for l1=k1+1:energylev\n');
    fprintf(fid,'for k2=0:n-1\n');
    fprintf(fid,'for l2=k2+1:n\n');

    fprintf(fid,'C(j)=C(j)+coeff(k2*energylev^QDno+k1,j)*coeff(l2*energylev^Q
Dno+l1,j)-coeff(l2*energylev^QDno+k1,j)*coeff(k2*energylev^QDno+l1,j)-
coeff(k2*energylev^QDno+l1,j)*coeff(l2*energylev^QDno+k1,j)+coeff(l2*ener
gylev^QDno+l1,j)*coeff(l2*energylev^QDno+l1,j);\n');

    for i=1:4
        fprintf(fid,'end\n');
    end
    fprintf(fid,'C(j)=sqrt(abs(C(j)^2));\n');
    fprintf(fid,'end\n');
    fclose(fid);
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
else
    fid=fopen('E:\moslem\concurrency.m','w');
    fprintf(fid,'scale=zeros(QDno+cavitym,1);\n');
    fprintf(fid,'for ii=1:QDno\n');
    fprintf(fid,'scale(ii)=energylev^(ii-1);\n');
    fprintf(fid,'end\n');
    fprintf(fid,'for ii=QDno+1:QDno+cavitym\n');
    fprintf(fid,'scale(ii)=(n+1)^(ii-QDno-1)*energylev^QDno;\n');
    fprintf(fid,'end\n');
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    fprintf(fid,'C=zeros(1,length(T));\n');
    fprintf(fid,'K=[];\n');

```

```

fprintf(fid, 'K2=zeros (QDno+cavitym,1);\n');
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'L2=zeros (QDno+cavitym,1);\n');
fprintf(fid, 'Q=zeros (cavitym+QDno,1);\n');
fprintf(fid, 'for ii=2:QDno\n');
fprintf(fid, 'Q(ii)=1;\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for jj=1:length(T)\n');
fprintf(fid, 'cij=0;\n');
fprintf(fid, 'for i=1:QDno+cavitym-1\n');
fprintf(fid, 'for j=i+1:QDno+cavitym\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if QDno>1
    fprintf(fid, 'if i<=QDno && j<=QDno\n');
    for ii=1:QDno-2
        fprintf(fid, 'for k%d=1:energylev\n',ii);
    end
    for ii=QDno-1:QDno+cavitym-2
        fprintf(fid, 'for k%d=0:n\n',ii);
    end
    for ii=1:QDno-2
        fprintf(fid, 'for l%d=1:energylev\n',ii);
    end
    for ii=QDno-1:QDno+cavitym-2
        fprintf(fid, 'for l%d=0:n\n',ii);
    end
    fprintf(fid, 'for ki=1:energylev-1\n');
    fprintf(fid, 'for li=ki+1:energylev\n');
    fprintf(fid, 'for kj=1:energylev-1\n');
    fprintf(fid, 'for lj=kj+1:energylev\n');
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    for ii=1:QDno+cavitym-2
        fprintf(fid, 'K=[K;k%d];\n',ii);
    end
    fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
    fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');
    fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');
    fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');

    fprintf(fid, 'else\n');
    fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');
    fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');

```

```

fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'L=[L;1%d];\n',ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'kikjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'liljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'kiljK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'likjL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'likjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'kiljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'liljK=K2-Q;\n');

fprintf(fid, 'akikjK=sum(kikjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljL=sum(liljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljK=sum(kiljK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjL=sum(likjL.*scale);\n');

```

