

کالج پروژه

www.collegeprozheh.ir



دانلود پروژه های دانشگاهی

بانک موضوعات پایان نامه

دانلود مقالات انگلیسی با ترجمه فارسی

آموزش نگارش پایان نامه ، مقاله ، پروپوزال

دانلود جزوه و نمونه سوالات استخدامی

دانلود رایگان پرسشنامه

کاملترین

حل مسائل

تحقیق در عملیات (۱)

(ویژه دانشگاه پیام نور و دوره‌های فراغی)

(رشته‌های مدیریت و حسابداری)

براساس کتاب: دکتر عادل آذر

شامل:

- | | |
|--|---|
| خلاصه درس | ✓ |
| پاسخ تشریحی کلیه تمرینات و مسائل کتاب | ✓ |
| تست‌های مربوط به هر فصل با پاسخ تشریحی | ✓ |

فهرست

صفحه

عنوان

فصل اول : کلیات تحقیق در عملیات

۵	خلاصه درس
۹	سوالات تکمیلی و چهار گزینه‌ای
۱۲	تمرینات
۱۶	نمونه سوالات پایان ترم فصل اول

فصل دوم : برنامه‌ریزی خطی (مدلسازی)

۱۷	خلاصه درس
۱۹	تمرینات
۴۸	نمونه سوالات پایان ترم فصل دوم

فصل سوم : برنامه‌ریزی خطی (روش هندسی)

۵۳	خلاصه درس
۵۷	سوالات تکمیلی و چهار گزینه‌ای
۶۴	تمرینات
۸۰	نمونه سوالات پایان ترم فصل سوم

فصل چهارم : برنامه‌ریزی خطی (روش سیمپلکس)

۸۵	خلاصه درس
۹۲	سوالات تکمیلی و چهار گزینه‌ای
۱۰۴	تمرینات
۱۳۸	نمونه سوالات پایان ترم فصل چهارم

فصل پنجم : برنامه ریزی خطی (تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس و مساله ثانویه)

- | | |
|-----|---------------------------------|
| ۱۴۵ | خلاصه درس |
| ۱۵۲ | سوالات تكمیلی و چهار گزینه‌ای |
| ۱۶۴ | تمرینات |
| ۱۸۵ | نمونه سوالات پایان ترم فصل پنجم |
| ۱۸۹ | <u>نمونه سوالات پایان ترم</u> |

فصل اول : کلیات تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات عبارت از کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی جهت تصمیم گیری بهتر است . تاریخچه تحقیق در عملیات به جنگ جهانی دوم برمی گردد و شاید مهمترین علت پیدایش آن محدودیت منابع و بودجه نظامی بود که لازم می نمود چگونگی استفاده مناسب و حداکثر از منابع نظامی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد . امروزه تحقیق در عملیات که اختصاراً آن را با *OR* نشان می دهیم در بیشتر زمینه های صنعتی و اقتصادی مورد استفاده قرار می گیرد . لذا با توجه به نوع کاربرد آن در سازمانها توسط افراد مختلف تعریف شده است که مهمترین تعریف آن را می توان به صورت زیر بیان کرد :

تحقیق در عملیات کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل تصمیمات و مسائل مدیریتی است .

مهمترین ویژگیهای *OR* عبارتند از :

الف) تمرکز اصلی و اولیه *OR* بر تصمیم گیری مدیران است :

تصمیم گیری نتیجه فرآیند انتخاب یک گزینه بهتر از بین چند گزینه است . مهمترین وظیفه مدیران تصمیم گیری برای حل مشکل یا مساله است . تصمیم گیری در قالب یک فرآیند مرحله ای و منظم صورت می پذیرد .

این مراحل عبارتند از :

۱. تعریف مساله

۲. شناخت راه حل های ممکن

۳. ارزیابی راه حل های ممکن

۴. انتخاب یک راه حل

ب) رویکرد *OR* یک رویکرد علمی است :

رویکرد علمی یک فرآیند فرموله شده است که در قرن هفدهم توسط فیلسوف معروف

فرانسوی «دکارت» تعریف شده است . این رویکرد شامل مراحل زیر است :

۱. تعریف مساله

۲. مشاهده

۳. فرضیه

۴. طراحی آزمایش

۵. اجرای آزمایش

۶. تایید یا رد فرضیه بر اساس نتایج آزمایش

تحقیق در عملیات از این رویکرد علمی برای حل مساله به نحوه احسن استفاده می کند .

پ) در *OR* مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می شوند :

هر سیستم قابل تقسیم به سه بخش عمده داده ها ، پردازش گرها و ستاندها است که

اجزای مختلف سیستم توسط محیط خود محاصره شده اند و اغلب بوسیله مکانیسم

باخور در ارتباط هستند . به عبارتی در سیستم با توجه به اطلاعاتی که از ستاندها

بدست می آید به اصلاح داده ها و پردازش گرها می پردازند .

ت) تحقیق در عملیات یک رشته از ترکیب چندین رشته مستقل است :

در بسیاری از موارد که مسائل از ابعاد ساده ای برخوردار هستند ، می توان از یک

متخصص که دارای اطلاعات لازم از رشته مورد نظر است استفاده کرد . اما ، بسیاری از

مسائل مدیریتی دارای جنبه‌های اقتصادی ، روانشناسی ، اجتماعی ، مهندسی ، ریاضی ، فیزیکی و ... هستند که برای حل اینگونه مسائل لازم است متخصصانی را از رشته‌های مختلف گردهم آورده از اطلاعات و تجربیات آنها استفاده کرد .

ه) در OR از مدل‌های ریاضی استفاده می‌شود :

مدل‌ها ساده شده واقعیات می‌باشند ، اما یک مدل ساده شده نمی‌تواند وضعیت واقعی مساله را بیان کند : مدل‌ها با توجه به درجه انتزاعی بودن به سه دسته تقسیم می‌شوند.

الف) مدل‌های شمایلی : این دسته از مدل‌ها با کمترین انتزاع از واقعیت همراه هستند مانند مakteh‌های سه بعدی .

ب) مدل‌های قیاسی : این مدل عیناً مشابه سیستم واقعی نیست ولی رفتار آن شبیه سیستم می‌باشد و به صورت نمودار بیان می‌شود .

ج) مدل ریاضی : این مدلها نسبت به سایر مدل‌ها ساده‌تر هستند و سطح انتزاع بیشتری دارند . در این مدل‌ها از نمادها و سمبل‌ها استفاده می‌شود و به علت مزایای زیر ، در OR از آن استفاده می‌شود :

۱. توانایی تعریف و تعیین موقعیتهاي پیچیده
۲. شبیه‌سازی زمان وقوع عملیات واقعی
۳. ساده بودن و امکان دستکاری مدل
۴. هزینه و خطای کمتر
۵. محاسبه مخاطره در تصمیم‌گیری
۶. امکان ایجاد زمینه یادگیری و آزمون

مدل‌های ریاضی معمولاً به سه مقوله قطعی ، احتمالی و ترکیبی دسته‌بندی می‌شوند . مدل‌های قطعی در شرایط اطمینان کامل ساخته می‌شوند و پارامترها و نمادهای به کار رفته در آن به طور قطع و یقین رخ می‌دهند . در مدل‌های احتمالی پارامترها و ارزش

مقادیر به طور تصادفی رخ می دهند و از یکتابع احتمال پیروی می کنند . مدلهای ترکیبی نیز ترکیبی از مدلهای قطعی و احتمالی می باشند .

و) در OR از رایانه به وفور استفاده می شود :

پیشرفت رایانه منجر به تهیه نرم افزارهایی برای حل مسائل پیچیده OR شده است . مسائل پیچیده‌ای که غالباً در OR با آنها سر و کار داریم نیازمند انجام محاسبات فوق العاده زیادی هستند که اغلب اوقات انجام این عملیات به روش دستی امکان‌پذیر نیست .
أنواع نرم افزارهای مختلفی که برای OR ساخته شده است حل این گونه مسائل را بسیار ساده کرده است .

مسائل فصل اول

سوالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای (صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ۱- کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیم‌های مدیریتی را گویند.

پاسخ :

تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی یا به اختصار *OR*)

- ۲- در رابطه $Z = 10X - 2X^2$ ، متغیر Z یک متغیر است.

پاسخ :

وابسته (به X است)

- ۳- در رابطه $Z = 80X - 10X^2$ ، متغیر X یک متغیر است.

پاسخ :

مستقل

- ۴- حل مدل به منزله حل است.

پاسخ :

مسئله

- ۵- شبیه‌سازی یکی از فنون تحقیق در عملیات است.

پاسخ :

ترکیبی

- ۶- در فرآیند تحقیق در عملیات پس از مشاهده باید :

- الف) مسئله را تعریف کرد.
- ب) مدل را حل کرد.
- ج) مدل را ساخت.
- د) مدل را اجرا کرد.

پاسخ :

گزینه الف

- ۷- کدامیک از فنون زیر در دسته فنون قطعی *OR* قرار می‌گیرند ؟

- الف) شبیه‌سازی ب) حمل و نقل ج) فرآیندهای مادکوفی د) *CPM*

پاسخ :

گزینه ب

۸- کدامیک از مدلها زیر، انتزاعی‌ترین نوع مدلها است؟

- (د) شمایلی و قیاسی (ب) ریاضی (ج) قیاسی

پاسخ :

گزینه ج

۹- فراوانی استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی OR کدام است؟

- (د) بسیار کم (ب) زیاد (ج) کم

پاسخ :

گزینه الف

۱۰- کدامیک از اصطلاحات زیر مترادف علم تحقیق در عملیات است؟

- (د) علوم مدیریت (ب) تحلیل مقداری (ج) پژوهش عملیاتی

پاسخ :

گزینه د

۱۱- شکل‌گیری تحقیق در عملیات از چه سازمانهایی شروع شد؟

- (د) خدماتی (ب) نظامی (ج) بیمارستانها

پاسخ :

گزینه ب

۱۲- کانون توجه OR بر چیست؟

- (د) سازماندهی (ب) فرضیه‌سازی (ج) تصمیم‌گیری

پاسخ :

گزینه ج

۱۳- کدامیک از نرم افزارهای زیر آموزشی است ؟

LINGO (د)

GAMS (ج)

LINDO (ب)

QSB⁺

پاسخ :

گزینه الف

۱۴- در معادله $Z = 40X - 5X^2$ ، عدد ۲۰ را با چه اصطلاحی ذکر می کنند ؟

الف) متغیر (د) پارامتر

ب) متغیر وابسته (ج) متغیر مستقل

د) متغیر

پاسخ :

گزینه د

۱۵- بیشترین زمینه بکارگیری فنون OR کدامیک از موارد زیر است ؟

الف) خرید (د) بسته‌بندی

ب) حمل و نقل (ج) تولید

پاسخ :

گزینه

تمرینات (صفحه ۱۱۱ کتاب درسی)

۱- دلایل استفاده از مدل‌های ریاضی را بنویسید.

پاسخ :

پیچیدگی روابط در برخی از سیستمها مانع از آن می‌شود که بتوان شکل سیستم و یا رفتار آن را با استفاده از مدل‌های شمایلی یا قیاسی نشان داد. بنابراین ساده‌سازی واقعیت و انتزاع از آن باید بیشتر باشد. ناچار از مدل‌هایی که از نمادها و سمboleها کمک می‌گیرند برای بیان انتزاع رفتار سیستم استفاده می‌شود. با توجه به پیچیدگی مسائل در دنیای تصمیم‌گیری، اکثر تحلیلهای در *OR* با استفاده از مدل‌های ریاضی انجام می‌گیرد. این مدل‌ها اغلب به صورت کلی بیان می‌شوند و می‌توانند برای توصیف موقعیتهای متفاوت بکار روند. دلایل عمدی‌ای که باعث شده است در *OR* از مدل‌های ریاضی استفاده شود، عبارتند از:

الف) استفاده از مدل‌های ریاضی باعث می‌شود که موقعیتهای خیلی پیچیده را تعریف و تعیین کرد.

ب) توانایی شبیه‌سازی زمان عملیات واقعی به طوری که می‌توان رفتار واقعی سیستم را در طول سالهای آینده به زمان حال درآورد.

ج) توانایی در دستکاری سیستم با هزینه بسیار کم و به طور ساده.

د) هزینه آزمایش و خطا در مدل در مقایسه با سیستم واقعی بسیار پایین است.

ه) ایجاد موقعیت برای مدیران برای تصمیم‌گیری در ریسک.

و) ایجاد زمینه آموزش و یادگیری.

۲- اجزاء سیستم را بنویسید و هر یک را توضیح دهید.

پاسخ :

اجزاء سیستم عبارتند از:

الف) داده‌ها : عناصر خامی که وارد سیستم می‌شوند.

ب) پردازش‌گرها : عناصری که عمل پردازش (تحلیل) را روی داده‌ها انجام می‌دهند و آنها را به ستاندها تبدیل می‌کنند.

ج) ستاندها : داده‌های پردازش شده که معمولاً شامل محصولات ساخته شده و تولید شده سیستم می‌باشند.

۳- ویژگیهای تحقیق در عملیات را بنویسید .

پاسخ :

مهمترین ویژگیهای تحقیق در عملیات عبارتند از :

- الف) تمرکز اصلی و اولیه تحقیق در عملیات بر تصمیم‌گیری مدیران است .
 - ب) رویکرد تحقیق در عملیات یک رویکرد علمی است .
 - ج) در تحقیق در عملیات مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می‌شوند .
 - د) رشته تحقیق در عملیات یک رشته از ترکیب چندین رشته مستقل است .
 - ه) در تحقیق در عملیات از مدل‌های ریاضی استفاده می‌شود .
 - و) در تحقیق در عملیات از رایانه بهره‌ور استفاده می‌شود .
- ۴- روش اساسی تعیین عناصر محیط سیستم (رویه چرچمن) را بنویسید .

پاسخ :

عواملی وجود دارند که آنها را نمی‌توان در بین اجزای سیستم (داده‌ها، پردازشگرهای ستاندها) قرار داد . ولی این عناصر به شدت عملکرد سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهند . این عوامل تحت عنوان محیط سیستم بیان می‌شوند . یکی از راههای تعیین عناصر محیط سیستم پاسخ به دو سؤال اساسی زیر است که توسط چرچمن پیشنهاد شده است :

- الف) آیا دستکاری کردن این «عنصر» امکان‌پذیر است ؟
 - ب) آیا ماهیت (وجود) این عنصر به اهداف سیستم مربوط می‌شود ؟
- اگر و فقط اگر پاسخ سؤال اول «نه» باشد، پس پاسخ سؤال دوم «بلی» است .
- بنابراین این عنصر باید به عنوان جزئی از سیستم در نظر گرفته شود .
- ۵- فرآیند تصمیم‌گیری را توضیح دهید .

پاسخ :

یک سیستم، نتیجه فرآیند انتخاب یک گزینه بهتر از بین دو یا چند گزینه متفاوت است، که ما را در رسیدن به مقصد (آرمان) یاری می‌دهد . این فرآیند، «تصمیم‌گیری» نامیده می‌شود و شامل مراحل زیر است :

الف - تعریف مساله

- ب- شناخت راه حل های ممکن
- پ) ارزیابی راه حل های ممکن
- ت) انتخاب یک راه حل
- ۶- روش علمی را توضیح دهید.

پاسخ :

- رویکرد علمی (یا روش علمی) یک فرآیند فرموله شده است که توسط دکارت فیلسوف معروف فرانسوی در قرن هفدهم تعریف شده این رویکرد شامل مراحل زیر است :
- الف) تعریف مساله : مساله باید برای تحلیل ، تعریف شده و شرایط مشاهده تعیین گردد.
 - ب) مشاهده : مشاهدات مختلف تحت شرایط ، متفاوت هستند که رفتار سیستم در برگیرنده مساله را تعیین می کنند .
 - پ) فرضیه : بر اساس مشاهده (تجربه) است که فرضیات مربوط به بهترین جواب برای مساله شکل می گیرد .
 - ت) آزمایش : برای آزمون فرضیات (فرضیه) یک آزمایش تجربی و قابل اندازه گیری باید طراحی شود .
 - ه) اجرای آزمایش : آزمایش (آزمایشات) طراحی شده باید اجرا شود و نتایج آزمایشات ثبت و ضبط گردد .
 - و) تایید یا رد فرضیه : با استفاده از نتایج آزمایشات به بررسی صحت یا سقم فرضیات می پردازیم .
 - ۷- فرآیند تحقیق در عملیات را توضیح دهید .

پاسخ :

- تحقیق در عملیات به مجموعه ای ارزش های علمی و فنونی گفته می شود که جهت شناخت مسائل درون سیستم به کار می روند و در صدد جواب بهینه (بهترین جواب) برای مسائل هستند . تحقیق در عملیات عبارتست از کاربرد روش های علمی برای مطالعه و بررسی فعالیتها و عملیات پیچیده که شامل مراحل زیر می باشد :

- الف) مشاهده
- ب) تعریف مساله
- پ) ساختن مدل

ت) حل مدل

ه) اجرای مدل

۸- مدل‌های ترکیبی در تحقیق در عملیات ، چه نوع مدل‌هایی هستند؟

پاسخ :

برخی از مدل‌های تحقیق در عملیات هم در شرایط قطعی و هم در شرایط احتمالی مورد استفاده قرار می‌گیرند . به این دسته از مدل‌ها ، مدل‌های ترکیبی گفته می‌شود .