```

fprintf(fid, 'alijkK=sum(likjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljL=sum(kiljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljK=sum(liljK.*scale);\n');

fprintf(fid, 'cij=cij+(abs(coeff(akikjK,jj)*coeff(aliljL,jj)-
coeff(akiljK,jj)*coeff(alikjL,jj)-
coeff(alikjK,jj)*coeff(akiljL,jj)+coeff(aliljK,jj)*coeff(aliljL,jj)))^2;\n');
for ii=1:2*(QDno+cavitym)+1
    fprintf(fid, 'end\n');
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'if i<=QDno && j>QDno\n');
for ii=1:QDno-1
    fprintf(fid, 'for k%d=1:energylev\n',ii);
end
for ii=QDno:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'for k%d=0:n\n',ii);
end
for ii=1:QDno-1
    fprintf(fid, 'for l%d=1:energylev\n',ii);
end
for ii=QDno:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'for l%d=0:n\n',ii);
end
fprintf(fid, 'for ki=1:energylev-1\n');
fprintf(fid, 'for li=ki+1:energylev\n');
fprintf(fid, 'for kj=0:n-1\n');
fprintf(fid, 'for lj=kj+1:n\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'K=[K;k%d];\n',ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');

```

```

fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'L=[L;1%d];\n', ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'kikjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'liljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'kiljK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'likjL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'likjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'kiljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'liljK=K2-Q;\n');

fprintf(fid, 'akikjK=sum(kikjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljL=sum(liljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljK=sum(kiljK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjL=sum(likjL.*scale);\n');

```

```

fprintf(fid, 'alijkK=sum(likjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljL=sum(kiljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljK=sum(liljK.*scale);\n');

fprintf(fid, 'cij=cij+(abs(coeff(akikjK,jj)*coeff(aliljL,jj)-
coeff(akiljK,jj)*coeff(alikjL,jj)-
coeff(alikjK,jj)*coeff(akiljL,jj)+coeff(aliljK,jj)*coeff(aliljL,jj)))^2;\n');
for ii=1:2*(QDno+cavitym)+1
    fprintf(fid, 'end\n');
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if cavitym>1
    fprintf(fid, 'if i>QDno && j>QDno\n');
    for ii=1:QDno
        fprintf(fid, 'for k%d=1:energylev\n',ii);
    end
    for ii=QDno+1:QDno+cavitym-2
        fprintf(fid, 'for k%d=0:n\n',ii);
    end
    for ii=1:QDno
        fprintf(fid, 'for l%d=1:energylev\n',ii);
    end
    for ii=QDno+1:QDno+cavitym-2
        fprintf(fid, 'for l%d=0:n\n',ii);
    end
    fprintf(fid, 'for ki=0:n-1\n');
    fprintf(fid, 'for li=ki+1:n\n');
    fprintf(fid, 'for kj=0:n-1\n');
    fprintf(fid, 'for lj=kj+1:n\n');
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    for ii=1:QDno+cavitym-2
        fprintf(fid, 'K=[K;k%d];\n',ii);
    end
    fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
    fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');
    fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');
    fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');

    fprintf(fid, 'else\n');
    fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');
    fprintf(fid, 'end\n');
    fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
    fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
    fprintf(fid, 'K=circshift(K,[-1,0]);\n');

```

```

fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'L=[L;1%d];\n',ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L,[-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'kikjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'liljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'kiljK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'likjL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'likjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'kiljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'liljK=K2-Q;\n');

fprintf(fid, 'akikjK=sum(kikjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljL=sum(liljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljK=sum(kiljK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjL=sum(likjL.*scale);\n');

```

```

fprintf(fid, 'alijkK=sum(likjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljL=sum(kiljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljK=sum(liljK.*scale);\n');

fprintf(fid, 'cij=cij+(abs(coeff(akikjK,jj)*coeff(aliljL,jj)-
coeff(akiljK,jj)*coeff(alikjL,jj)-
coeff(alikjK,jj)*coeff(akiljL,jj)+coeff(aliljK,jj)*coeff(aliljL,jj)))^2;\n');

for ii=1:2*(QDno+cavitym)+1
    fprintf(fid, 'end\n');
end
end
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'C(jj)=sqrt(cij);\n');
fprintf(fid, 'jj\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'plot(T,C)\n');
fclose(fid);

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% clear all;
% close all
% clc
coeffff=load('coeffff1000.mat');
coeff=coeffff.coeff1000;
time=load('time.mat');
T=time.T;
T=0:1:1000;
energylevv=load('energylevv.mat');
energylev=energylevv.energylev;
QDnoo=load('QDnoo.mat');
QDno=QDnoo.QDno;
photonsNum=load('photonsNum.mat');
N=photonsNum.N;
cavitymm=load('cavitymm.mat');
cavitym=cavitymm.cavitym;
fockorcoherent=input('enter F if the initial condition was fock
state\nenter C if it was coherent sate:\n','s');
if strcmp(fockorcoherent,'F')
    data1=input('In which energy level are quantum dots initialy?\nenter
the number of specified energy levels from the first quantum dot to the
last one:\n','s');
    data1=str2num(data1);
    data3=input('How many photons are in cavity modes exactly\nenter the
number of specified photons from the first cavity mode to the last
one:\n','s');
    data3=str2num(data3);
    a1=size(data3);
    jum=1;
    jam=1;
    for i=1:1:a1(1,2)
        jumm=data3(1,i)*(N+1)^(cavitym-i);
    end
end

```



```

        jum=jum+jumm;
    end
    a2=size(data1);
    for i=1:1:a2(1,2)
        jamm=(data1(1,i)-1)*(energylev^(QDno-i));
        jam=jam+jamm;
    end
    point=jam+(jum-1)*energylev;
    probablity1=((abs(coeff(point,:)).^2));
    figure
    plot(T,proablity1);
else
    desired=input('enter A if the probablity of the presence of all
quantum dots in specifed energy levels is desired\nenter 0 if the
probability of the presence of only one quantum dot in specifed energy
levels is desired:\n','s');
    if strcmp(desired,'A')
        state=input('In which energy level are quantum dots initialy?\nenter
the number of specified energy levels from the first quantum dot to the
last one:\n','s');
        state=str2num(state);
        a2=size(state);
        jam=0;
        for i=1:1:a2(1,2)
            jamm=(state(1,i)-1)*(energylev^(QDno-i));
            jam=jam+jamm;
        end
        sizeT= size(T);
        andaze=(N+1)^cavitym*energylev^QDno;
        plott=zeros(1,sizeT(1,2));
        for j=jam+1:energylev^QDno:andaze
            plott=plott+((abs(coeff(j,:)).^2));
        end
        plot(T,plott);
    else
        QDL=input('enter the number of desired Quantum and its desired energy
level respectively\n','s');
        QDL=str2num(QDL);
        QMM=QDL(1,1);
        QM=QDno-(QMM-1);
        EL=QDL(1,2);
        probablity2=0;
        for i=1:energylev^QDno:(N+1)^cavitym*energylev^QDno
            for ii=i:energylev^QM:i+energylev^QDno-1
                for iii=ii+(EL-1)*energylev^(QM-1):1:ii++energylev^(QM-
1)+(EL-1)*energylev^(QM-1)-1
                    probablity2=proablity2+abs(coeff(iii,:).^2);
                end
            end
        end
        figure
        plot(T,proablity2)
    end
end
end

```

.....

.....

```

clear all;
close all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%% loading of required inputs as well as coefficient matrix
coefff=load('coefff300.mat');
coeff=coefff.coeff300;
time=load('time.mat');
T=time.T;
energylevv=load('energylevv.mat');
energylev=energylevv.energylev;
QDnoo=load('QDnoo.mat');
QDno=QDnoo.QDno;
photonsNum=load('photonsNum.mat');
N=photonsNum.N;
cavitymm=load('cavitymm.mat');
cavitym=cavitymm.cavitym;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%asking for annihilation operator characterisitc
CMM=input('enter the characteristic of annihilation operator\n(which
cavity mode should it operate on?)\n','s');
CMM=str2num(CMM);
CM=cavitym-(CMM-1);
anni=0;
creation=0;
for i=0:1:energylev^QDno-1
    b=0;
    for ii=1:(N+1)^CM*energylev^QDno:(N+1)^cavitym*energylev^QDno;
        j1=ii+i;
        if CM==cavitym
            j2=(N+1)^CM*energylev^QDno;
        else
            j2=(N+1)^CM*energylev^QDno+ii;
        end
        for iii=j1:(N+1)^(CM-1)*energylev^QDno:j2
            if iii<(N+1)^CM*energylev^QDno-(N+1)^(CM-1)*energylev^QDno+1
                j4=iii+(N+1)^(CM-1)*energylev^QDno-1;
                for iiii=iii:energylev^QDno:j4;
                    j3=floor((iiii-ii)/((N+1)^(CM-1)*energylev^QDno))+1;
                    ann=sqrt(j3)*(coeff(iiii+(N+1)^(CM-
1)*energylev^QDno,:)).*(conj(coeff(iiii,:)));
                    anni=ann+anni;
                    creationn=sqrt(j3)*conj(coeff(iiii+(N+1)^(CM-
1)*energylev^QDno,:)).*coeff(iiii,:);
                    creation=creation+creationn;
                end
            end
        end
    end
end
selection=input('enter CEV for creation expectation value , enter AE for
annihilation expectation value:','s');
if strcmp(selection,'CEV')
    figure
    plot(T,creation)
    figure
    YY=ENVELOPE(creation,T);

```