نحوه سؤالات پایان ترم فصل اول

- ۱- کدامیک از فنون زیر در دسته مدلهای قطعی *OR* قرار می‌گیرد؟ (نیمسال اول ۸۱-۸۲)
 الف) حمل و نقل ب) *CPM* ج) شبیه‌سازی د) فرآیندهای مارکونی

☞ پاسخ :

گزینه الف

- ۲- کدامیک از مدلهای زیر، انتزاعی‌ترین نوع مدلهاست؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)
 الف) شمایلی ب) ریاضی ج) قیاسی-شمایلی د) قیاسی

☞ پاسخ :

گزینه ب

- ۳- در معادله $z = 40x_1 + 5x_2$ با چه اصطلاحی شناخته می‌شوند؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)
 الف) متغیر ب) متغیر مستقل ج) متغیر وابسته د) پارامتر

☞ پاسخ :

گزینه د

- ۴- در فرآیند حل مسئله در *OR* پس از تعریف مسئله باید کدام فعالیت انجام شود؟ (نیمسال اول ۸۲-۸۳)
 الف) ساخت مدل ب) حل مدل ج) مشاهده د) اجرا

☞ پاسخ :

گزینه الف

فرآیند *OR* دارای مراحل زیر است:

- ۱- مشاهده، ۲- تعریف مسئله، ۳- ساخت مدل، ۴- حل مدل، ۵- اجرای نتایج

۵- کدامیک از مدلهای زیر از مدلهای قطعی *OR* هستند؟

- الف) برنامه‌ریزی پویا ب) صفت ج) برنامه‌ریزی خطی د) شبیه‌سازی

☞ پاسخ :

گزینه ج

فصل دوم : برنامه‌ریزی خطی (مدل‌سازی)

پیچیدگی و پویا بودن محیط سازمانها ، باعث شده است که مدیران به آسانی تصمیم‌گیری نکنند . مدیران برای رسیدن به یک هدف مشخص با محدودیتهای بسیاری چون محدودیت منابع ، انرژی ، نیروی انسانی ، مواد ، پول ، و ... مواجه هستند . هدف اغلب مدیران و سازمانها ، رسیدن به سود بیشتر و یا به عبارت دیگر حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه می‌باشد . یکی از ابزار مهمی که مدیران برای بهینه کردن یک هدف با توجه به محدودیتها ، به کار می‌برند ؟ برنامه‌ریزی خطی است . برنامه‌ریزی خطی شامل مدلی است که دارای یک تابع هدف و چند محدودیت است که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیت‌ها وجود دارد .

در به کارگیری برنامه‌ریزی خطی سه گام اساسی باید در نظر گرفته شود که عبارتند از :

۱. مساله باید به گونه‌ای تعریف شود که با استفاده از برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد .
۲. مساله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود .
۳. مساله باید با استفاده از یک تکنیک مشخص ریاضی قابل حل باشد .

هر مدل برنامه‌ریزی خطی شامل اجزاء و ویژگیهای مشخصی است که عبارتند از:

۱- متغیرهای تصمیم: شامل نمادهای ریاضی است که سطح فعالیت هر مؤسسه را بیان می‌کنند.

۲- تابع هدف: یک رابطه خطی است که هدف مؤسسه را در قالب متغیرهای تصمیم بیان می‌کند. تابع هدف همواره به صورت «حداکثر کردن» و یا «حداقل کردن» به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

یا

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

که در آن c_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، سهم فعالیت j ، x_j در تابع هدف است.

۳- محدودیتهای مدل: بیانگر روابط خطی بین متغیرهای تصمیم هستند. که نشان دهنده محدودیت منابع، تقاضا و ... هستند که به فرم عمومی زیر بیان می‌شوند.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq = \geq) b_1$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n (\leq = \geq) b_r$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq = \geq) b_m$$

که در آن n ، $i = 1, 2, \dots, m$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ ، a_{ij} ، b_i ، مقدار لازم از منبع i برای یک واحد از فعالیت j است. a_{ij} ، b_i ، مقدار موجود هر یک از منابع قابل دسترس است.

مسائل فصل دوم

تمرینات (صفحه ۱۵ کتاب درسی)

- ۱- یک شرکت تولیدکننده اسباب‌بازی سه نوع اسباب‌بازی تولید می‌کند. نیروی کار مورد نیاز و هزینه هر واحد تولیدی از آنها طبق جدول زیر تعریف شده است:

نوع اسباب بازی	هزینه هر واحد تولید (ریال)	نیروی کار مورد نیاز هر واحد (ساعت)
۴	۷۰۰	A
۳	۱۰۰۰	B
۲	۵۰۰	C

کل بودجه کارخانه ۲۰۰۰۰ ریال است و کل ساعت‌های کار کارخانه ۶۰۰ ساعت است. تقاضای اسباب‌بازی نوع A، ۲۰۰ واحد، نوع B، ۳۰۰ واحد و برای نوع C، ۱۵۰ واحد می‌باشد. قیمت فروش هر واحد از اسباب‌بازیها به ترتیب، ۲۰۰۰، ۱۵۰۰۰، ۱۲۰۰۰ ریال می‌باشد. مساله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن برآورده ساختن تقاضای هر یک از اسباب‌بازیها سود کل تولیدات حداکثر شود.

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعداد تولید اسباب‌بازی نوع A: x_A

تعداد تولید اسباب‌بازی نوع B: x_B

تعداد تولید اسباب‌بازی نوع C: x_C

با توجه به اطلاعات مساله تابع هدف به صورت زیر است:

$$Max Z = 2000x_A + 15000x_B + 12000x_C - 700x_A - 1000x_B - 500x_C$$

$$= 13000x_A + 14000x_B + 11500x_C$$

توجه می‌کنیم که برای بدست آوردن تابع هدف (سود شرکت) هزینه تولید را از قیمت فروش کم کینم تا سود شرکت (تابع هدف) بدست آید.

محدودیت‌های مدل نیز به صورت زیر خواهد بود :

$$2x_A + 3x_B + 2x_C \leq 600 \quad \text{؛ محدودیت نیروی کار}$$

$$700x_A + 1000x_B + 500x_C \leq 200000 \quad \text{؛ محدودیت بودجه}$$

$$\begin{cases} x_A \geq 200 \\ x_B \geq 300 \\ x_C \geq 150 \end{cases} \quad \text{؛ محدودیت تقاضا}$$

توجه می‌کنیم که چون تقاضای اسباب‌بازی از نوع A ، ۲۰۰ واحد است، پس شرکت باید حداقل ۲۰۰ واحد اسباب‌بازی از نوع A تولید کند. به همین ترتیب شرکت باید حداقل ۳۰۰ واحد اسباب‌بازی از نوع B و حداقل ۱۵۰ واحد اسباب‌بازی از نوع C تولید کند.

خلاصه مدل به صورت زیر خواهد بود :

$$Max Z = 1300x_1 + 1400x_2 + 1150x_3$$

s.t

$$2x_A + 3x_B + 2x_C \leq 600$$

$$700x_A + 1000x_B + 500x_C \leq 200000$$

$$x_A \geq 200$$

$$x_B \geq 300$$

$$x_C \geq 150$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

۲- یک شرکت حمل و نقل دارای ۹۰ کامیون است که می‌توانند کالاهای تولیدی را از سه انبار به سه شهر حمل نمایند. این شرکت می‌تواند همواره ۳۰ کامیون را به هر یک از مسیرهای مربوط اختصاص دهد. ولی مدیر شرکت می‌خواهد به گونه‌ای عمل کند که سود کل ناشی از حمل و نقل حداقل شود.

جدول زیر سود ناشی از هر بار حمل را در مسیر انبارهای A, B, C به شهرهای ۱، ۲ و ۳ نشان می‌دهد :

			شهر
			انبار
۳	۲	۱	
۱۶۰	۲۱۰	۱۸۰	A
۹۰	۷۰	۱۰۰	B
۲۲۰	۸۰	۱۴۰	C

ارقام داخل جدول سود هر بار حمل و نقل را به هزار تومان به هر یک از شهرها نشان می‌دهد . شرکت می‌تواند . حداکثر ۴۰ کامیون را به شهر ۱ ، ۶۰ کامیون را به شهر ۲ و ۵۰ کامیون را به شهر ۳ بفرستد . مدیر شرکت می‌خواهد بداند که چه تعداد کامیون را به هر مسیر (از انبار به شهر) اخلاص دهد که سود کل حمل و نقل او حداکثر شود . مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) فرموله کنید .

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x_{ij} \quad (i = A, B, C, j = 1, 2, 3) \quad \text{تعداد کامیون حمل کننده از انبار } i \text{ به شهر } j :$$

به عنوان مثال x_{ij} تعداد کامیونی است که کالا را از انبار A به شهر ۱ حمل می‌کند .

با توجه به اطلاعات مساله ،تابع هدف به صورت زیر خواهد بود :

$$Max Z = 180x_{A1} + 210x_{A2} + 160x_{A3} + 100x_{B1}$$

$$+ 70x_{B2} + 90x_{B3} + 140x_{C1} + 80x_{C2} + 220x_{C3}$$

محدودیت‌های مدل نیز به صورت زیر می‌باشند :

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 40 \quad \text{: محدودیت کامیون شهر ۱}$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 60 \quad \text{: محدودیت کامیون شهر ۲}$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 50 \quad \text{: محدودیت کامیون شهر ۳}$$

$$x_{ij} \leq 30, \quad i = A, B, C, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{: محدودیت کامیون برای هر مسیر}$$

$$x_{ij} \leq 50, \quad i = A, B, C, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{: محدودیت نامنفی بودن}$$

توجه می‌کنیم تعداد کامیونی که به شهر ۱ اختصاص می‌یابد عبارتند از مجموع کامیونهایی که از انبار A, B, C به شهر ۱ کالا حمل می‌کنند . به همین ترتیب تعداد

کامیونهایی که به شهر ۲ اختصاص می‌باید عبارتند از مجموع کامیونهایی که از انبار A، C,B به شهر ۲ کالا حمل می‌کنند و به همین ترتیب تعداد کامیونهایی که به شهر ۳ اختصاص می‌باید عبارتند از مجموع کامیونهایی که از انبار A,C,B به شهر ۳ کالا حمل می‌کنند.

۳- کشاورزان یک منطقه زراعی تصمیم دارند که عملیات کاشت، داشت و برداشت را به شکل تعاضی انجام دهند، تا از قابلیتهای یکدیگر و امکانات دولتی استفاده کرده و تولید جمعی را افزایش دهند. این منطقه از سه مزرعه تشکیل شده است. دو عامل زمین و آب امکانات کاشت این مزارع را محدود می‌نمایند. اطلاعات مربوط به آب موجود و زمین قابل کشت سه مزرعه در جدول آمده است.

مزرعه	زمین قابل کشت(هکتار)	آب موجود(هزار متر مکعب)
۱	۴۰۰	۶۰۰
۲	۶۰۰	۸۰۰
۳	۳۰۰	۳۷۵

محصولات مناسب کشت در این منطقه زراعی عبارت از چغندر قند، پنبه و ذرت است. میزان عملکرد در هکتار و آب مورد نیاز این سه محصول با یکدیگر متفاوتند. به علاوه، برای حصول به ترکیب مناسبی از سه محصول، کاشت هر محصول نمی‌تواند از یک مقدار مشخصی بیشتر باشد، این اطلاعات در جدول زیر آمده‌اند.

محصول	حداکثر کشت (هکتار)	سود خالص (هزار متر مکعب)	صرف آب (تومان در هکتار)	سود خالص
چغندر قند	۶۰۰	۴۰۰۰۰	۳	۴۰۰۰۰
پنبه	۵۰۰	۳۵۰۰۰	۲	۳۵۰۰۰
ذرت	۳۲۵	۱۰۰۰۰	۱	۱۰۰۰۰

کشاورزان سه منطقه توافق کرده‌اند که نسبت زمین کاشته شده به زمین موجود برای هر سه مزرعه مساوی باشد. مساله را به منظور حداکثر کردن سود کل منطقه کشاورزی فرموله کنید.

پاسخ :

چغندر قند را محصول شماره ۱، پنبه را محصول شماره ۲، ذرت را محصول شماره ۳ می‌نامیم . متغیرهای تصمیمی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :
 $x_{ij} = 1, 2, 3 = i$ میزانی از مزرعه j که به کشت محصول i اختصاص یافته است :
 به عنوان مثال ، x_{11} میزانی از مزرعه ۱ است که به کشت محصول ۱ (چغندر قند) اختصاص یافته است .

با توجه به اطلاعات مساله تابع هدف به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 40000(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 30000(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \\ & + 10000(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که کل زمینی (بر حسب هکتار) که برای کشت چغندر قند تخصیص یافته است عبارت است از مجموع زمین زیرکشت چغندر قند در مزرعه‌های ۱، ۲، ۳ که عبارت است از $x_{11} + x_{12} + x_{13}$. به همین ترتیب کل زمین که برای کشت پنبه و ذرت تخصیص یافته را می‌توان بدست آورد .

همچنین کل زمین زیرکشت مزرعه ۱ عبارتست از مجموع زمین‌های زیرکشت مزرعه ۱ که برای کشت چغندر قند، پنبه و ذرت اختصاص یافته است که عبارتست از $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ و به همین ترتیب کل زمین زیرکشت مزرعه‌های ۲ و ۳ و ۱ را می‌توان بدست آورد . بنابراین محدودیتهای مدل عبارتند از :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400 \quad \text{: محدودیت مزرعه ۱}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600 \quad \text{: محدودیت مزرعه ۲}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 300 \quad \text{: محدودیت مزرعه ۳}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 600 \quad \text{: محدودیت کشت چغندر قند}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 500 \quad \text{: محدودیت کشت پنبه}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 325 \quad \text{: محدودیت کشت ذرت}$$

$$3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} \leq 600 \quad \text{: محدودیت آب مزرعه ۱}$$

$$3x_{21} + 2x_{22} + x_{23} \leq 800 \quad \text{: محدودیت مزرعه ۲}$$

$$3x_{31} + 2x_{32} + x_{33} \leq 375 \quad \text{: محدودیت مزرعه ۳}$$

محدودیت سیاست کشاورزان به صورت زیر است :

$$\frac{x_{11} + x_{21} + x_{31}}{400} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32}}{600} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33}}{300}$$

چون این محدودیت به صورت استاندارد نیست، آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{11} + x_{21} + x_{31}}{400} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32}}{600} \\ \frac{x_{11} + x_{21} + x_{31}}{400} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33}}{300} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = \frac{600(x_{12} + x_{22} + x_{32})}{400} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = \frac{300(x_{13} + x_{23} + x_{33})}{400} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 600(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 400(x_{12} + x_{22} + x_{32}) = 0 \\ 300(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 400(x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 0 \\ 300(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 600(x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 0 \end{array} \right.$$

و محدودیت نامنفی بودن نیز به صورت زیر است :

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3$$

۴- یک موسسه دامداری مایل است که با توجه به مواد موجود، خوارک مورد نیاز دامهای خود را با حداقل هزینه تأمین نماید. میزان عناصر مغذی موجود در هر کیلوگرم از این مواد (بر حسب تعداد واحد عنصر غذایی در ماده موجود)، مقداری از این عناصر مغذی که در روز مورد نیاز و هزینه هر یک از مواد در جدول زیر آمده است :

حدائق احتیاجات روزانه	یونجه	مواد آلی	ذرت	عناصر مغذی
۲۰۰	۴۰	۲۰	۹۰	قندها
۱۸۰	۶۰	۸۰	۳۰	بروتئین
۱۵۰	۴۰	۲۰	۱۰	ویتامینها
	۱۵	۱۸	۲۱	قیمت

مساله را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

پاسخ:

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x_{ij} = 1, 2, 3$ میزانی از عنصر مغذی i که در خوراک j موجود است:

عناصر مغذی: ۱ - قند، ۲ - پروتئین، ۳ - ویتامین‌ها

خوراک: ۱ - ذرت، ۲ - مواد آلی، ۳ - یونجه

با توجه به اطلاعات مساله، برنامه‌ریزی زیر را خواهیم داشت:

$$\min Z = 21(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 18(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 15(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

محدودیت‌های مدل:

$$90x_{11} + 20x_{12} + 140x_{13} \geq 200 \quad \text{قندها}$$

$$30x_{21} + 80x_{22} + 60x_{23} \geq 180 \quad \text{پروتئین}$$

$$10x_{31} + 20x_{32} + 140x_{33} \geq 150 \quad \text{ویتامین‌ها}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3$$

- پژوهش یک تیم فوتbal در صدد تهیه یک رژیم غذایی برای بازیکنان تیم است. بدین منظور وی سعی دارد، استانداردهای بهداشتی را برای آنها تعریف کند. دستورالعمل زیر برگرفته از این استانداردهاست:

۱. مقدار کالری بین ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰.

۲. حداقل ۵ میلی‌گرم آهن.

۳. بین ۲۰ تا ۶۰ گرم چربی.

۴. حداقل ۳۰ گرم پروتئین.

۵. حداقل ۴۰ گرم کربوهیدرات.

۶. حداقل ۳۰ میلی‌گرم کلسترول.

پژوهش تیم بدین منظور برنامه‌غذایی خود را بر اساس ۶ غذا تنظیم خواهد کرد. میزان ترکیبات هر غذا و هزینه هر واحد از آنها به شرح جدول می‌باشد. پژوهش تیم می‌خواهد یک رژیم غذایی برای بازیکنان تهیه کند که بتواند ضمن برآورده کردن نیازمندی غذایی اعضای تیم، هزینه غذا نیز حداقل گردد. مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) فرموله کنید.

کاملترین حل مسائل تحقیق در عملیات(۱)

نوع غذا	کالری	آهن (mg)	بروتئین (g)	کربوهیدرات (g)	چربی (g)	کلسترول (mg)	هزینه (ریال)
مرغ	۵۲۰	۴/۴	۱۷	۰	۳۰	۱۸۰	۸۰۰
ماهی	۵۰۰	۳/۳	۸۵	۰	۵	۹۰	۳۷۰
گوشت گوسفند	۸۶۰	۰/۳۰	۸۲	۰	۷۵	۳۵۰	۲۳۰
گوشت گاو	۶۰۰	۳/۴	۱۰	۰	۳	۰	۹۰
سیب زمینی	۵۰	۰/۵۰	۶	۰	۰	۰	۷۵
کالباس	۴۶۰	۲/۲	۱۰	۷۰	۰	۰	۴۰
شیر (٪۲)	۲۴۰	۰/۲	۱۶	۲۲	۱۰	۲۰	۸۳

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می کنیم :

x_1 : مرغ

x_2 : ماهی

x_3 : گوشت گوسفند

x_4 : گوشت گاو

x_5 : سیب زمینی

x_6 : کالباس

x_7 : شیر (٪۲)

با توجه به اطلاعات مساله ،تابع هدف و محدودیتهای مساله به صورت زیر خواهند بود :

$$Min Z = 800x_1 + 370x_2 + 230x_3 + 90x_4 + 75x_5 + 40x_6 + 83x_7$$

s.t

محدودیت کالری به صورت زیر است :

$$\begin{cases} 520x_1 + 500x_2 + 860x_3 + 600x_4 + 50x_5 + 460x_6 + 240x_7 \leq 2000 \\ 520x_1 + 500x_2 + 860x_3 + 600x_4 + 50x_5 + 460x_6 + 240x_7 \geq 15000 \end{cases}$$

محدودیت آهن به صورت :

$$4/x_1 + 3/x_2 + 0/30x_3 + 3/4x_4 + 0/5x_5 + 2/2x_6 + 0/2x_7 \geq 5$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 5x_2 + 75x_3 + 3x_4 + 10x_7 \leq 60 \\ 30x_1 + 5x_2 + 75x_3 + 3x_4 + 10x_7 \geq 20 \end{cases} : \text{محدودیت چربی}$$

$$17x_1 + 85x_2 + 82x_3 + 10x_4 + 6x_5 + 10x_6 + 16x_7 \geq 30 : \text{محدودیت پروتئین}$$

$$30x_4 + 70x_5 + 22x_7 \geq 40 : \text{محدودیت کربوهیدرات}$$

$$180x_1 + 90x_2 + 350x_3 + 20x_7 \leq 130 : \text{محدودیت کلسترول}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0$$

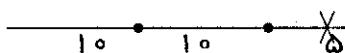
۶- یک شرکت تولیدکننده مصالح ساختمانی اخیراً سفارشی برای الوار در ۳ اندازه مختلف دریافت کرده است .