```

        plot(T,YY)
    else if strcmp(selection,'AE')
        figure
        plot(T,anni)
        figure
        XX=ENVELOPE(anni,T);
        plot(T,XX)
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%importing coeff matrix as well as other
    required%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%parameters to get to atomic ladder expectation
    value%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    clear all;
    close all
    clc
    coeffff=load('coeffff3000.mat');
    coeff=coeffff.coeff3000;
    time=load('time.mat');
    T=time.T;
    energylevv=load('energylevv.mat');
    energylev=energylevv.energylev;
    QDnoo=load('QDnoo.mat');
    QDno=QDnoo.QDno;
    photonsNum=load('photonsNum.mat');
    N=photonsNum.N;
    cavitymm=load('cavitymm.mat');
    cavitym=cavitymm.cavitym;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%asking and importing the desired atomic ladder operator to measure
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%atomic ladder and its hermitian expectation value%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    QDSK=input('enter the characterisitic of atomic ladder oerator as:\n[the
    number of desired Quantum dot,former energy level,latter energy
    level]\n','s');
    QDSK=str2num(QDSK);
    QMM=QDSK(1,1);
    S=QDSK(1,2);
    K=QDSK(1,3);
    AtomicL=0;
    AtomicLd=0;
    QM=QDno-(QMM-1);
    for i=1:energylev^QDno:(N+1)^cavitym*energylev^QDno
        for ii=i:energylev^QM:i+energylev^QDno-1
            for iii=ii+(S-1)*energylev^(QM-1):1:ii+energylev^(QM-1)+(S-
1)*energylev^(QM-1)-1
                AtomicLL=(coeff(iii,:)).*(conj(coeff(iii+(K-
S)*(energylev^(QM-1)),:)));
                AtomicLd=AtomicLd+AtomicLL;
                AtomicL=AtomicL+(coeff(iii+(K-S)*(energylev^(QM-
1)),:)).*(conj(coeff(iii,:)));
            end
        end
    end
end

```

```
selection=input('enter ALE for the measurement of the expectation value
of atomic ladder\n,enter ALDE for the measurement of the expectation
value of hermitian adjoint of atomic ladder operator:\n','s');
if strcmp(selection,'ALE')
    figure
    plot(T,AtomicL)
    figure
    YY=ENVELOPE(AtomicL,T);
    plot(T,YY)
else if strcmp(selection,'ALDE')
    figure
    plot(T,AtomicLd)
    figure
    XX=ENVELOPE(AtomicLd,T);
    plot(T,XX)
end
end
```

.....

.....

```
%%%%%%%%%%%%%%importing coeff matrix as well as other
required%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%
%%
clear all;
close all
clc
coeffff=load('coeffff3000.mat');
coeff=coeffff.coeff3000;
coeff=coeff(1:end,1:50);

energylevv=load('energylevv.mat');
energylev=energylevv.energylev;
QDnoo=load('QDnoo.mat');
QDno=QDnoo.QDno;
photonsNum=load('photonsNum.mat');
N=photonsNum.N;
cavitymm=load('cavitymm.mat');
cavitym=cavitymm.cavitym;
time=load('time.mat');
T=time.T;
T=0:1:49;
%%%%%%%%%%%%%%asking and importing the desired atomic ladder
operator
%%to measure the expectation value of commutation of the operator and its
hermitian adjoint%
QDSK=input('enter atomic ladder oerator characteristic as:\n[the number
of desired Quantum dot,former energy level,latter energy level]\n','s');
QDSK=str2num(QDSK);
QMM=QDSK(1,1);
S=QDSK(1,2);
K=QDSK(1,3);
QM=QDno-(QMM-1);
sigmaZ1=0;
sigmaZ2=0;
for i=1:energylev^QDno:(N+1)^cavitym*energylev^QDno
    for ii=i:energylev^QM:i+energylev^QDno-1
```