اندازه (متر)	تعداد سفارش
۷	۷۰۰
۹	۱۲۰۰
۱۰	۳۰۰

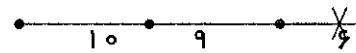
طول الوارهای موجود در شرکت همگی دارای استاندارد ۲۵ متری است . بنابراین شرکت باید الوارهای استاندارد را به اندازه‌های سفارش شده برش دهد . این شرکت مایل است بداند الوارهای استاندارد را با چه الگویی برش بزند تا تعداد کل تخته‌های الوار مورد نیاز برای تامین سفارش حداقل گردد . مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید .

پاسخ :

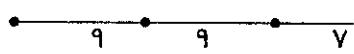
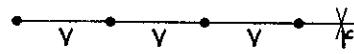
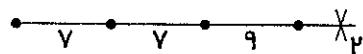
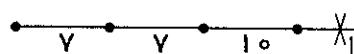
طریقه‌های برش زیر را در نظر می‌گیریم :



(طریقه اول برش) - x_1



(روش دوم برش) - x_2

(روش سوم برش) - x_3 (روش چهارم برش) - x_4 (روش پنجم برش) - x_5 (روش ششم برش) - x_6

متغیرهای تصمیم عبارتند از :

تعداد الوارهای استانداردی که دارای روش اول برش هستند : x_1

تعداد الوارهای استانداردی که دارای روش دوم برش هستند : x_2

تعداد الوارهای استانداردی که دارای روش سوم برش هستند : x_3

تعداد الوارهای استانداردی که دارای روش چهارم برش هستند : x_4

تعداد الوارهای استانداردی که دارای روش پنجم برش هستند : x_5

تعداد الوارهای استانداردی که دارای روش ششم برش هستند : x_6

مانند مثال ۹-۳-۲، تابع هدف و محدودیتهای مساله به صورت زیر خواهد بود :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

s.t

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \geq 700 \quad \text{: محدودیت سفارش الوار ۷ متری}$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1200 \quad \text{: محدودیت سفارش الوار ۹ متری}$$

$$2x_1 + x_2 + x_6 \geq 1300 \quad \text{: محدودیت سفارش الوار ۱۰ متری}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0$$

در نوشتمن محدودیتها، به عنوان مثال در محدودیت مربوط به سفارش الوار ۷ متری،

چون در طریقه اول برش الوار ۷ متری حاصل نمی‌شود، لذا در قید مربوط، ضرب x_1

صفراست (x_1 ظاهر نشده است) همین‌طور است در مورد x_6 . اما در روش سوم برش، به

ازای هر برش از نوع سوم، یک الوار ۷ متری حاصل می‌شود. در نتیجه در قید مربوط

ضریب x_2 برابر ۳ است. همین‌طور چون در روش چهارم برش، به ازای هر برش ۳ الوار ۷

متری بدست می‌آید، لذا ضریب x_4 در قید مربوطه برابر ۳ است. به همین طریق سایر

ضرایب محاسبه می‌شوند.

۷- کارخانه‌ای تولید یکی از محصولات غیرسودآور خط تولید خود را متوقف ساخته است. بدین ترتیب، ظرفیت تولیدی قابل ملاحظه‌ای آزاد گردیده است. مدیریت در صدد است تا این ظرفیت اضافی به منظور تولید سه محصول، که آنها را محصولات ۱، ۲ و ۳ می‌نامیم، استفاده کند. ظرفیت آزاد ماشین‌آلات مورد نیاز تولید این سه محصول در زیر آمده است:

نوع ماشین	زمان موجود(ماشین ساعت در هفته)
فرز	۵۰۰
تراش	۳۵۰
سنگ	۱۵۰

میزان ماشین ساعت لازم برای تولید این محصولات به شرح زیر است:

نوع ماشین	ضریب بهره‌وری (بر حسب ماشین ساعت لازم برای هر محصول)		
	محصول ۳	محصول ۲	محصول ۱
فرز	۵	۳	۹
تراش	۰	۴	۵
سنگ	۲	۰	۳

بخش فروش پس از مطالعه بازار به این نتیجه رسیده است که میزان تولید محصولات ۱ و ۲ هر چه باشد به فروش خواهد رفت، اما فروش بالقوه محصول ۳ بیش از ۲۰ واحد در هفته نیست. سود هر واحد از محصولات ۱، ۲ و ۳ به ترتیب مساوی ۱۲، ۳۰ و ۱۵ دلار است. مدل برنامه‌ریزی خطی فوق را به منظور تعیین میزان تولید هر یک از محصولات و با هدف حداکثر کردن سود فرموله نمایید.

پاسخ:

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

میزان تولید محصول ۱: x_1

میزان تولید محصول ۲: x_2

میزان تولید محصول ۳ : x_3

با توجه به اطلاعات مساله تابع هدف و محدودیتها به صورت زیر خواهد بود :

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500 \quad \text{: محدودیت ماشین فرز}$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 350 \quad \text{: محدودیت ماشین تراش}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 150 \quad \text{: محدودیت ماشین سنگ}$$

$$x_3 \leq 20 \quad \text{: محدودیت فروش محصول ۳}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

-۸- یک شرکت تبلیغاتی می‌خواهد یک برنامه تبلیغاتی را از طریق سه وسیله رادیو، تلویزیون و مجله به اجرا درآورد. هدف از برنامه تبلیغاتی آگاهی حداکثر مشتریان بالقوه شرکت از برنامه تبلیغی می‌باشد. نتایج مطالعات بازاریابی در جدول زیر آورده شده است.

مجله	رادیو	تلوزیون		شرح
		ساعت عادی	ساعت مناسب	
۱۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۷۵۰۰۰	هزینه هر بار تبلیغ (تومان)
۲۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰۰	تعداد مشتریان بالقوه‌ای که از تبلیغ اطلاع پیدا می‌کنند
۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	تعداد مشتریان زنی که از تبلیغ اطلاع پیدا می‌کنند

حداکثر بودجه تبلیغاتی شرکت ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. شرکت خواهان این امر است که :

۱. حداقل ۲ میلیون نفر از زنان از تبلیغ آگاهی پیدا کنند.
 ۲. حداکثر بودجه تبلیغ در تلویزیون ۵۰۰۰۰ تومان باشد.
 ۳. حداقل سه بار تبلیغ در ساعت عادی روز در تلویزیون و دوبار در وقت‌های مناسب به عمل آید.
 ۴. تعداد تبلیغات در مجله و رادیو بین ۵ تا ۱۰ بار باشد.
- مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

تعداد تبلیغات در ساعت مناسب تلویزیون : x_1

تعداد تبلیغات در ساعت عادی تلویزیون : x_2

تعداد تبلیغات در رادیو : x_3

تعداد تبلیغات در مجله : x_4

با توجه به اطلاعات مساله تابع هدف و محدودیتهای مدل به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{Max } Z = 900000x_1 + 1400000x_2 + 500000x_3 + 1400000x_4$$

$$75000x_1 + 140000x_2 + 30000x_3 + 10000x_4 \leq 1000000 \quad \text{: محدودیت بودجه}$$

$$140000x_1 + 300000x_2 + 200000x_3 + 100000x_4 \geq 2000000 \quad \text{: محدودیت ۱}$$

$$75000x_1 + 140000x_2 \leq 500000 \quad \text{: محدودیت ۲}$$

$$\begin{cases} x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 2 \end{cases} \quad \text{: محدودیت ۳}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \geq 5 \end{cases} \quad \text{: محدودیت ۴}$$

-۹- یک رستوران به منظور ارائه خدمات در هر روز به تعدادی خدمتکار به صورت زیر نیازمند است .

حداقل تعداد مورد نیاز	اوقات روز
۴	۲-۶
۸	۶-۱۰
۱۰	۱۰-۱۴
۷	۱۴-۱۸
۱۲	۱۸-۲۲
۴	۲۲-۲

هر خدمتکار هشت ساعت متوالی در روز کار می‌کند . هدف تعیین کمترین تعداد خدمتکار مورد نیاز است که احتیاجات فوق را برآورده نماید . مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید .

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

تعداد کارگرانی که در ساعت ۲ شروع به کار می‌کنند . x_1

تعداد کارگرانی که در ساعت ۶ شروع به کار می‌کنند . x_2

تعداد کارگرانی که در ساعت ۱۰ شروع به کار می‌کنند . x_3

تعداد کارگرانی که در ساعت ۱۴ شروع به کار می‌کنند . x_4

تعداد کارگرانی که در ساعت ۱۸ شروع به کار می‌کنند . x_5

تعداد کارگرانی که در ساعت ۲۲ شروع به کار می‌کنند . x_6

با توجه به اینکه هر کارگر ۸ ساعت متوالی کار می‌کند ، پس کارگری که در ساعت ۲ شروع به کار کرده است ، تا ساعت ۱۰ کار خواهد کرد ، یعنی شیفت ۲-۶ و ۱۰-۶ کار خواهد کرد . لذا هر کارگر دو شیفت پشت سر هم را کار می‌کند . پس در هر شیفت ۲ نوع کارگر وجود دارد :

کارگری که شیفت قبل شروع به کار کرده و شیفت فعلی را نیز باید کار کند و کارگری که تازه شروع به کار کرده است .

بنابراینتابع هدف و محدودیتهای مدل به صورت زیر خواهد بود :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

s.t :

$$x_1 + x_6 \geq 4 : \text{ محدودیت شیفت ۲-۶}$$

$$x_2 + x_1 \geq 8 : \text{ محدودیت شیفت ۶-۱۰}$$

$$x_3 + x_2 \geq 10 : \text{ محدودیت شیفت ۱۰-۱۴}$$

$$x_4 + x_3 \geq 7 : \text{ محدودیت شیفت ۱۴-۱۸}$$

$$x_5 + x_4 \geq 11 : \text{ محدودیت شیفت ۱۸-۲۲}$$

$$x_6 + x_5 \geq 4 : \text{ محدودیت شیفت ۲۲-۲}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

۱۰- یک شرکت تولیدکننده دارای ۴ ماشین تولیدی است . این شرکت اخیراً قراردادی را برای تولید سه نوع محصول منعقد کرده است . تعداد سفارش برای محصول نوع ۱ ، ۴۰۰ واحد ، برای

محصول نوع ۲، ۵۷۰ واحد و برای محصول نوع ۳، ۳۲۰ واحد است . زمان مورد نیاز (بر حسب دقیقه) برای تولید هر یک از محصولات بر حسب نوع ماشین تولیدی در جدول زیر آمده است :

ماشین				محصول
۴	۳	۲	۱	
۳۹	۳۶	۴۱	۳۵	۱
۴۳	۳۲	۳۶	۴۰	۲
۴۰	۳۳	۳۷	۳۸	۳

کل ساعت‌های تولیدی برای هر یک از ماشینها به ترتیب : ۱۵۰، ۲۰۰، ۲۴۰، ۲۵۰ ساعت است . سود خالص ناشی از هر محصول به ازای هر ماشین در جدول زیر (بر اساس هزار ریال) آمده است :

ماشین				محصول
۴	۳	۲	۱	
۷۹	۸۲	۷۸	۷۸	۱
۶۳	۹۲	۸۹	۶۷	۲
۵۸	۹۰	۸۱	۸۴	۳

تولید کننده می‌خواهد بداند که از هر محصول به ازای هر ماشین چه تعداد تولید کند که سود کل تولیدات او حداقل شود . مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید .

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$x_{ij} = 1, 2, 3 = j, i = 1, 2, 3$ تعدادی از محصول i که توسط ماشین j تولید شده است .

با توجه به اطلاعات مساله ،تابع هدف و محدودیتهای مدل به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 78x_{11} + 78x_{12} + 82x_{13} + 79x_{21} + 67x_{22} + 89x_{23} \\ &\quad + 92x_{31} + 63x_{32} + 81x_{33} + 90x_{34} + 58x_{35} \end{aligned}$$

s.t :

$$\begin{aligned}
 & 35x_{11} + 40x_{12} + 38x_{13} \leq 150 \times 60 \\
 & 41x_{11} + 36x_{12} + 37x_{13} \leq 140 \times 60 \\
 & 34x_{11} + 32x_{12} + 33x_{13} \leq 200 \times 60 \\
 & 39x_{11} + 43x_{12} + 40x_{13} \leq 250 \times 60 \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 400 \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 570 \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 320 \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

۱۱- یک پالایشگاه با استفاده از چهار نوع ماده اولیه سه نوع گازوییل درجه ۱، ۲، ۳ را می‌سازد.
جدول زیر حداکثر مقدار موجود از هر ماده اولیه و هزینه هر بشکه از آنها را نشان می‌دهد:

ماده اولیه	حداکثر بشکه در دسترس به طور روزانه	هزینه هر بشکه (ریال)
۹۰۰۰۰	۵۰۰۰	۱
۷۰۰۰۰	۲۴۰۰	۲
۱۴۰۰۰۰	۴۰۰۰	۳
۶۰۰۰۰	۱۵۰۰	۴

در ضمن هر نوع گازوییل دارای مشخصات استانداردی از ترکیبات مواد اولیه چهارگانه می‌باشد.
جدول زیر بیانگر مشخصات ترکیبات و قیمت هر بشکه از نوع گازوییل می‌باشد.

درجه گازوییل	مشخصه ترکیبات	قیمت فروش هر بشکه (ریال)
۱	$\left. \begin{array}{l} \text{حداقل } 40\% \text{ از ماده اولیه ۱} \\ \text{حداکثر } 20\% \text{ از ماده اولیه ۲} \\ \text{حداقل } 30\% \text{ از ماده اولیه ۳} \end{array} \right\}$	۱۲۰۰۰۰۰
۲	حداقل ۴۰٪ از ماده اولیه ۳	۱۸۰۰۰۰۰
۳	$\left. \begin{array}{l} \text{حداکثر } 50\% \text{ از ماده اولیه ۲} \\ \text{حداقل } 10\% \text{ از ماده اولیه ۱} \end{array} \right\}$	۱۰۰۰۰۰۰

پالایشگاه تمایل دارد که از هر نوع گازوییل حداقل ۳۰۰۰ بشکه تولید کند. مدیر پالایشگاه می‌خواهد به گونه‌ای چهار نوع ماده اولیه را ترکیب کند که ضمن رعایت مشخصه ترکیبات سود کل تولیدات را حداکثر نماید.

مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

پاسخ :

مانند مثال ۲-۳-۶، متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
تعداد بشکه‌ای که به طور روزانه از ماده اولیه نوع i در سوخت درجه j استفاده می‌شود:

$$i = ۱, ۲, ۳, ۴ \quad j = ۱, ۲, ۳$$

با توجه به اطلاعات داده شده مدل مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} Max Z = & ۱۲۰۰۰۰۰ (x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \\ & + ۱۸۰۰۰۰۰ (x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\ & + ۱۰۰۰۰۰۰ (x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) \\ & - ۹۰۰۰۰ (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ & - ۷۰۰۰۰ (x_{21} + x_{22} + x_{23}) \\ & - ۱۲۰۰۰۰ (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - ۶۰۰۰۰ (x_{41} + x_{42} + x_{43}) \end{aligned}$$

به طور خلاصه تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} Max Z = & ۱۱۱۰۰۰۰ x_{11} + ۱۱۳۰۰۰۰ x_{21} + ۱۰۸۰۰۰۰ x_{31} \\ & + ۱۱۴۰۰۰۰ x_{41} + ۱۷۱۰۰۰۰ x_{12} + ۱۷۳۰۰۰۰ x_{22} \\ & + ۱۶۸۰۰۰۰ x_{32} + ۱۷۴۰۰۰۰ x_{42} + ۹۱۰۰۰۰ x_{13} \\ & + ۹۳۰۰۰۰ x_{23} + ۸۸۰۰۰۰ x_{33} + ۹۴۰۰۰۰ x_{43} \end{aligned}$$

محدودیتهای مساله نیز عبارتند از:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1600 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1000 \end{cases} : \text{محدودیت منابع}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 3000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 3000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 3000 \end{cases} : \text{محدودیت تولید}$$

محدودیت ترکیبات گازوئیل درجه ۱:

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \geq 0.15 \Rightarrow 0.5x_{11} - 0.15x_{21} - 0.15x_{31} - 0.15x_{41} \geq 0$$

$$\frac{x_{21}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \leq 0.15 \Rightarrow -0.5x_{11} + 0.15x_{21} - 0.15x_{31} - 0.15x_{41} \leq 0$$

$$\frac{x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \geq 0.15 \Rightarrow -0.5x_{11} - 0.5x_{21} + 0.15x_{31} - 0.15x_{41} \geq 0$$

محدودیت ترکیبات گازوئیل درجه ۲:

$$\frac{x_{41}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \geq 0.15 \Rightarrow -0.5x_{11} - 0.5x_{21} - 0.5x_{31} + 0.15x_{41} \geq 0$$

محدودیت گازوئیل درجه ۳:

$$\frac{x_{12}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \leq 0.15 \Rightarrow -0.15x_{11} + 0.15x_{21} - 0.15x_{31} - 0.15x_{41} \leq 0$$

$$\frac{x_{22}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \leq 0.15 \Rightarrow 0.15x_{11} - 0.15x_{21} - 0.15x_{31} - 0.15x_{41} \geq 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3$$

۱۲- یک تولیدکننده تلویزیون رنگی ۱۴ اینچ در صد تهیه برنامه زمانبندی تولید خود طی ۵ ماه آینده می‌باشد . آمار تولید گذشته نشان می‌دهد که ۲۰۰۰ دستگاه تلویزیون در ماه قابل تولید شده است . همچنین می‌توان در وقت اضافه‌کاری ۶۰۰ دستگاه دیگر در ماه تولید کرد . هزینه هر دستگاه تلویزیون رنگی ۱۴ اینچ ۱۰۰۰۰ تومان در نوبت عادی کار و ۱۵۰۰۰ تومان در نوبت اضافه‌کاری است . تعداد سفارشات طی ۵ ماه آینده به شرح جدول زیر است :

ماه	تعداد تلویزیون سفارش داده شده
۱	۱۲۰۰
۲	۲۱۰۰
۳	۲۴۰۰
۴	۳۰۰۰
۵	۴۰۰۰

هزینه انبارداری در ماه ۲۰۰۰ تومان به ازاء هر دستگاه تلویزیون است . موجودی انتهای ماه پنجم باید صفر باشد . مدیر تولید می‌خواهد بداند که در هر ماه چند دستگاه تلویزیون باید تولید کند که ضمن برآورده کردن سفارشات کل هزینه‌های تولید و انبارداری او حداقل گردد . مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید .

پاسخ :

مانند مثال ۷-۳-۲ ، متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

تعداد تولید تلویزیون در ماه j در زمان عادی ($R_j : (j = 1, 2, 3, 4, 5)$)

تعداد تولید تلویزیون در ماه j در زمان اضافه ($O_j : (j = 1, 2, 3, 4, 5)$)

تعداد تلویزیون مازاد در ماه j که باید انبار شود . ($I_j : (j = 1, 2, 3, 4)$)

بنابراین ۵ متغیر تصمیم برای تولید تلویزیون در زمان عادی ، پنج متغیر برای تولید تلویزیون در زمان اضافه و فقط چهار متغیر برای موجودی انبار در انتهای ماه تعریف می‌شود ، چون سیاست شرکت بر آن است که موجودی انبار در انتهای ماه پنجم صفر شود .

تابع هدف :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 100000 (R_1 + R_p + R_m + R_r + R_d) \\ & + 150000 (O_1 + O_p + O_m + O_r + O_d) \\ & + 2000 (I_1 + I_p + I_m + I_r) \end{aligned}$$

محدودیت های مدل :

چون ظرفیت تولید در زمان عادی ماهانه ۲۰۰۰ دستگاه است، پس ۵ محدودیت زیر را خواهیم داشت :

$$R_1 \leq 2000$$

$$R_p \leq 2000$$

$$R_m \leq 2000$$

$$R_r \leq 2000$$

$$R_d \leq 2000$$

همچنین ظرفیت تولید در زمان اضافه کاری ماهانه ۶۰۰ دستگاه است. پس ۵ محدودیت زیر را نیز خواهیم داشت :

$$O_1 \leq 600$$

$$O_p \leq 600$$

$$O_m \leq 600$$

$$O_r \leq 600$$

$$O_d \leq 600$$

و پنج محدودیت نیز برای برآورده کردن سفارشات به صورت زیر داریم :

$$R_1 + O_1 - I_1 \geq 1400$$

$$R_p + O_p + I_1 - I_p \geq 2100$$

$$R_m + O_m + I_p - I_m \geq 2400$$

$$R_p + O_p + I_p - I_f \geq 3000$$

$$R_h + O_h + I_h \geq 4000$$

$$R_j \geq O_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$I_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

۱۳- شرکت ایران دوخت ، تولیدکننده چهار نوع لباس مردانه است . این شرکت اخیراً فرادرادی را با یک فروشگاه انقاد کرده است که در آن تعهد نموده است که از امروز تا حداکثر ۷۲ ساعت دیگر لباسهای مورد نیاز را تحویل دهد . بنابراین کارخانه باید بطور تمام وقت فعالیت کند . لباسهای تولید شده بوسیله یک کامیون به فروشگاه حمل خواهند شد که کل ظرفیت کامیون ۱۲۰۰ جین از لباسهای نوع C یا D است . هر جین از لباسهای نوع A و B سه برابر لباسهای نوع C و D فضای لازم دارند . کل بودجه تولیدی شرکت ۲۵ هزار ریال است که همه قابل هزینه شدن در تولید لباسها می‌باشد . شرکت تولیدی دارای دو انبار است که انبار شماره ۱ آن به لباسهای نوع A و B اختصاص دارد و انبار شماره ۲ به لباسهای نوع C و D . ظرفیت هر یک از انبارها ۵۰۰ جین است . منابع مورد نیاز ، هزینه تولید و سود هر جین از لباسهای مختلف در جدول زیر داده شده است :

نوع لباس	زمان پردازش(ساعت)	هزینه (ریال)	سود(ریال)
A	۰/۱۰	۳۶	۹۰
B	۰/۲۵	۴۸	۱۲۵
C	۰/۰۸	۲۵	۴۵
D	۰/۲۱	۳۵	۶۵

مساله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن تعیین تعداد تولید از هر نوع لباس (جین) ، سود کل شرکت ، حداکثر شود .

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

تعداد تولید لباس نوع A : x_A

تعداد تولید لباس نوع B : x_B

تعداد تولید لباس نوع C : x_C

تعداد تولید لباس نوع D

تابع هدف :

$$\text{Max } Z = 90x_A + 125x_B + 150x_C + 65x_D - 36x_A - 48x_B - 25x_C - 35x_D$$

به طور خلاصه تابع هدف به صورت زیر نوشته می شود :

$$\text{Max } Z = 54x_A + 77x_B + 20x_C + 30x_D$$

محدودیت های مدل :

با توجه به اینکه هر جین از لباس های نوع A یا B سه برابر لباس های نوع C و D فضای لازم دارند و کل ظرفیت کامیون ۱۲۰۰ جین از لباس های نوع C یا D است . لذا محدودیت ظرفیت کامیون به صورت زیر خواهد بود :

$$3x_A + 3x_B + x_D + x_C \leq 1200$$

سایر محدودیت ها به صورت زیر است :

$$36x_A + 48x_B + 25x_C + 35x_D \leq 25000 : \text{محدودیت بودجه}$$

$$0.1x_A + 0.25x_B + 0.08x_C + 0.21x_D \leq 72 : \text{محدودیت زمان}$$

$$x_A + x_B \leq 500 : \text{محدودیت انبار ۱}$$

$$x_C + x_D \leq 500 : \text{محدودیت انبار ۲}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = A, B, C, D$$

۱۴- یک شرکت یخچال سازی ، چهار نوع یخچال D, C, B, A را تولید می کند . این شرکت فقط دو کارخانه تولید در اختیار دارد . کارخانه اول قادر است روزانه ۲۰ دستگاه از نوع A ، ۵۰ دستگاه از نوع B ، ۳۰ دستگاه از نوع C و ۱۵ دستگاه از نوع D را تولید نماید . همچنین کارخانه شماره ۲ می تواند ، روزانه ۶۰ دستگاه از نوع A ، ۲۵ دستگاه از نوع B ، ۱۵ دستگاه از نوع C و ۲۵ دستگاه از نوع D تولید کند . هزینه عملیاتی کارخانه ۱ روزانه ۹۰۰۰۰ تومان و برای کارخانه شماره ۲ روزانه ۱۱۰۰۰۰ تومان می باشد .

اگر این شرکت در هفته سفارش برای ۱۹۰ یخچال از نوع A ، ۱۷۰ دستگاه از نوع B ، ۹۰ دستگاه از نوع C و ۱۰۰ یخچال از نوع D داشته باشد ، هر یک از دو کارخانه چند روز در هفته می بایست کار کند تا سفارش های موردنظر با حداقل هزینه ساخته شوند . مدل برنامه ریزی خطی این مساله را بنویسید .

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

تعداد روزهایی از هفته که کارخانه ۱ کار می‌کند : x_1

تعداد روزهایی از هفته که کارخانه ۲ کار می‌کند : x_2

تابع هدف :

با توجه به اینکه هزینه عملیاتی کارخانه ۱ روزانه ۹۰۰۰۰ تومان و کارخانه ۲ روزانه ۱۱۰۰۰۰

تومان است ، تابع هدف مساله به صورت زیر خواهد بود :

$$\text{Min } Z = 90000x_1 + 110000x_2$$

محدودیت‌های مساله :

می‌دانیم کارخانه ۱ به ازای هر روز که کار می‌کند ۲۰ دستگاه از نوع A تولید می‌کند و

کارخانه ۲ به ازای هر روز کار می‌کند ۳۰ دستگاه از نوع A تولید می‌کند . بنابراین با توجه

به نحوه تعریف متغیرهای تصمیم ، محدودیت مربوط به تأمین سفارش یخچال نوع A به

صورت زیر خواهد بود :

$$20x_1 + 30x_2 \geq 190 \quad \text{: محدودیت سفارش یخچال نوع A}$$

به همین ترتیب محدودیت مربوط به سایر سفارشات نیز به صورت زیر خواهد بود :

$$25x_1 + 50x_2 \geq 170 \quad \text{: محدودیت سفارش یخچال نوع B}$$

$$30x_1 + 15x_2 \geq 90 \quad \text{: محدودیت سفارش یخچال نوع C}$$

$$15x_1 + 25x_2 \geq 100 \quad \text{: محدودیت سفارش یخچال نوع D}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱۵- یک شرکت بازارگانی قیمت خرید و فروش یک کالای معین را طی چهار ماه آینده می‌داند .

قیمت خرید (C_i) و قیمت فروش (P_i) در هر ماه (i) در جدول زیر داده شده است . ضمناً ظرفیت

انبار این شرکت بازارگانی ۱۰۰۰۰ واحد است ولی هزینه‌ای ندارد .

	ماه i			
	۱	۲	۳	۴
(C_i)	۵	۶	۷	۸
(P_i)	۴	۸	۶	۷

فرض کنید مقدار فروش در آغاز هر ماه توسط مقدار خریداری شده تعیین شود. در آغاز ماه اول ۲۰۰۰ واحد از کالا در انبار موجود است. این شرکت می‌خواهد بداند در هر ماه چقدر کالا خریداری کند و چقدر بفروش رساند تا حداکثر سود را داشته باشد. یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای این مساله بنویسید.

پاسخ:

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعداد کالای خریداری شده در ماه i : x_i

تعداد کالای فروخته شده در ماه i : y_i

کالای موجود در اول ماه در انبار: I_i

$$i = 1, 2, 3, 4$$

تابع هدف

$$\text{Max } Z = 4y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 7y_4 - 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 8x_4$$

محدودیت‌های مدل:

$$\begin{cases} x_1 + 2000 \leq 10000 \\ x_2 + I_1 \leq 10000 \\ x_3 + I_2 \leq 10000 \\ x_4 + I_3 \leq 10000 \end{cases} \quad \text{محدودیت انبار}$$

$$\begin{cases} y_1 \leq 2000 + x_1 \\ y_2 \leq I_1 + x_2 \\ y_3 \leq I_2 + x_3 \\ y_4 \leq I_3 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - x_1 \leq 2000 \\ y_2 - x_2 - I_1 \leq 0 \\ y_3 - x_3 - I_2 \leq 0 \\ y_4 - x_4 - I_3 \leq 0 \end{cases} \quad \text{محدودیت فروش}$$

$$x_i, y_i, I_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

۱۶- یک سرمایه‌گذار جوان مبلغ ۲۵۰۰۰۰ واحد اندوخته‌اش را در پروژه‌های مختلف می‌خواهد سرمایه‌گذاری کند. وی با کمک یک سازمان مشاوره شش گزینه برای سرمایه‌گذاری تعیین کرده است. بعد از تجزیه و تحلیلهای بسیار دقیق، مشاور، اطلاعات زیر را در مورد فرصت‌های سرمایه‌گذاری و برآورد بازده آنها در اختیار این شخص قرار داده است.

گزینه‌های سرمایه‌گذاری	برآورده بازده (%)
قرضه عمومی	۱۹
سهام عمومی	۱۳/۵
سهام نوع A	۱۵
سهام نوع B	۱۷
سهام تضمینی	۲۵
سهام ممتاز	۱۴

این سرمایه‌گذار می‌خواهد حداکثر ، ۵۰۰۰۰ ریال در خرید اوراق قرضه عمومی سرمایه‌گذاری کند . همچنین مایل است حداکثر ۱۰٪ در خرید سهام نوع A و سهام نوع B و سهام تضمینی سرمایه‌گذاری کند . مبلغ سرمایه‌گذاری شده در سهام ممتاز نیز باید حداقل با مبلغ سرمایه‌گذاری شده در خرید سهام عادی برابر باشد . به هر حال در هر مورد نباید بیش از ۲۵٪ کل مبلغ ، سرمایه‌گذاری شود . این سرمایه‌گذار جوان می‌خواهد بداند در هر مورد چقدر سرمایه‌گذاری کند تا بیشترین بازگشت مورد انتظار را به دست آورد . یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای این مساله فرموله کنید

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

میزان سرمایه‌گذاری در قرضه عمومی : x_1

میزان سرمایه‌گذاری در سهام عمومی : x_2

میزان سرمایه‌گذاری در سهام نوع A : x_3

میزان سرمایه‌گذاری در سهام نوع B : x_4

میزان سرمایه‌گذاری در سهام تضمینی : x_5

میزان سرمایه‌گذاری در سهام ممتاز : x_6

تابع هدف :

$$\text{Max } Z = 0/19 x_1 + 0/135 x_2 + 0/15 x_3 + 0/17 x_4 + 0/25 x_5 + 0/14 x_6$$

محدودیت‌های مدل :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 250000$$

$x_1 \leq 50000$: محدودیت اوراق قرضه

محدودیت سرمایه‌گذاری در سهام نوع A, B و تضمینی :

$$x_p + x_r + x_h \leq 0/1 (250000) \Rightarrow x_p + x_r + x_h \leq 250000$$

$x_e \geq x_p \Rightarrow x_e - x_p \geq 0$: محدودیت سرمایه‌گذاری در سهام نوع ممتاز و عادی

$$\begin{cases} x_1 \leq 0/25 (250000) \\ x_p \leq 0/25 (250000) \\ x_r \leq 0/25 (250000) \\ x_e \leq 0/25 (250000) \\ x_h \leq 0/25 (250000) \\ x_s \leq 0/25 (250000) \end{cases}$$

: محدودیت $\%25$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

۱۷- شرکتی دو نوع کلاه شاپو تولید می‌کند. مدت زمان تولید یک کلاه از نوع اول دو برابر زمان لازم برای تولید یک کلاه از نوع دوم است. اگر تمام کلاهها فقط از نوع دوم باشند، شرکت می‌تواند روزانه جمماً ۵۰۰ کلاه تولید کند. حداقل فروش روزانه کلاههای نوع اول و دوم در بازار ۱۵۰ و ۲۵۰ عدد است. فرض کنید که سود حاصل از فروش هر کلاه از نوع اول و دوم به ترتیب ۸ تومان و ۵ تومان منظور شود. مطلوب است تعیین تعداد کلاههایی که باید از نوع اول و دوم تولید شوند تا سود کل بیشینه شود. مساله را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

پاسخ :

متغیرهای تصمیم :

x_1 : تعداد تولید کلاه از نوع

x_p : تعداد تولید کلاه از نوع ۲

$$Max Z = 8x_1 + 5x_p$$

تابع هدف :

محدودیت‌های مدل :

$$2x_1 + x_p \leq 500 : \text{محدودیت تولید}$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 150 \\ x_p \leq 250 \end{cases} : \text{محدودیت فروش}$$

$$x_1, x_p \geq 0$$

۱۸- چهار فرآورده متولیاً روی دو ماشین پردازش می‌شوند . مدت زمان لازم برای پردازش هر واحد از هر فرآورده روی دو ماشین (بر حسب ساعت) در جدول زیر داده شده است .

زمان (ساعت) برای هر واحد				
ماشین	فرآورده ۱	فرآورده ۲	فرآورده ۳	فرآورده ۴
۱	۲	۳	۴	۲
۲	۳	۲	۱	۲

هزینه کل تولید یک واحد از فرآورده مستقیماً با زمان مورد استفاده از ماشین متناسب می‌باشد . فرض کنید هزینه هر ساعت استفاده از ماشینهای ۱ و ۲ به ترتیب برابر ۱۰ تومان و ۱۵ تومان می‌باشد . کل زمان در نظر گرفته شده برای تمام فرآورده‌های روی ماشینها ۱ و ۲ برابر ۵۰۰ ساعت می‌باشد . اگر بهای فروش هر واحد از فرآورده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به ترتیب برابر ۶۵ ، ۷۰ ، ۴۵ ، ۴۵ تومان باشد ، برای بیشینه ساختن سود خالص کل ، مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمایید .

پاسخ :

متغیرهای تصمیمی

میزان تولید محصول i توسط ماشین j :

$$x_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2$$

تابع هدف :

$$Max Z = 65(x_{11} + x_{12}) + 70(x_{21} + x_{22}) + 55(x_{31} + x_{32}) + 45(x_{41} + x_{42})$$

$$- 10(2x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31} + 2x_{41}) - 15(3x_{12} + 2x_{22} + x_{32} + 4x_{42})$$

محدودیت‌ها :

$$x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31} + 2x_{41} \leq 500 \quad : \text{محدودیت زمان ماشین ۱}$$

$$3x_{12} + 2x_{22} + x_{32} + 4x_{42} \leq 300 \quad : \text{محدودیت زمان ماشین ۲}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2$$

۱۹- فرض کنید تعداد «حداقل» اتوبوس مورد نیاز در ساعت i ام روز برابر b_i ($i = 1, 2, \dots, 24$) باشد . هر اتوبوس ۶ ساعت متولی کار می‌کند . اگر تعداد اتوبوسها در هر ساعت i ام از حداقل مورد

نیاز، b_i ، بیشتر شود ، اضافه هزینه‌ای برابر C_i برای هر ساعت کار هر اتوبوس اضافی در نظر گرفته می‌شود . مساله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید تا بتواند هزینه اضافی کل را حداقل سازد .

پاسخ :

مانند مساله ۹ متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :
تعداد اتوبوس‌هایی که در ساعت i ام شروع بکار می‌کنند : x_i
 $i=1,2,\dots,24$

چون هر اتوبوس ۶ ساعت متوالی کار می‌کند . پس در ساعت Δ ام تعداد اتوبوس‌هایی که مشغول بکارند عبارتست از :

$$x_{i-\Delta} + x_{i-\tau} + x_{i-\mu} + x_{i-\nu} + x_{i-1} + x_i$$

در ساعت Δ ام ، b_i اتوبوس لازم است . لذا در این ساعت تعداد اتوبوس‌های اضافی عبارتست از :

$$x_{i-\Delta} + x_{i-\tau} + x_{i-\mu} + x_{i-\nu} + x_{i-1} + x_i - b_i = \sum_{k=i-\Delta}^i x_k - b_i$$

در نتیجه هدف عبارتست از :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{24} c_i \left(\sum_{k=i-\Delta}^i x_k - b_i \right)$$

توجه می‌کنیم که در تابع هدف فرض کردہ‌ایم :

$$x_0 = x_{\tau\tau} , x_{-1} = x_{\mu\mu} , x_{-\mu} = x_{\nu\nu} , x_{-\nu} = x_{\Delta\Delta} , x_{-\Delta} = x_{\tau\tau}$$

با مفروضات بالا ، محدودیت‌های مساله نیز به صورت زیر خواهد بود :

$$\sum_{k=i-\Delta}^i x_k \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, 24$$

$$x_i \geq 0$$

۲۰- مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی را برای مساله ۲-۳-۲ بنویسید .

پاسخ :

با توجه به مساله ۲-۳-۲ ، مدل عمومی مساله مورد نظر در پایین صفحه ۲۹ آمده است .

۲۱- مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی را برای مساله ۵-۳-۲ بنویسید.

پاسخ :

مدل عمومی مساله مورد نظر در صفحه ۳۷ نوشته شده است.

۲۲- وجه تسمیه برنامه‌ریزی خطی را توضیح دهید و آن را بنویسید.

پاسخ :

در برنامه‌ریزی خطی تابع هدف و محدودیت‌ها بصورت خطی می‌باشند. این امر وجه تسمیه برنامه‌ریزی خطی است.

نمونه سوالات پایان ترم فصل دوم

سوالات تستی

۱- اجزای مدل برنامه‌ریزی خطی عبارتند از : (نیمسال اول ۸۳-۸۳)

- الف) متغیرهای تصمیم و محدودیتهای مدل
- ب) تابع هدف و محدودیتهای مدل
- ج) متغیرهای اساسی، تابع هدف و پارامترها
- د) متغیرهای تصمیم، تابع هدف و محدودیتها

پاسخ :

گزینه ۵

۲- در صورتیکه حداکثر اختلاف تولید در محصول ۶ واحد باشد، محدودیت متناظر آن کدام است؟

(نیمسال اول ۸۴-۸۵)

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 = 6$$

$$x_1 - x_2 \geq 6$$

$$-6 \leq x_1 - x_2 \leq 6$$

پاسخ :

گزینه ج

چون اختلاف تولید حداکثر ۶ واحد است پس دایم :

$$|x_1 - x_2| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq x_1 - x_2 \leq 6$$

۳- با توجه به وجود دو محصول در یک برنامه تولید، اگر زمان تولید محصول اول حداکثر دو برابر زمان تولید محصول دوم و تقاضای محصول دوم سه برابر تقاضا برای محصول اول باشد، کدام گزینه به عنوان محدودیتهای مدل مسئله قابل قبول است؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

$$x_1 + 2x_2 = 0, \quad 3x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0, \quad 3x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 0, \quad 3x_1 + x_2 = 0$$

پاسخ :

گزینه الف

محدودیتهای مدل به صورت زیر هستند:

$$x_1 - 2x_2 \leq 0: \text{ محدودیت زمان}$$

$3x_1 = x_2$: محدودیت تقاضا

یا

$$x_1 - 3x_2 \leq 0, \quad 3x_1 - x_2 = 0$$

۴- در یک مسأله تولید نسبت فروش محصول x_1 به حاصل جمع فروش دو محصول x_2 و x_3 حداقل برابر ۰ است. کدام گزینه بیانگر این محدودیت در مدل است؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

ب) $x_1 - 0/5x_2 - 0/5x_3 \geq 0$

الف) $0/5x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$

ج) $0/5x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$

د) $x_1 + 0/5x_2 + 0/5x_3 \geq 0$

پاسخ :

گزینه ب

با توجه به توضیحات مسأله داریم:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} \geq 0/5 \Rightarrow x_1 \geq 0/5x_2 + 0/5x_3$$

یا

$$x_1 - 0/5x_2 - 0/5x_3 \geq 0$$

مسئلات تشریه

۱- یک شرکت تجاری می‌خواهد یک برنامه تبلیغاتی را از طریق ۳ وسیله تلویزیون، بیل بورد و روزنامه به اجرا درآورد. هدف از این برنامه آگاهی حداکثر مشتریان بالقوه شرکت از محتوای تبلیغات می‌باشد. اطلاعات زیر از بخش بازاریابی و تبلیغات ارسال شده است. مسأله را به صورت یک مدل LP فرموله کنید.(نیمسال اول ۸۴-۸۳)

شرح	تلویزیون	بیل بورد	روزنامه
هزینه هر بار تبلیغ(تومان)	۷۵۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰
تعداد مشتریان بالقوه که از تبلیغ آگاهی پیدا می‌کنند	۱۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰

حداکثر بودجه تبلیغات ۱۰۰۰۰۰۰ تومان است. شرکت می‌خواهد:

الف) حداقل ۳۰۰۰۰۰ نفر در معرض تبلیغات قرار گیرند.

ب) حداکثر بودجه در تلویزیون ۵۰۰۰۰۰ تومان است.

ج) حداقل ۴ بار تبلیغ در بیل بورد و ۲ بار در تلویزیون انجام گیرد.

د) تعداد تبلیغات در تلویزیون و روزنامه بین ۵ تا ۱۰ بار باشد.

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعداد دفعاتی که آگاهی از طریق تلویزیون پخش می‌شود : x_1

تعداد دفعاتی که آگاهی از طریق بیل بورد پخش می‌شود : x_2

تعداد دفعاتی که آگاهی از طریق روزنامه پخش می‌شود : x_3

با توجه به اطلاعات مسأله،تابع هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$Max z = 1000000x_1 + 100000x_2 + 200000x_3$$

و محدودیتهای مدل نیز عبارتند از:

$$750000x_1 + 200000x_2 + 100000x_3 \leq 10000000: \text{محدودیت بودجه}$$

$$1000000x_1 + 100000x_2 + 200000x_3 \geq 3000000: \text{محدودیت الف}$$

$$750000x_1 \leq 5000000: \text{محدودیت ب}$$

$$x_1 \geq 4, x_1 \geq 2: \text{محدودیت ج}$$

$x_1 + x_2 \leq 10$ یا $x_1 + x_2 \leq 5$: محدودیت ۵

$x_1 + x_2 \geq 5$: محدودیت نامنفی بودن

۲- یک داروخانه شبانه‌روزی به منظور ارائه خدمات در هر روز به تعدادی فروشنده به صورت زیر نیازمند است.

هر فروشنده هشت ساعت متواالی کار می‌کند. هدف مدیر این داروخانه تعیین کمترین تعداد فروشنده مورد نیاز است که احتیاجات زیر را برآورده کند. مدیر این داروخانه را یاری کنید (مدل LP آن را بنویسید). (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

اوقات روز	حداقل تعداد فروشنده مورد نیاز
۶-۲	۶
۱۰-۱۴	۸
۱۴-۱۸	۱۴
۱۸-۲۲	۱۶
۲۲-۲	۲۵

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعداد فروشنده که در شیفت ۶-۲ شروع به کار می‌کنند: x_1

تعداد فروشنده که در شیفت ۱۰-۶ شروع به کار می‌کنند: x_2

تعداد فروشنده که در شیفت ۱۴-۱۰ شروع به کار می‌کنند: x_3

تعداد فروشنده که در شیفت ۱۸-۱۴ شروع به کار می‌کنند: x_4

تعداد فروشنده که در شیفت ۲۲-۱۸ شروع به کار می‌کنند: x_5

تعداد فروشنده که در شیفت ۲-۲۲ شروع به کار می‌کنند: x_6

با توجه به اینکه هر فروشنده ۸ ساعت متواالی کار می‌کند، بنابراین هر فروشنده دو شیفت متواالی کار می‌کند. لذا در هر شیفت دو نوع فروشنده وجود دارد. نوع اول فروشنده‌ای که در همان شیفت شروع به کار کرده است و نوع دوم فروشنده‌ای که از شیفت قبل شروع به کار کرده است.

در نتیجه تابع هدف و محدودیتهای مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$2-6: x_1 + x_6 \geq 6$$

$$6-10: x_1 + x_5 \geq 8$$

$$10-14: x_2 + x_3 \geq 14$$

$$14-18: x_3 + x_4 \geq 16$$

$$18-22: x_4 + x_5 \geq 25$$

$$22-2: x_5 + x_6 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

فصل سوم : برنامه‌ریزی خطی (روش هندسی)

نام برنامه‌ریزی خطی برگرفته از این واقعیت است که کلیه روابط ریاضی بکار گرفته در مدل ریاضی خطی هستند و کلیه فنون حل مشتمل بر مراحلی هستند که به برنامه معروفند. به طور خلاصه ، برنامه‌ریزی خطی نوعاً به مسائل تخصیص منابع محدود بین فعالیتها رقیب در جهت یافتن بهترین راه حل ممکن (بهینه) مربوط می‌شود.

یک مدل ریاضی در صورتی خطی است که دارای مفروضات زیر باشد :

۱. فرض تناسب : یعنی هر فعالیتی به تنها بی و مستقل از سایر فعالیتها عمل می‌کند .
به عبارت دیگر ، آهنگ تغییر یا شیب رابطه تابعی ، ثابت است . بنابراین چنانچه متغیر تصمیم برابر مقداری تغییر کند ، مقدار تابع هدف نیز دقیقاً به همان نسبت تغییر می‌کند .
۲. فرض جمع‌پذیری : این فرض بیانگر این واقعیت است که باید روابط ریاضی بین متغیرها در مدل (چه در تابع هدف و چه در محدودیتها) به صورت جمع جبری بیان گردد . بنابراین در مدل برنامه‌ریزی خطی ، هیچ گاه حاصل ضرب دو متغیر دیده نمی‌شود .
۳. فرض بخش‌پذیری : این خصوصیت برنامه‌ریزی خطی به واقعیت غیر عدد صحیح بودن متغیرهای تصمیم (x_r) در مدل توجه دارد . در مدل برنامه‌ریزی خطی متغیرهای تصمیم هر مقدار دلخواهی (چه عدد صحیح - چه غیر عدد صحیح) می‌تواند در جواب نهایی مساله داشته باشد .

۴. معین (قطعی) بودن : کلیه پارامترهای (b_i, a_{ij}, c) مدل عمومی LP در افق برنامه‌ریزی خطی مقادیر ثابتی هستند. اگر چه تعیین پارامترهای مدل در اکثر موقع به طور قطعی امکان‌پذیر است ولی در برخی موارد افقی برنامه‌ریزی آنقدر بلندمدت است که مقادیر پارامترها دستخوش تغییر می‌شوند. در چنین مواردی می‌توان از فن «تحلیل حساسیت» برای بررسی تاثیر تغییرات بر جواب بهینه مدل استفاده کرد.

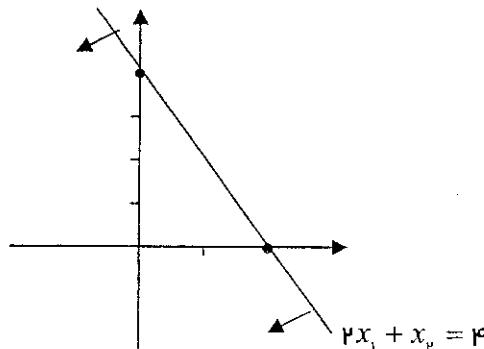
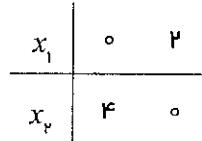
روش ترسیمی حل مساله برنامه‌ریزی خطی

گفته‌یم که در مدل برنامه‌ریزی خطی روابط از نوع خطی هستند. روابط خطی یکی از ساده‌ترین روابطی هستند که برای حل آنها می‌توان از شیوه ترسیمی استفاده کرد. روش ترسیمی در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تنها برای مدل‌هایی که حداقل دارای دو متغیر تصمیم باشند به کار می‌رود. برای حل این نوع مدل‌ها می‌توان از یک دستگاه مختصات استفاده کرد. برای حل این گونه مدل‌ها به شیوه زیر عمل می‌شود:

۱- هر محدودیت مدل را به عنوان یک رابطه در نظر می‌گیریم سپس آن را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به نوع معادله قسمتی از صفحه مختصات را که در محدودیت صدق می‌کند هاشور می‌زنیم. برای این کار می‌توان یک نقطه در روی صفحه اختیار کرد. اگر آن نقطه در محدودیت مورد نظر صدق کند، آنگاه نیم صفحه‌ای که شامل آن نقطه است منطقه مورد نظر برای محدودیت مربوطه است. در غیر اینصورت ناحیه مقابل را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال محدودیت $4 \leq x_1 + 2x_2$ را در نظر می‌گیریم. برای بدست آوردن ناحیه مربوطه به این محدودیت ابتدا آن را به صورت یک معادله یعنی $4 = x_1 + 2x_2$ در نظر می‌گیریم. این معادله را به روش نقطه‌یابی در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

داریم :

$$2x_1 + x_2 = 14$$



حال یک نقطه به دلخواه روی صفحه انتخاب می‌کنیم. نقطه $(0, 0)$ را در نظر می‌گیریم. این نقطه در محدودیت $2x_1 + x_2 \leq 14$ صدق می‌کند. (زیرا $14 \leq 14$) بنابراین نیم‌صفحه‌ای که شامل $(0, 0)$ است ناحیه موجه مربوط به محدودیت موردنظر است. (این نیم‌صفحه با فلاش مشخص شده است).

- ۲- فصل مشترک مربوط به تمام محدودیتها منطقه موجه مدل می‌باشد.
- ۳- منطقه موجه به صورت یک چندضلعی خواهد بود. ساده‌ترین روش برای بدست آوردن جواب بهینه، آنست که مقادیر تابع هدف را در راس‌های چندضلعی حساب کنیم. با مقایسه مقادیر بدست آمده جواب بهینه حاصل می‌شود. (بیشترین مقدار برای مسائل از نوع Max و کمترین مقدار برای مسائل از نوع Min) روش دیگری نیز وجود دارد که تمرینهای آخر فصل را به آن شیوه حل کرده‌ایم.

تذکر : به روش ریاضی می توان ثابت کرد جواب بهینه مساله در یک نقطه راسی از راس های چندضلعی ناحیه جواب اتفاق می افتد . راسهای چندضلعی را گوشه های موجه نیز می نامند . خواص اساسی گوشه ای موجه عبارتند از :

۱. تعداد گوشه های موجه متناهی است . در واقع در مساله ای با n متغیر تصمیم و m

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \text{ محدودیت تعداد گوشه ای موجه حداکثر برابر است :}$$

۲. جواب بهینه قطعاً در یکی از گوشه های موجه بدست می آید .

۳. اگر گوشه ای از دو گوشه مجاور خود از نظر تابع هدف مقدار بهتری داشته باشد ، آن گوشه جواب بهینه است .

موارد خاص در برنامه ریزی خطی

۱. جواب بهینه چند گانه : اگر دو گوشه از نظر تابع هدف مقدار بهینه باشند ، آن گاه هر دو گوشه جواب بهینه می باشند . در این صورت مساله دارای جواب بهینه چند گانه است .

۲. فاقد ناحیه جواب : اگر نواحی مربوط به محدودیت ها دارای فصل مشترک تهی باشند ، آن گاه مساله فاقد ناحیه موجه خواهد بود . به عبارتی محدودیت ها ناسازگارند . در این حالت گوییم مساله نشدنی است .

۳. ناحیه جواب بیکران : ممکن است فصل مشترک نواحی مربوط به محدودیت ها کراندار نباشد . در این صورت ناحیه جواب بی کران خواهد بود . در چنین حالتی ممکن است جواب بهینه نداشته باشیم . (یعنی تابع هدف بتواند به طور بی کران افزایش یابد)

۴. جواب تبهگن : به طور معمول هر گوشه موجه با استفاده از دو معادله بدست می آید . به عبارتی هر گوشه از دو معادله تشکیل می شود . اگر گوشه ای موجه با استفاده از بیش از دو معادله تشکیل شود آن گوشه را تبهگن خواهیم نامید .

مسائل فصل سوم

مسئلهای تکمیلی و چهارگزینه‌ای (صفحه ۸۸ کتاب درسی)

- ۱- نقطه بهینه همواره در ناحیه موجه قرار دارد.

پاسخ :

مرز

- ۲- نقطه بهینه علاوه بر قرار گرفتن بر روی مرز ناحیه موجه، همواره بر روی یک از مرز قرار دارد.

پاسخ :

گوشه

- ۳- گوشه، نقطه‌ای است که در تقاطع دو خط از خطوط موازی قرار گیرد.

پاسخ :

- حداکل (در صورتی که بیش از دو خط در گوشه تقاطع داشته باشند، بنا به تعریف گوشه مربوطه را تبھگن می‌نامیم).

- ۴- گوشه تبھگن گوشه‌ای است که از معادله مرزی تشکیل شده باشند.

پاسخ :

بیش از دو

- ۵- مجموعه جوابهای موجه را ناحیه گویند.

پاسخ :

شدنی یا موجه

- ۶- اگر یک گوشه موجه نسبت به تمام گوشه‌های مجاور خود بهتر (از نظر تابع هدف) باشد، آن گوشه :

الف) بهینه است.

ب) غیر بهینه است.

- ج) حداقل یکی از محدودیتها را نقض می‌کند.

د) اطلاعات برای اظهارنظر کافی نیست.

پاسخ :

گزینه الف (این یکی از خواص اساسی گوشه موجه است)

۷- در مدل Max ، گوشه بهینه :

الف) نزدیکترین نقطه حدی به مبدأ مختصات است.

ب) دورترین نقطه حدی به مبدأ مختصات است.

ج) غیرموجه است.

د) در حداقل یک محدودیت مدل صدق می کند.