```
for iii=ii+(S-1)*energylev^(QM-1):1:ii++energylev^(QM-1)+(S-
1)*energylev^(QM-1)-1
    sigmaZ1=sigmaZ1+abs(coeff(iii,:).^2);
    sigmaZ2=sigmaZ2+abs(conj(coeff(iii+(K-S)*(energylev^(QM-
1))),:).^2);
    sigmaZZ=sigmaZ1-sigmaZ2;
end
end
end
plot(T,sigmaZZ)
```

مراجع

- [1] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, 1st ed. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
- [2] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser," *Proc. IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89-109, Jan. 1963.
- [3] H. Paul, "Induzierte Emission bei starker Einstrahlung," *Ann. Phys.*, vol. 466, pp. 411-412, 1963.
- [4] F.W. Cummings, "Stimulated emission of radiation in a single mode," *Phys. Rev.*, vol. 140, pp. A1051-A1056, 1965.
- [5] J.H. Eberly et al., "Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 44, pp. 1323-1326, 1980.
- [6] G. Rempe et al., "Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 353-356, 1987.
- [7] S. Haroche, J.M. Raimond, "Radiative properties of Rydberg states in resonant cavities," D. Bates B. Bederson, Eds., *Advances in Atomic and Molecular Physics, Academic Press*, vol., 20, pp. 347-411, 1985
- [8] J.A.C. Gallas et al., "Rydberg atoms: high-resolution spectroscopy and radiation interaction-Rydberg molecules," D. Bates and B. Bederson, Eds., *Advances in Atomic and Molecular Physics, Academic Press*, vol. 20, pp. 413-466, 1985.
- [9] V. Bulovic, V. B. Khalfin, G. Gu, and P. E. Burrows, "Weak microcavity effects in organic light-emitting devices," *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp.3730-3740, 1998.
- [10] R. B. Fletcher et al., "Spectral properties of resonant-cavity, polyfluorene light-emitting diodes," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 77, pp. 1262-1264, Jun. 2000.
- [11] D. Press et al., "Photon antibunching from a single quantum-dot-microcavity system in the strong coupling regime," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, pp. 117402-117405, Mar 2007.
- [12] E. Peter et al., "Exciton-photon strong-coupling regime for a single quantum dot embedded in a microcavity," *Phys. Rev. Lett.* vol. 95, pp. 067401, Aug. 2005-2008.
- [13] J. P. Reithmaier, "Strong exciton-photon coupling in semiconductor quantum dot systems," *Semicond. Sci. Technol.*, vol. 23, pp. 123001, Oct. 2008.
- [14] W. P. Schleich and H. Walther Eds., *Elements of Quantum Information*, Weinheim, Germany: Wiley-VCH, Jan. 2007.
- [15] K. M. Birnbaum et al., "Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom," *Nature*, vol. 436, pp. 87-90, May 2005.
- [16] N. Gisin, et al. "Quantum cryptography," *Rev. Mod. Phys.* vol. 74, pp. 145-195, Mar. 2002
- [17] E. Knill et al., "A scheme for efficient quantum computation with linear optics," *Nature*, vol. 409 pp.46-52, Jan. 2001.
- [18] Y. Yamamoto et al., "Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics," Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2000.
- [19] W. Dür et al., "Quantum repeaters based on entanglement purification," *Phys. Rev. A*, vol. 59, pp. 169-181, Jan. 1999.
- [20] S.E. Morin et al. (1994). "Strong Atom-Cavity Coupling over Large Volumes and the Observation of Subnatural Intracavity Atomic Linewidths," *Phys. Rev. Lett.* vol. 73, pp. 1489-1492, Sep. 1994.

- [21] J. P. Reithmaier et al., "Strong coupling in a single quantum dot–semiconductor microcavity system", *Nature*, vol. 432, pp.197-200, Nov. 2004.
- [22] H. Cao et al, "Optically pumped InAs quantum dot microdisk lasers," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 76, no. 24, pp. 3519-3521 Jun. 2000.
- [23] R. Buttéa et al., "Room temperature polariton lasing in III-nitride microcavities, a comparison with blue GaN-based vertical cavity surface emitting lasers," *Proc. SPIE*, vol. 7216 pp.721619-1-721619-16, 2009.
- [24] E. Peter et al, "Exciton photon strong-coupling regime for a single quantum dot in a microcavity", *Phys. Rev. Lett.* vol. 95, pp. 067401-067403, Aug. 2005.
- [25] Y. Akahane et al., "High-Q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal," *Nature*, vol. 425 pp. 944-947, 2003.
- [26] S. Strauf, "Cavity QED: Lasing under strong coupling," *Nature Physics*, vol. 6, pp. 244 – 245, 2010.
- [27] T. Yoshie et al., "Vacuum Rabi splitting with a single quantum dot in a photonic crystal nanocavity", *Nature*, vol. 432, pp. 200-203, Oct. 2004.
- [28] D. Englund, "Controlling the spontaneous emission rate of single quantum dots in a 2D photonic crystal," *Phys. Rev. Lett.* vol. 95, pp. 013904-013908, Jul. 2005.
- [29] W. H. Chang "Efficient single photon sources based on low density quantum dots in photonic crystal nanocavities," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, pp.117401, Mar. 2006.