پاسخ :

گزینه ب

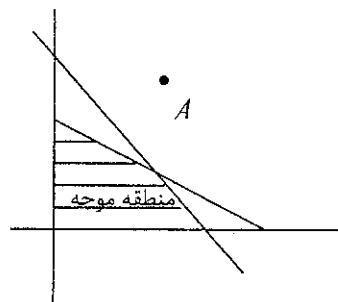
۸- شکل زیر بیانگر ناحیه موجه یک مدل برنامه ریزی خطی است. نقطه A در این مدل، چه نقطه‌ای است؟

د) غیر موجه

ج) مرزی

ب) موجه

الف) بهینه



پاسخ :

گزینه د (نقطه A خارج از ناحیه موجه قرار دارد، لذا یک نقطه غیرموجه است).

۹- کدامیک از مفروضات زیر از ورود حالات احتمالی در مسائل برنامه ریزی خطی جلوگیری می کند؟

د) معین بودن

ب) جمع پذیری

ج) بخش پذیری

الف) تناسب

پاسخ :

گزینه د

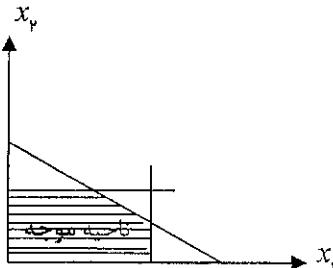
۱۰- نمایش ترسیمی یک مساله LP به صورت زیر داده شده است . تعداد گوشتهای این مدل برابر است با :

۱۲۵

ج) ۱۰

ب) ۶

الف) ۴



پاسخ :

گزینه ج - با توجه به نمودار داده شده تعداد متغیرها $n=2$ ، می‌باشد و تعداد محدودیتها برای تعداد خطوط رسم شده $m=3$ می‌باشد . حال با توجه به رابطه زیر تعداد گوشتهای عبارتند از :

$$\text{تعداد گوشه} = \frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(3+2)!}{2!1!} = 10$$

با توجه به نمودار روشن است که از این تعداد گوشه فقط ۵ گوشه موجه می‌باشد .

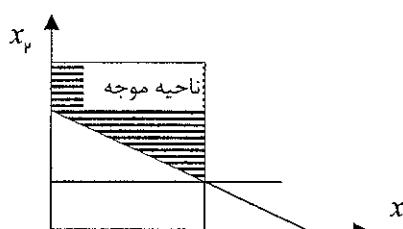
۱۱- در برنامه‌ریزی خطی کدام گزینه در خصوص جواب بهینه درست است ؟

- الف) همواره یک گوشه است.
- ب) همواره بهینه است.
- ج) در تمام محدودیتها صدق می‌کند.
- د) حداقل در یکی از محدودیتها صدق می‌کند.

پاسخ :

گزینه ج - می‌دانیم جواب موجه شامل ناحیه‌ای است که از فصل مشترک نواحی مربوط به تمام محدودیتها حاصل می‌شود . لذا در تمام محدودیتها صدق می‌کند .

۱۲- منطقه موجه یک مساله LP به صورت زیر است . این مساله دارای چند محدودیت بزرگتر یا مساوی (\geq) است ؟



۴) د

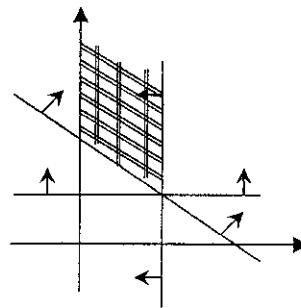
ج) ۳

ب) ۲

الف) ۱

پاسخ :

گزینه ب - محدودیتهایی که شامل مبدا مختصات می‌شود (پیکان به سمت مبدا)، محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) هستند و محدودیتهایی که شامل مبدا مختصات نمی‌شود (جهت پیکان خلاف مبدا) محدودیت بزرگتر یا مساوی هستند.



بنابراین مساله دو محدودیت بزرگتر مساوی و یک محدودیت کوچکتر مساوی دارد.

۱۳- مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 20x_2$$

s.t :

$$\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ب) یک نقطه در داخل منطقه موجه است.

د) یک نقطه در خارج از منطقه موجه است.

الف) یک گوشه موجه است.

ج) یک گوشه غیرموجه است.

پاسخ :

گزینه ب- نقطه $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ را در محدودیتهای داده شده جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}(2) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 < 6 : \text{محدودیت اول}$$

$$2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 < 10 : \text{محدودیت دوم}$$

نقطه داده شده در هردو محدودیت صدق می‌کند لذا یک نقطه شدنی است. از طرفی رابطه تساوی در هیچ‌کدام برقرار نیست ($x_1 \neq 10$, $x_2 \neq 3$). لذا نقطه داده شده نقطه مرزی نیست. پس $\frac{1}{x_1} = 2$, $x_2 = 2$ یک نقطه شدنی در داخل منطقه موجه است.

۱۴- فرض بخش‌پذیری در برنامه‌ریزی خطی عبارت است از :

الف) استقلال متغیرها از هم‌دیگر

ب) وجود جمع جبری بین متغیرها

ج) معین بودن فضای تصمیم‌گیری

د) اتخاذ هر مقدار صحیح و غیرصحیح بوسیله هر یک از متغیرهای تصمیم

پاسخ :

گزینه د

۱۵- رابطه $10 \leq x_1 + x_2 + x_3 \cdot x_4$ در یک مدل وجود دارد. کدامیک از فروض برنامه‌ریزی خطی در این رابطه رعایت نشده است؟

- الف) تناسب ب) جمع‌پذیری ج) معین بودن د) الف و ب

پاسخ :

گزینه ب - در رابطه داده شده متغیرهای x_1, x_2, x_3 به هم ضرب شده‌اند. این خاصیت جمع‌پذیری را نقض می‌کند.

۱۶- اگر در یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی سه فرض، تناسب، جمع‌پذیری و معین بودن صادق باشد و فقط فرض بخش‌پذیری برقرار نباشد. مدل بدست آمده چگونه مدلی است؟

- الف) خطی ب) عدد صحیح ج) غیرخطی د) احتمالی

پاسخ :

گزینه ب

۱۷- یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند:

- ب) دارای بی‌نهایت جواب گوشه بهینه باشد. الف) دارای بی‌نهایت گوشه باشد.
د) دارای بی‌نهایت جواب موجه باشد. ج) دارای بی‌نهایت گوشه غیرموجه باشد.

پاسخ :

گزینه ۵- می دانیم تعداد گوشه در یک مدل متناهی است. اما منطقه موجه می تواند بی کران باشد.

۱۸- اگر یک مدل برنامه ریزی خطی دارای یک محدودیت که یک محدودیت \geq باشد، این مدل می تواند:

- ب) دارای جواب بهینه گوشه ای باشد.
- الف) بدون ناحیه موجه باشد.
- ج) ناحیه موجه بیکران داشته باشد.

پاسخ :

گزینه ۵

۱۹- در مساله برنامه ریزی خطی زیر تابع هدف با محدودیت اول موازی است. با توجه به حل ترسیمی این مساله چه حالت خاصی دارد؟

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

s.t :

$$2x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ب) تبهگن و بهینه چندگانه

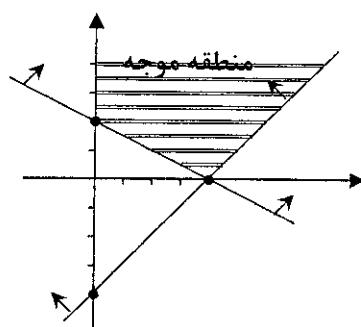
الف) بهینه چندگانه

د) ناحیه جواب بیکران

ج) تبهگن در گوشه بهینه

پاسخ :

گزینه ۵- ناحیه شدنی به صورت زیر است:



روشن است مساله حالت خاص ناحیه بیکران را دارد.

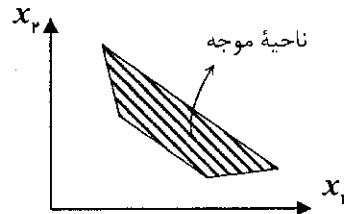
-۲۰- ناحیه موجه یک مدل LP به صورت زیر است ، این مساله دارای :

الف) چهار محدودیت به صورت کوچکتر مساوی (\leq) است.

ب) چهار محدودیت به صورت بزرگتر مساوی (\geq) است.

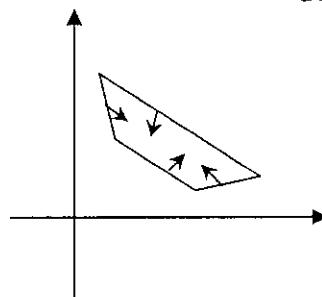
ج) سه محدودیت به صورت (\geq) و یک محدودیت (\leq) است.

د) سه محدودیت به صورت (\geq) و یک محدودیت = است.



پاسخ :

گزینه ج - با توجه به توضیحات تمرین ۱۲ ، مساله دارای یک محدودیت کوچکتر مساوی و سه محدودیت بزرگتر مساوی است.



تمرینات (صفحه ۹۱ کتاب درسی)

۱- جواب بهینه مدل زیر را به روش ترسیمی بدست آورید؟

$$\text{Min } Z = ۳x_1 + ۵x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 = 100$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

❷ پاسخ :

با توجه به محدودیتهای داده شده، خطوط زیر را در نظر گرفته با استفاده از نقطه‌یابی

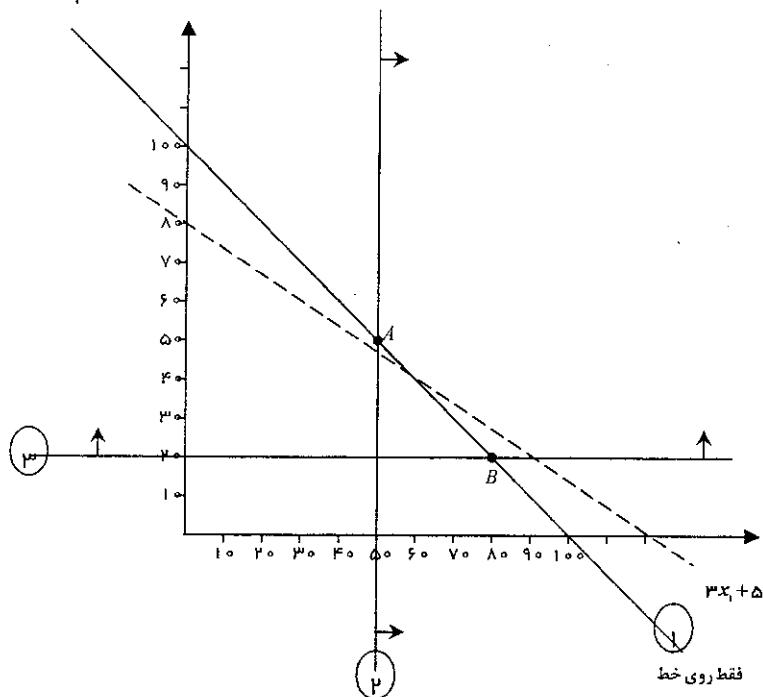
رسم می‌کنیم.

$$1) : x_1 + x_2 = 100$$

x_1	0	100
x_2	100	0

$$2) : x_1 = 50$$

$$3) : x_2 = 20$$



برای اینکه تشخیص دهیم کدام قسمت از خط رسم شده جزء ناحیه موجه می‌باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم . یک نقطه به طور دلخواه اختیار می‌کنیم به طوری که نقطه روی خط نباشد . ما معمولاً نقطه $(5,5)$ را اختیار می‌کنیم . محدودیت دوم را در نظر می‌گیریم و نقطه $(5,5)$ را در آن محدودیت قرار می‌دهیم . در این صورت نامساوی زیر را بدست می‌آوریم :

$$0 \geq 50$$

این نامساوی درست نمی‌باشد . لذا ناحیه‌ای که توسط محدودیت دوم مشخص می‌شود نیم‌صفحه‌ای است که $(5,5)$ در آن قرار ندارد . (همان ناحیه‌ای که با فلش روی خطی $2x_1 + 5x_2 = 50$ نشان داده شده است .)

حال محدودیت سوم را در نظر گرفته و نقطه $(5,5)$ را در آن قرار می‌دهیم . در این صورت نامساوی زیر را بدست می‌آوریم :

$$0 \geq 20$$

این نامساوی نیز نادرست می‌باشد . لذا ناحیه‌ای که توسط محدودیت سوم مشخص می‌شود نیم‌صفحه‌ای است که $(5,5)$ در آن قرار ندارد . (همان ناحیه‌ای که با فلش روی خط $3x_1 + 2x_2 = 20$ نشان داده شده است .) بالاخره محدودیت اول را در نظر می‌گیریم . این محدودیت به صورت تساوی است . لذا ناحیه‌ای که توسط محدودیت اول مشخص می‌شود فقط نقاط روی خط $x_1 + x_2 = 100$ می‌باشد . درنتیجه ناحیه موجه که از فصل مشترک نواحی تعیین شده از محدودیت‌های ۱ و ۲ و ۳ مشخص می‌شود همان خطی است که به صورت پررنگ روی شکل نمایش داده شده است .

حال خط مربوط به تابع هدف را رسم می‌کنیم . برای این منظور بجای Z به طور دلخواه عددی تخصیص می‌دهیم . ما قرار داده‌ایم $Z=360$ لذا خط $3x_1 + 5x_2 = 360$ را روی نمودار رسم کردی‌ایم . با توجه به اینکه مساله از نوع مینیمم‌سازی است . لذا تا جایی که می‌توانیم (از منطقه موجه خارج نمی‌شویم) خط مربوط به تابع هدف را به موازات خود پایین می‌آوریم . آخرین نقطه ممکن از ناحیه موجه که توسط این خط قطع می‌شود ، نقطه بهینه است . با توجه به شکل روشن است خط تابع هدف آخرین نقطه ممکن از منطقه موجه را که می‌تواند قطع کند نقطه B است . پس این نقطه جواب بهینه مساله است . حال کافیست مختصات این نقطه را بدست آوریم . توجه می‌کنیم نقطه B از تلاقی خطوط ۱ و ۳ حاصل شده است .

بنابراین دستگاه مختصات زیر را حل می کنیم :

$$\begin{cases} 1 \\ ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ x_2 = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow x_1 = ۸۰, x_2 = ۲۰$$

با جایگذاری این مقادیر درتابع هدف بدست می آوریم :

$$Z = ۳(۸۰) + ۵(۲۰) = ۳۴۰$$

پس جواب بهینه عبارتست از

$$x_1^* = ۸۰, x_2^* = ۲۰, Z^* = ۳۴۰$$

۲- جواب بهینه مساله زیر را به روش ترسیمی بدست آورید ؟

$$\text{Max } Z = ۳x_1 + ۵x_2$$

s.t:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq ۴$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

مانند تمرین قبل خطوط زیر را با توجه به محدودیت‌ها در نظر گرفته با استفاده از

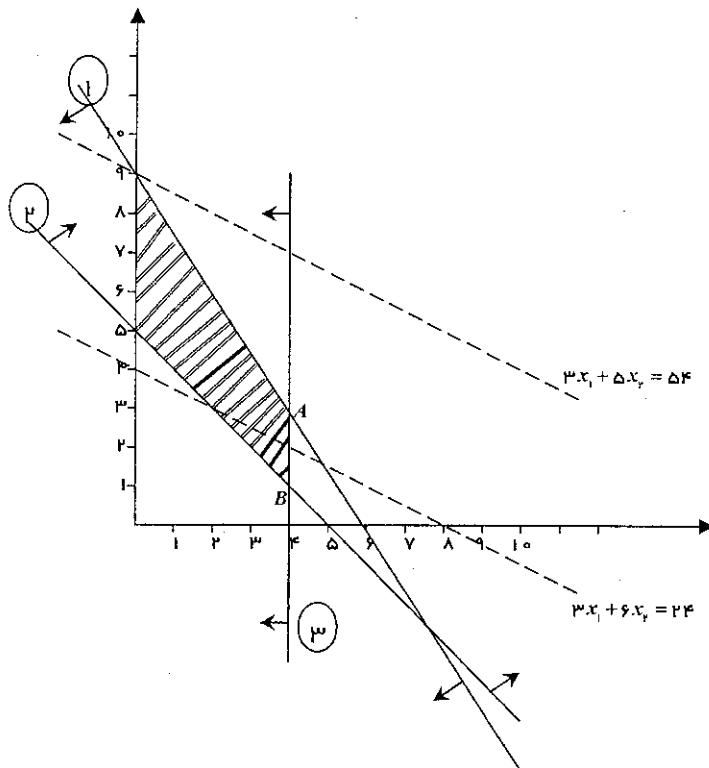
نقشه یابی رسم می کنیم :

$$1) 3x_1 + 2x_2 = 18 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 6 \\ \hline x_2 & 9 & 0 \end{array}$$

$$2) x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 5 \\ \hline x_2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$3) x_1 = 4$$

برای بدست آوردن ناحیه‌ای که توسط هر کدام از محدودیت‌ها تعیین می‌شود، مانند تمرین قبل عمل می‌کنیم.