- [30] Kaniber M et al 2007 "Efficient spatial redistribution of quantum dot spontaneous emission from two dimensional photonic crystals," *Appl. Phys. Lett.* vol. 91 pp. 061106
- [31] M. Kaniber et al., "Highly efficient single-photon emission from single quantum dots within a twodimensional, photonic band-gap," *Phys. Rev. B*, vol. 77, 073312-073315, Feb. 2008.
- [32] O. Painter et al., "Two-Dimensional Photonic Band-Gap Defect Mode Laser," *Science*, Vol. 284, no. 5421, pp. 1819-1821, Jun. 1999.
- [33] H. G. Park "Electrically driven single-cell photonic crystal laser," *Science*, Vol. 305, no. 5689, pp. 1444-1447, Sep. 2004
- [34] H. Altug et al., "Ultrafast photonic crystal nanocavity laser," *Nat. Phys.* vol. 2, pp. 484 – 488, 2006.
- [35] D. Englund et al., "Controlling cavity reflectivity with a single quantum dot," *Nature*, vol. 450, pp. 857-861, Dec 2007.
- [36] I. Fushman et al., "Controlled phase shifts with a single quantum dot," *Science*, vol. 320, no. 5877, pp. 769-772, May 2008.
- [37] T. Yoshie et al., "Vacuum Rabi splitting with a single quantum dot in a photonic crystal nanocavity," *Nature*, vol. 432, pp. 200–203, Oct 2004.
- [38] D. Press et al., "Photon antibunching from a single quantum-dot-microcavity system in the strong coupling regime," *Phys Rev. Lett.*, vol. 98, pp. 117402-117405, Mar. 2007.
- [39] S. Mosor et al., "Scanning a photonic crystal slab nanocavity by condensation of xenon," *Appl Phys. Lett.*, vol. 87, pp. 141105-141105, 2005.
- [40] K. Hennessy et al., "Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot–cavity system," *Nature*, vol. 445, pp. 896–899, 2007.
- [41] A. Laucht et al., "Electrical control of spontaneous emission and strong coupling for a single quantum dot," *New J. Phys.*, vol. 11, pp. 023034, Feb. 2009.
- [42] C. Ciuti et al., "Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field," *Phys. Rev. B*, vol. 72, pp. 115303-115311, 2005.
- [43] D. Dini et al., "Microcavity Polariton Splitting of Intersubband Transitions," *Phys. Rev. Lett*, vol. 90, pp. 116401-116403, Mar. 2003.

- [44] A. Anappara et al., "Signatures of the ultrastrong light-matter coupling regime," *Phys. Rev. B*, vol. 79, pp. 201303-201306, May. 2009.
- [45] G. Günter et al., "Sub-cycle switch-on of ultrastrong light-matter interaction," *Nature*, vol. 458, pp. 178-181, Jan. 2009.
- [46] S. D. Liberato "Quantum Vacuum Radiation Spectra from a Semiconductor Microcavity with a Time-Modulated Vacuum Rabi Frequency," *Phys. Rev. Lett.* vol. 98, pp.103602-103605, Mar. 2007
- [47] M. Geiser et al., "Ultrastrong Coupling Regime and Plasmon Polaritons in Parabolic Semiconductor Quantum Wells," *Phys. Rev. Lett.* vol. 108, pp. 106402-1066406, Mar. 2012.
- [48] T. Niemczyk et al., "Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime," *Nat. Phys.* vol. 6, pp 772, 2010.
- [49] P. Forn-Díaz et al., "Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, pp. 237001-237001, Nov. 2010.
- [50] G. Scalari et al., "Ultrastrong Coupling of the Cyclotron Transition of a 2D Electron Gas to a THz Metamaterial," *Science*, vol. 335 no. 6074 pp. 1323-1326, Mar. 2012.
- [51] Y. Todorov et al., "Ultrastrong Light-Matter Coupling Regime with Polariton Dots," *Phys. Rev. Lett.* vol. 105, pp. 196402-196405, Nov. 2010.
- [52] B.W Shore, and Knight, P.L. "Topical review: the Jaynes-Cummings, model," *J. Modern Opt.*, vol. 40, pp. 1195-1238, 1993.
- [53] J. R. Ackerhalt, "Quantum electrodynamic source-field method: Frequency shifts and decay rates in single atom spontaneous emission," M.S. thesis, Rochester Univ., Rochester, NY. US. 1974.
- [54] N. B. Narozhny, "Coherence versus incoherence: collapse and revival in a single quantum model," *Phys. Rev. A*, vol. 23, pp. 236-247, Jan. 1981.
- [55] N. N. Bogolubov et al., "Nonclassical correlation between light beams in a Jaynes-Cummings-type model system," *Europhys. Lett.* vol. 4, pp. 281, 1987.
- [56] J. R. Ackerhalt and K. Rzążewski, "Heisenberg-picture operator perturbation theory," *Phys. Rev. A*, vol. 12, pp. 2549-2567, Dec. 1975.
- [57] G. S. Agarwal, "Vacuum-field Rabi oscillations of atoms in a cavity," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp. 480-485, 1985
- [58] H. J. Carmichael, "Classical interpretation of additional vacuum-field Rabi splitting in cavity QED," *Phys. Rev. A*, vol. 44, pp. 4751-4752, Oct. 1991.
- [59] J. J. Sanchez-Mondragon et al., "Theory of spontaneous-emission line shape in an ideal cavity," *Phys. Rev. Lett.* vol. 51, pp. 550-553, 1983.
- [60] A. H. Sadeghi et al., "Interaction of Quantum Dot Molecules with Multi-mode Radiation Fields," *Scientia Iranica*, vol. 17, pp. 59-70, 2010