به عنوان نمونه تعیین ناحیه محدودیت اول را توضیح می‌دهیم. مانند تمرین قبل نقطه (۵,۰) را در نظر گرفته در محدودیت اول قرار می‌دهیم. در این صورت نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 24$$

چون این نامساوی درست است. پس ناحیه‌ای که توسط محدودیت اول تعیین می‌شود نیم‌صفحه‌ای است که (۵,۰) در آن قرار دارد. (همان ناحیه‌ای که با فلش روی خط ۱ نشان داده شده است). به همین ترتیب نواحی مربوط به سایر محدودیت‌ها تعیین می‌کنیم. فصل مشترک تمام نواحی، منطقه موجه است که با هاشور روی نمودار نشان داده شده است. حال خط مربوط به تابع هدف را رسم می‌کنیم. برای این منظور مقداری دلخواه به نسبت می‌دهیم. فرض کنیم $Z = 3x_1 + 6x_2 = 24$. خط $3x_1 + 6x_2 = 24$ با نقطه‌چین روی نمودار

مشخص شده است . چون مساله از نوع ماکریم سازی است این خط را به موازات خود تا جایی که امکان دارد به طرف بالا حرکت می دهیم . آخرین نقطه از منطقه موجه که توسط این خط قطع می شود نقطه بهینه است . با توجه به شکل مشخص است که نقطه بهینه ، نقطه (۵,۹) می باشد . با جایگذاری این مقدار درتابع هدف بدست می آوریم :

$$Z = ۳(x_1) + ۶(x_2) = ۵۴$$

لذا جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1^* = ۰ , \quad x_2^* = ۹ , \quad Z^* = ۵۴$$

۳- مساله زیر را با استفاده از روش ترسیمی حل کرده و جواب بهینه آن را تعیین کنید؟

$$\text{Max } Z = 1/5x_1 + x_2$$

s.t :

$$x_1 \leq ۴$$

$$x_2 \leq ۶$$

$$x_1 + x_2 \leq ۵$$

$$x_1, x_2 \geq ۰$$

پاسخ :

مانند تمرینات قبل داریم :

$$1) \quad x_1 = ۴$$

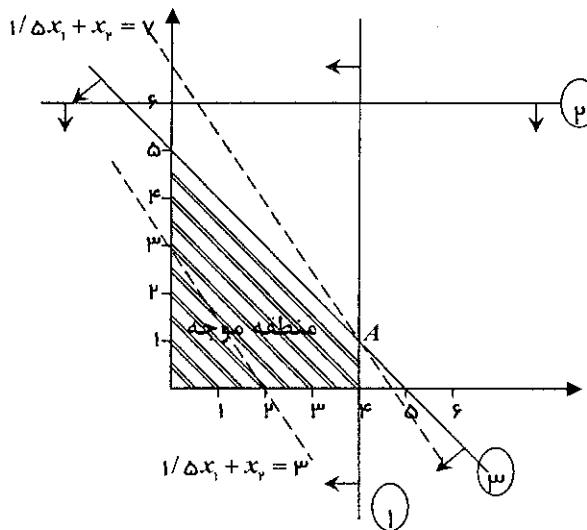
$$2) \quad x_2 = ۶$$

$$3) \quad x_1 + x_2 = ۵ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & ۰ & ۵ \\ \hline x_2 & ۵ & ۰ \end{array}$$

برای رسم خط تابع هدف به طور دلخواه قرار می دهیم $Z = ۳$ ، حال خط $Z = ۳ = 1/5x_1 + x_2$ را رسم می کنیم . این خط روی نمودار با نقطه چین مشخص شده است . چون مساله از نوع ماکریم سازی است ، تا جایی که می توانیم این خط را به موازات خود به سمت بالا حرکت می دهیم . آخرین نقطه از منطقه موجه که توسط خط قطع می شود ، نقطه بهینه مساله است . با توجه به شکل مشخص است که نقطه بهینه ، نقطه A می باشد . حال کافیست مختصات این نقطه را بدست آوریم . این نقطه از تلاقی خطوط ۱ و ۳ حاصل شده است .

لذا دستگاه زیر را حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = F \\ x_1 + x_2 = \Delta \end{cases} \Rightarrow x_1 = F, x_2 = 1$$



با جایگذاری این نقطه درتابع هدف بدست می‌آوریم :

$$Z = 1/\Delta(F) + (1) = \gamma$$

بنابراین جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1^* = F, x_2^* = 1, Z^* = \gamma$$

۴- مساله زیر را به روش ترسیمی حل کنید ؟

$$\text{Max } Z = \Delta x_1 + x_2$$

s.t :

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1 + \mu x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

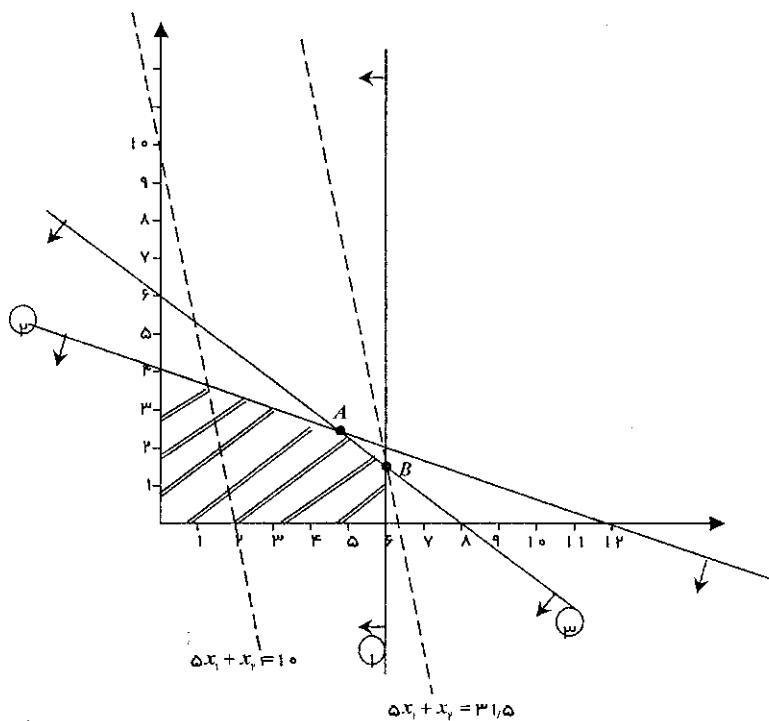
پاسخ:

داریم:

$$1) \quad x_1 = 4$$

$$2) \quad x_1 + 3x_2 = 12 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 12 \\ \hline x_2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$3) \quad 3x_1 + 4x_2 = 24 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 8 \\ \hline x_2 & 6 & 0 \end{array}$$



برای رسم خط مربوط بهتابع هدف به طور دلخواه قرار می دهیم $Z = 10$ ، سپس خط $5x_1 + x_2 = 10$ را رسم می کنیم . این خط با نقطه چین روی نمودار نشان داده شده است . حال تا جایی که می توانیم Z را افزایش می دهیم . آخرین نقطه ای که توسط خط نقطه چین قطع می شود نقطه B می باشد .

این نقطه، نقطه بهینه است. برای بدست آوردن مختصات این نقطه، چون B از تلاقی خطوط ۱ و ۳ حاصل شده است. لذا دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = 1/5$$

با جایگذاری این مقادیر درتابع هدف بدست می‌آوریم:

$$Z = 5(6) + 1/5 = 31/5$$

لذا جواب بهینه عبارتست از:

$$x_1^* = 6, x_2^* = 1/5, Z^* = 31/5$$

۵- مساله زیر را با استفاده از روش ترسیمی حل کرده و جواب بهینه آن را بدست آورید؟

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 6x_2$$

s.t :

$$4x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$-6x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

داریم :

$$1) 4x_1 + 2x_2 = 20 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 5 \\ \hline x_2 & 10 & 0 \end{array}$$

$$2) -6x_1 + 4x_2 = 12 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & -3 \\ \hline x_2 & 3 & 0 \end{array}$$

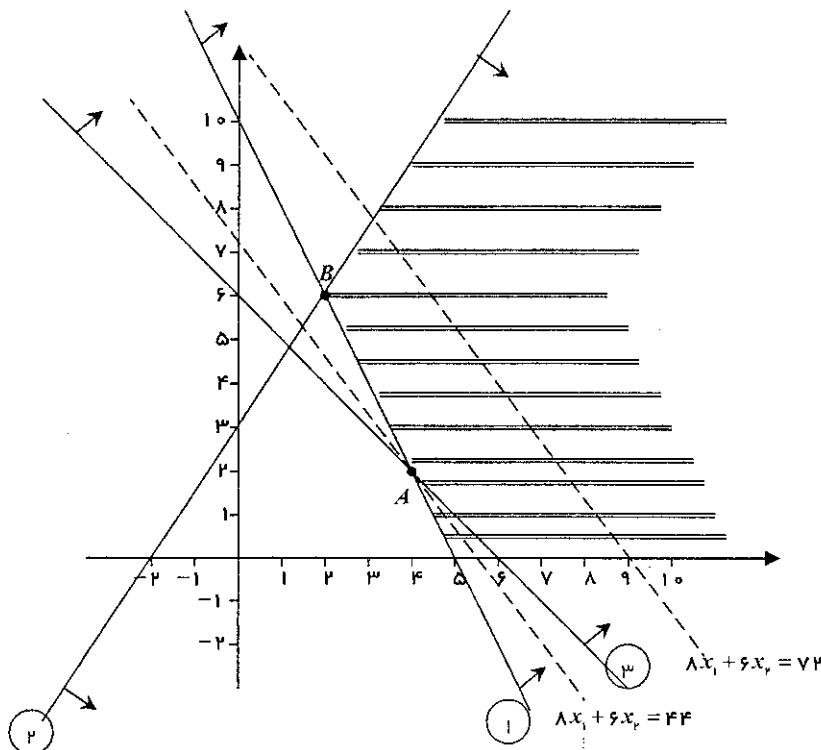
$$3) x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 6 \\ \hline x_2 & 6 & 0 \end{array}$$

نقطه A ، نقطه بهینه می باشد . این نقطه از تلاقی خطوط ۱ و ۳ حاصل شده است . لذا دستگاه زیر را حل می کنیم :

$$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$$

با جایگذاری این نقطه درتابع هدف بدست می آوریم :

$$Z = 4(4) + 2(2) = 16$$



لذا جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1^* = 4, x_2^* = 2, Z^* = 16$$

۶- مسائل زیر را به روش ترسیمی حل کنید و معین کنید هر یک از آنها از چه حالت خاصی برخوردارند؟

(ب)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

s.t :

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

s.t :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

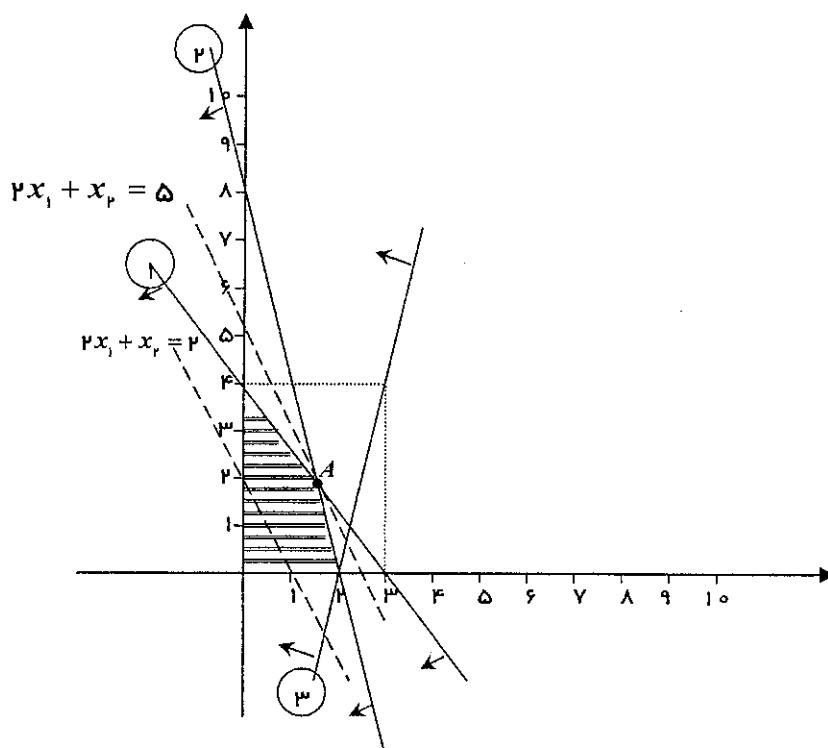
پاسخ :

(الف) داریم :

$$1) \quad 2x_1 + x_2 = 12 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 2 \\ \hline x_2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$2) \quad 2x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 2 \\ \hline x_2 & 8 & 0 \end{array}$$

$$3) \quad 2x_1 - x_2 = 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 2 & 3 \\ \hline x_2 & 0 & 4 \end{array}$$



روشن است نقطه A ، نقطه بهینه مساله است. این نقطه O از تلاقی خطوط ۱ و ۲ حاصل شده است.

بنابراین برای تعیین مختصات A ، دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1/5, x_2 = 6$$

با جایگذاری این مقادیر در تابع هدف خواهیم داشت:

$$Z = 2(1/5) + 6 = 5$$

بنابراین جواب بهینه عبارتست از:

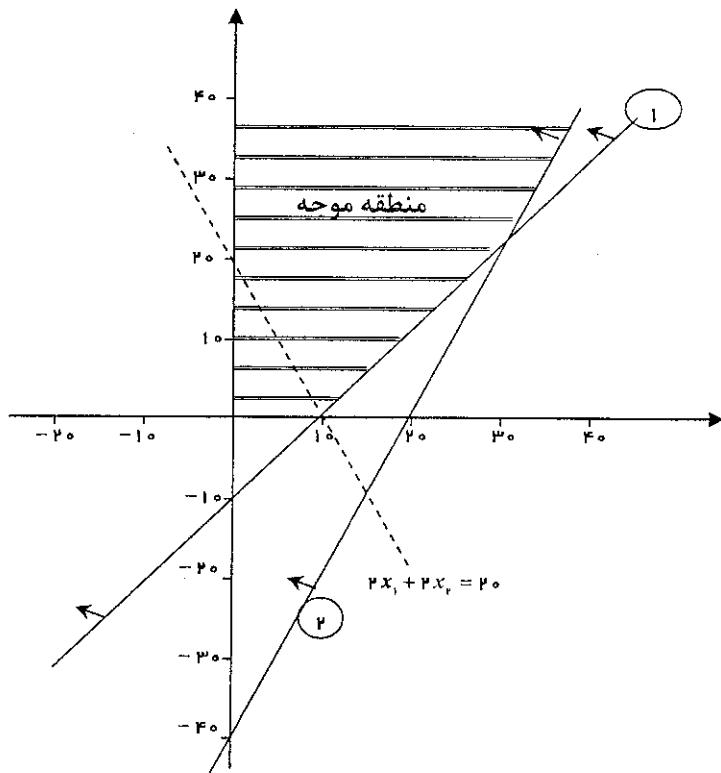
$$x_1^* = 1/5, x_2^* = 6, Z^* = 5$$

هیچ حالت خاصی وجود ندارد!

ب) داریم :

$$1) \quad x_1 - x_2 = 10 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 10 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & -10 \end{array}$$

$$2) \quad 2x_1 - x_2 = 20 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 20 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & -20 \end{array}$$



این مساله دارای جواب بیکران می باشد . زیرا مقدار Z را بطور دلخواه می توان افزایش داد.

۷- مسائل زیر را به روش ترسیمی حل کنید و تعیین کنید کدام صورت خاص از برنامه ریزی خطی هستند؟

(ب)

$$Max Z = ۳x_1 + ۴x_2$$

s.t :

$$۲x_1 + x_2 \leq ۲$$

$$۳x_1 + ۴x_2 \leq ۱۲$$

$$x_1, x_2 \geq ۰$$

$$Max Z = ۴x_1 + ۱۴x_2$$

s.t :

$$۴x_1 + ۷x_2 \leq ۲۱$$

$$۷x_1 + ۲x_2 \leq ۲۱$$

$$x_1, x_2 \geq ۰$$

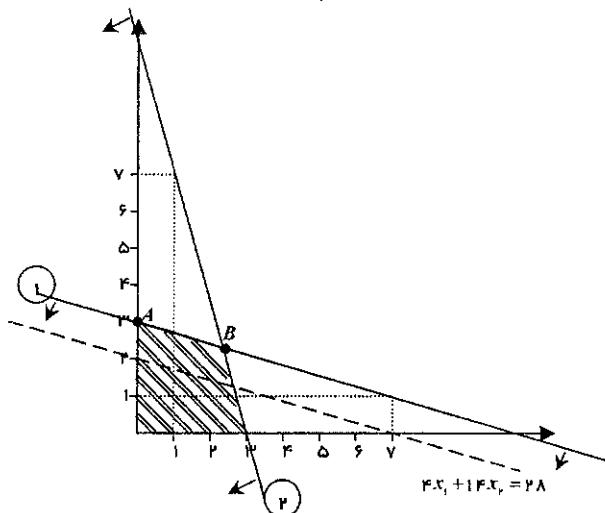
(الف)

پاسخ :

الف) داریم :

$$1) ۴x_1 + ۷x_2 = ۲۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & ۰ & ۷ \\ \hline x_2 & ۳ & ۱ \end{array}$$

$$2) ۷x_1 + ۴x_2 = ۲۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & ۳ & ۱ \\ \hline x_2 & ۰ & ۷ \end{array}$$

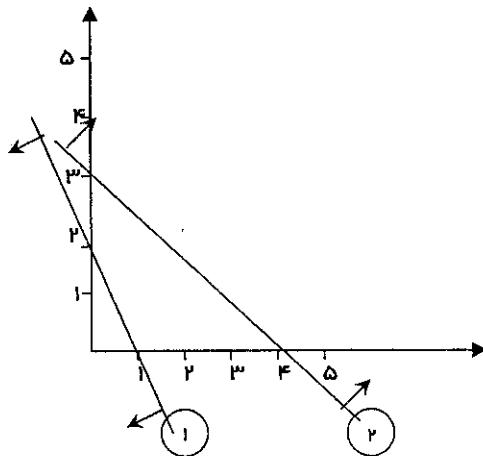


با توجه به اینکهتابع هدف با محدودیت اول موازی است و مساله از نوع ماکزیمم سازی است : از روی شکل واضح است که مقدار تابع هدف در نقاط A, B یکسان است . لذا مساله دارای جواب بهینه چندگانه است.

ب) دارایم :

$$1) \quad 2x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 1 \\ \hline x_2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$2) \quad 3x_1 + 4x_2 = 12 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 3 \\ \hline x_2 & 3 & 0 \end{array}$$



روشن است مساله بدون منطقه موجه است .

تذکر : با توجه به محدودیتهای نامنفی بودن $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$ ، منطقه موجه فقط در ربع اول می تواند باشد .

-۸- مساله زیر را به روش ترسیمی حل کنید . تفاوت اساسی آن با مدل‌های مطرح شده در متن فصل چیست ؟ (راهنمایی ، ناحیه موجه یک نقطه است !)