- [61] A. Arab, S. Khorasani "Cavity Electro-Dynamics in Ultra-Strong Coupling," M.S. thesis, Dept. Elect. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran, 2011.
- [62] J. R. Kuklinski and J. L. Madajczyk, "Strong squeezing in the Jaynes-Cummings model," *Phys. Rev. A*, vol. 37, pp 3175-3178, 1988.
- [63] A. Kundu, "Quantum integrable multiatom matter-radiation models with and without the rotating-wave approximation," *Theor. Math. Phys.*, vol. 144, no.1, pp. 975-984, 2005.
- [64] V. Hussin and L. M. Nieto, "Ladder operators and coherent states for the Jaynes-Cummings model in the rotating-wave approximation," *J. Math. Phys.*, vol. 46, pp. 122102, 2005.
- [65] C.H. Bennett and S.J. Wiesner, "Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, pp. 2881-2884, Nov. 1992.
- [66] C.H. Bennett et al., "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1895-1899, 1993.

- [67] C.H. Bennett et al., "Mixed-state entanglement and quantum error correction," *Phys. Rev. A*, vol. 54, pp. 3824-3851, 1996.
- [68] F. Tavis, and F.W. Cummings, "Exact solution for an N-molecule radiation-field Hamiltonian," *Phys. Rev*, vol. 170, no. 2, pp. 379-384, 1968.
- [69] C.V. Sukumar and B. Buck, "Multi-phonon generalization the jaynes-cummings model," *Phys. Lett. A*, vol. 83, pp. 211-213, 1981. , C.V. Sukumar and B. Buck, "Some soluble models for periodic decay and revival," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 17, pp. 885-894, 1984.
- [70] B.Buck and C.V. Sukumar, "Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival," *Phys. Lett. A*, vol. 81, no. 2-3, pp. 132-135, Jan.1981.
- [71] H. Abdel-Wahab, "A three-level atom interacting with a single mode cavity field: different configurations," *Phys. Scr.*, vol. 76, pp. 244-248, 2007.
- [72] H. Abdel-Wahab, "The general formalism for a three level atom interacting with a two-mode cavity field," *Phys. Scr.*, vol. 76, pp. 233-237, 2007.
- [73] F. T. Arecchi et al., "Atomic Coherent States in Quantum Optics," *Phys. Rev. A* vol. 6, pp. 2211–2237, Dec. 1972
- [74] F. Karimi, S. Khorasani "Analysis of Ultra-Strong Coupling in Optical Wavelengths," M.S. thesis, Dept. Elect. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran, 2011.

Abstract:

In this M.Sc. thesis the behavior patterns of the cavity quantum electrodynamics of complex systems are analyzed, such systems are quantum optic multi-partite systems and consist of an arbitrary number of quantum dots in interaction with arbitrary number of cavity modes.

First, the coefficients matrix of the ket state of the system was measured, in order to achieve it; the general time-dependent state of the most general possible system was specified. Its related Hamiltonian was written, and finally the Schrodinger equation was measured in different coupling regimes. It was done in Schrodinger picture without any approximation. Second, the presence probabilities of the quantum dots of any arbitrary system in their different energy level states were measured, furthermore to study the behavior of the system, expectation values of field and atomic operators were computed, also the expectation value of commutator of atomic ladder operators was measured which is used for studying the entanglement of quantum optic systems.

In the first chapter there is a review about Cavity QED of quantum optic systems, there is also a brief description of different coupling regimes, how to produce higher coupling regimes and available applications of different coupling regimes. In the last part of this chapter the describing model of these systems is reviewed, its generalizations and role in studying the entanglement of quantum complex systems is explained afterward.

In the second chapter necessary equations to study the most general system are extracted, and then to use the equations the related and required MATLAB codes are written.

In the last or third chapter a Cavity QED of a quantum optic system consists of two quantum dots in interaction with a cavity mode is analyzed by both handwork and provided softwares to compare the results, then for the first time the behavior of a real quantum optic system as well as a multi-partite CQED system consists of six quantum dots in interaction with one cavity mode are studied and compared in different coupling regimes.

Keywords: Cavity Quantum Electro-Dynamics, Weak, Strong and Ultrastrong Coupling Regimes, Cavity mode, Quantum Dot, Quantum Potential Well, Jaynes-Cummings-Paul Hamiltonian, Entanglement, Chaos.



Sharif University of Technology
School of Electrical Engineering

M.Sc Thesis

**Behavior Patterns Analysis of Cavity Quantum Electro-
Dynamics in Complex Systems for Different Coupling
Regimes**

By:

Moslem Alidoosty Shahraki

Supervisor:

Sina Khorasani

September 2012