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 = 5$$

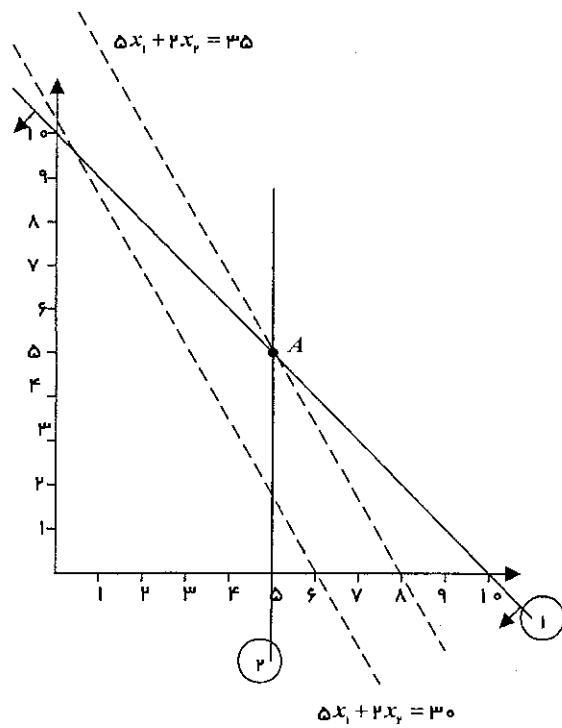
$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

داریم :

$$1) \quad x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 10 \\ \hline x_2 & 10 & 0 \end{array}$$

$$2) \quad x_1 = 5$$



با توجه به اینکه محدودیت دوم بصورت $x_1 = 5$ می باشد، مانند تمرین ۱، ناحیه موجه فقط خط پررنگ است که روی شکل نشان داده شده است. واضح است نقطه A ، نقطه بھینه می باشد. مختصات A از حل دستگاه زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 5$$

با جایگذاری مقادیر درتابع هدف بدست می آوریم:

$$Z = 5(5) + 2(5) = 35$$

لذا، جواب بھینه عبارتست از:

$$x_1^* = 5, x_2^* = 5, Z^* = 35$$

نمونه سؤالات پایان ترم فصل سوم

سؤالات نسخه

۱- کدام خصوصیت LP به واقعیت غیر صحیح بودن متغیرهای تصمیم در مدل اذعان دارد؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

- الف) فرض بخش پذیری ب) جمع پذیری ج) تناسب د) معین بودن

پاسخ:

گزینه الف

۲- تعداد گوششای نمایش ترسیمی یک مدل LP از کدام فرمول زیر تعییت می‌کند؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

$$\frac{(m+n)!}{(m+n+1)!} \quad \text{د)} \quad \frac{(m+n)!}{m!n!} \quad \text{ج)} \quad \frac{m!n!}{(m+n)!} \quad \text{ب)} \quad \frac{m(m+n)!}{m!n!} \quad \text{الف)}$$

پاسخ:

گزینه ج

۳- در یک مدل LP که به روش ترسیمی حل شده است و دارای تابع هدف از نوع Min است نزدیکترین گوشش حدی به مبدأ مختصات: (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

- الف) نمی‌توان اظهار نظر کرد.
ب) نقطه بهینه غیر موجه است.
ج) نقطه موجه غیر بهینه است.
د) نقطه بهینه است.

پاسخ:

گزینه د

۴- برای یافتن نقطه بهینه از بین نقاط ناحیه موجه در صورتی که تابع هدف مدل از نوع Max باشد، خط تابع هدف را باید: (نیمسال اول ۸۴-۸۵)

- الف) حذف کرد.
ب) از مبدأ مختصات دور کرد.
ج) به مبدأ مختصات نزدیک کرد.
د) حول مبدأ مختصات دوران داد.

پاسخ:

گزینه ب

- ۵- در حل ترسیمی یک مدل LP نقاط بهینه بر روی یک پاره خط قرار دارند. این مدل کدام حالت خاص را دارد؟ (نیمسال اول ۸۴-۸۵)
- الف) فقد نقطه بهینه ب) ناحیه موجه نامحدود ج) بهینه چندگانه د) تبهیگن موقت

پاسخ :

گزینه ج

مطلاعات تشریحی

- ۱- مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید:

$$\text{Min } z = \frac{1}{\mu} x_1 + x_2$$

s.t:

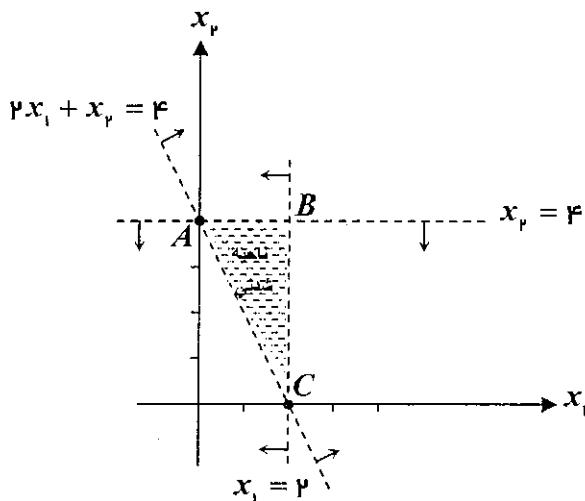
$$x_1 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 4$$

پاسخ :

ناحیه شدنی به صورت زیر است :



گوشه	مختصات	مقدارتابع هدف
A	(۰، ۴)	۴
B	(۲، ۴)	۵
C	(۲، ۰)	۱

چون تابع هدف از نوع Min است، لذا نقطه C بجهت می باشد.

- مسئله زیر را در نظر بگیرید. به روش ترسیمی جواب بجهت و مقدار z^* را به دست آورید.

$$\text{Min } z = 2x_1 + x_2$$

s.t:

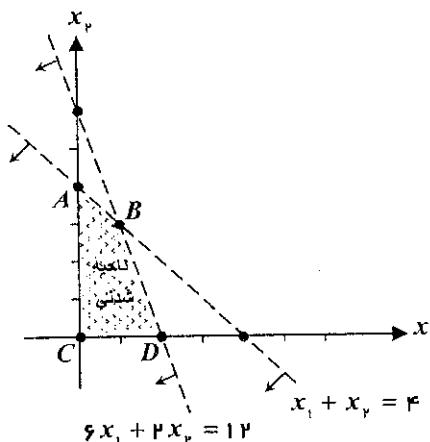
$$5x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ:

ناحیه شدنی به صورت زیر است:



مختصات نقاط A, C, D را بسادگی از روی نمودار می توان تشخیص داد.

برای به دست آوردن مختصات نقطه B دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \xrightarrow{-6x_2 \text{ معادله دوم}} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 12 \\ -6x_1 - 6x_2 = 24 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{معادله اول} \\ + \text{معادله دوم}}} \begin{aligned} -4x_2 &= -12 \\ \Rightarrow x_2 &= 3 \end{aligned}$$

با جایگذاری $x_2 = 3$ در معادله دوم دستگاه اصلی بدست می‌آوریم:

$$x_1 + 3 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$$

پس مختصات نقطه B عبارتست از: $(1, 3)$. در نتیجه

گوشه	مختصات	مقدار تابع هدف
A	$(0, 4)$	۴
B	$(1, 3)$	۵
C	$(0, 0)$	۰
D	$(2, 0)$	۴

چون تابع هدف از نوع Min می‌باشد، لذا نقطه بهینه C می‌باشد.

فصل چهارم : برنامه ریزی خطی (روش سیمپلکس)

روش سیمپلکس یک فن کلی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی است . در این روش ، ابتدا مدل وارد یک جدول می شود و سپس یک سری مراحل ریاضی بر روی جدول اجرا می گردد . مراحل ریاضی روش سیمپلکس به نحو اثربخشی بیانگر فرایند حرکت در روش ترسیمی می باشد که جهت حرکت را از یک گوشه به گوشه دیگر نشان می دهد . بر خلاف روش ترسیمی که باید تمام گوشه های موجه را برای پیدا کردن گوشه بهینه جستجو کنیم ، در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه به گوشه ای بهتر حرکت کرده تا اینکه بهترین گوشه پیدا شود و توقف می کنیم .

اولین قدم در حل یک مدل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس ، تبدیل مدل به فرم استاندارد است . فرم استاندارد مدل برنامه ریزی خطی عبارت است از یک مدل باتابع هدف از نوع Max و با محدودیتهایی به فرم مساوی ($=$) به جای کوچکتر مساوی یا بزرگتر مساوی است . رویه ای شناخته شده برای تبدیل محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) به محدودیت مساوی ($=$) وجود دارد . با اضافه کردن یک متغیر جدید به هر محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) می توان به یک معادله مساوی ($=$) دست یافت . متغیرهای اضافه شده به نامعادلات کوچکتر مساوی را متغیر کمبود می نامند و آنها را با نماد (S) نمایش می دهند . متغیری را که محدودیت \geq - ام به آن افزوده می شود با R نمایش می دهیم .

به طور مثال داریم:

$$\begin{aligned} a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \dots + a_{i_n}x_n &\leq b_i \\ \Rightarrow a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \dots + a_{i_n}x_n + S_i &= b_i \end{aligned}$$

محدودیتی که به فرم بزرگتر مساوی است نیز به صورت زیر به محدودیت مساوی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \dots + a_{i_n}x_n &\geq b_i \\ \Rightarrow a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \dots + a_{i_n}x_n - S_i &= b_i \end{aligned}$$

در این عبارت متغیر کمکی S_i را متغیر مازاد می‌نامند. در هر حالت S_i با ضریب صفر به تابع هدف افزوده می‌شود.

$$MaxZ = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow MaxZ = \sum_{j=1}^n c_j x_j + oS_1 + oS_2 + \dots + oS_m$$

در صورتی که تابع هدف از نوع Min باشد می‌توان از رابطه $MinZ = Max(-Z)$ استفاده کرده مساله را به فرم Max درآورد. در این صورت جواب بهینه نهایی هر چه باشد مقدار تابع هدف در منفی ضرب می‌شود.

برای مسائلی که محدودیتی به فرم بزرگتر مساوی دارند پس از کسر متغیر مازاد، متغیر دیگری به نام متغیر تصنیعی به آن محدودیت اضافه می‌شود، تا بتوان روش سیمپلکس را شروع کرد. اینگونه حالات را به طور مفصل توضیح خواهیم داد.

روش سیمپلکس

روش سیمپلکس به مجموعه‌ای از مراحل ریاضی برای حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی گفته می‌شود که در یک جدول که به «تابلوی سیمپلکس» معروف است انجام می‌گیرد. تابلوی سیمپلکس مدل را به گونه‌ای سازماندهی می‌کند که به کارگیری مراحل ریاضی را آسانتر می‌سازد. مراحل سیمپلکس برای مساله‌ای که از نوع Max بوده و تمام محدودیتها آن به صورت کوچکتر مساوی (\leq) هستند به صورت زیر می‌باشد.

ابتدا مدل را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم :

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_p x_p + \dots + c_n x_n + o S_1 + o S_p + \dots + o S_m$$

s.t.

$$a_{11} x_1 + a_{1p} x_p + \dots + a_{1n} x_n + S_1 = b_1$$

$$a_{p1} x_1 + a_{pp} x_p + \dots + a_{pn} x_n + S_p = b_p$$

⋮

$$a_{m1} x_1 + a_{mp} x_p + \dots + a_{mn} x_n + S_m = b_m$$

$$x_1, x_p, \dots, x_n, S_1, S_p, \dots, S_m \geq 0$$

تابع هدف را به صورت

$$Z - c_1 x_1 - c_p x_p - \dots - c_n x_n - o S_1 - o S_p - \dots - o S_m \quad (*)$$

نوشته جدول زیر را تشکیل می‌دهیم

متغیر اساسی	Z	x_1	x_p	...	x_n	S_1	S_p	...	S_m	مقادیر سمت راست
S_o	1	$-c_1$	$-c_p$...	$-c_n$	0	0	...	0	0
S_1	0	a_{11}	a_{1p}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
S_p	0	a_{p1}	a_{pp}	...	a_{pn}	0	1	...	0	b_p
⋮	⋮									⋮
S_m	0	a_{m1}	a_{mp}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m

در بالای جدول Z به عنوان تابع هدف و متغیرهای تصمیم به ترتیب نوشته شده‌اند . در اولین سطر جدول که اصطلاحاً به سطر صفر معروف است ، ضریب هر متغیر در رابطه (*) هر چه باشد ، متناظراً زیر همان متغیر نوشته شده است . در ستون سمت چپ جدول مقدار تابع هدف ، Z ، و متغیرهای اساسی S_1 ، S_p ، ... ، S_m نوشته شده‌اند . قسمت

وسط ضرایب متناظر با هر متغیر نسبت به محدودیت مورد نظر آمده است و در ستون سمت راست، مقادیر سمت راست مدل نوشته شده‌اند.

(۱) اگر مقادیر سطر صفر همگنی نامنفی باشند، جدول فوق بهینه بوده، جواب بهینه حاصل می‌شود. در غیر این صورت به گام ۲ برو.

(۲) اگر تعدادی از مقادیر سطر صفر منفی باشد، منفی‌ترین مقدار سطر صفر را در نظر می‌گیریم، مثلًاً c_r - در این صورت x_r را متغیری تعریف می‌کنیم که باید وارد پایه شود. (متغیر اساسی شود)

(۳) به منظور ورود x_r به پایه، یکی از متغیرهای اساسی باید از پایه خارج شود. روش خارج شدن متغیری از پایه، با قاعده زیر که به قاعده مینیمم معروف است انجام می‌شود. فرض کنیم:

$$\min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > 0 \right\} = \frac{b_r}{a_{rj}}$$

در این صورت متغیر اساسی که در سطر r قرار دارد (در جدول فوق S_r) از پایه خارج می‌شود و x_r بجای آن در ستون سمت چپ به عنوان متغیر اساسی قرار می‌گیرد.

(۴) سطر r را به a_{rj} تقسیم می‌کنیم تا ضریب x_r در سطر مربوطه عدد ۱ شود. با استفاده از اعمال سطري مقدماتی سایر عناصر ستون r را صفر می‌کنیم.

(۵) به گام ۱ برمی‌گریم.

مراحل اجرای الگوریتم فوق در حل تمرینات آخر فصل به طور مفصل آمده است.

اگر تابع هدف از نوع Min باشد، با استفاده از رابطه $MinZ=Max(-Z)$ ، نوع تابع هدف را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$MinZ = c_1x_1 + c_p x_p + \dots + c_n x_n + oS_1 + oS_p + \dots + oS_m$$

$$Max - Z = -c_1x_1 - c_p x_p - \dots - c_n x_n - oS_1 - oS_p - \dots - oS_m$$

$$\Rightarrow -Z + c_1x_1 + c_p x_p + \dots + c_n x_n + oS_1 + oS_p + \dots + oS_m = 0 \quad (**)$$

حال از رابطه (**) برای تشکیل سطر صفر جدول استفاده کرده ، مراحل گفته شده را اجرا می‌کنیم .

اگر حداقل یکی از محدودیتها به شکل بزرگتر مساوی (\geq) باشد ، با توجه به مطلوبی که در مورد استاندارد کردن مدل برنامه‌ریزی گفتم ، به سطر مورد نظر باید علاوه بر متغیر مازاد ، یک متغیر تصنیعی اضافه کرد . وجود متغیر تصنیعی باعث بزرگتر شدن ناحیه موجه به طور مصنوعی می‌شود . بنابراین باید روشی را در پیش گیریم که متغیر تصنیعی سریعاً از پایه اساسی خارج شود .

برای این منظور دو روش می‌توان در پیش گرفت که عبارتند از :

الف) روش M بزرگ : در این روش متغیر تصنیعی را با ضریب مثبت بسیار بزرگ M از تابع هدف کسر می‌کنیم به عبارتی اگر R_j متغیر تصنیعی باشد آن گاه تابع هدف به صورت زیر عوض می‌شود :

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - MR_j$$

و

$$Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + MR_j$$

حال برای شروع روش سیمپلکس تابلوی سیمپلکس را تشکیل می‌دهیم و در آن تابلو بجای R_j ، S_j به عنوان متغیر اساسی قرار می‌گیرد . در این نوع روش ، روش سیمپلکس با صفر کردن ضریب R_j در سطر صفر (با توجه به تابع هدف ضریب R_j در سطر صفر M است) روش عملیات سطربال مقدماتی شروع می‌شود . سپس تمام مراحل روش سیمپلکس برای بدست آوردن جواب بهینه تکرار می‌شود . در جوابنهایی اگر متغیر تصنیعی با مقدار غیر صفر در پایه اساسی باقی بماند ، (یعنی در مراحل قبل از پایه خارج نشود و مقدار آن در جوابنهای غیر صفر باشد) تشخیص می‌دهیم که مساله اصلی نشدنی است در غیر اینصورت جواب بدست آمده ، جواب بهینه مساله اصلی است .

ب) روش سیمپلکس دو مرحله ای : مرحله اول، در این روش ابتدا تابع هدف جدید را به صورت مجموع متغیرهای تصنیعی به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\begin{aligned} \text{Min } R &= \sum R_j \quad \Rightarrow \text{Max } -R = -\sum R_j \\ &\Rightarrow -R + \sum R_j = 0 \end{aligned}$$

این تابع هدف را بجای تابع هدف مساله اصلی قرار می دهیم و مساله را به روش سیمپلکس حل می کنیم تا به جواب بهینه برسیم . اگر جواب بهینه مخالف صفر باشد (یعنی در جواب نهایی متغیرهای تصنیعی دارای مقدار غیر صفر باشند) آن گاه تشخیص می دهیم که مساله اصلی نشدنی است . در غیر اینصورت وارد مرحله دوم می شویم . مرحله دوم : در این مرحله تابلوی بهینه مرحله قبل را در نظر می گیریم . تابع هدف مساله اصلی را به صورت زیر می نویسیم :

$$Z - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n = 0$$

ضرایب متغیرهای تضمین را در سطر صفر تابلوی بهینه مرحله قبل قرار می دهیم . اما به هیچ یک از مقادیر سطرهای دیگر تابلوی بهینه دست نمی زنیم . حال روش سیمپلکس را برای تابلوی جدید پیاده می کنیم تا به جواب نهایی برسیم . پیاده سازی تمام الگوریتم در حل تمرینات پایان فصل به تفصیل آمده است .

موارد خاص در برنامه ریزی خطی

الف) جواب بهینه چندگانه : اگر در تابلوی بهینه به ازای حداقل یک متغیر غیر اساسی مانند x_i ، ضریب آن در سطر Z صفر باشد؛ آنگاه x_i می تواند وارد پایه اساسی شود، بدون اینکه جواب بهینه تغییر کند . در این صورت یک پایه اساسی برای جواب بهینه بدست می آید . در این حالت مساله دچار حالت بهینه چندگانه می شود .

ب) فاقد ناحیه جواب : اگر در انتهای روش M بزرگ یا روش سیمپلکس دو مرحله ای، متغیر تصنیعی با مقدار غیر صفر در پایه اساسی باقی بماند ، تشخیص می دهیم که مساله اصلی فاقد ناحیه موجه است .

- ب) ناحیه جواب بی‌کران : هرگاه در تابلوی آخر سیمپلکس ، امکان انتخاب متغیر ورودی وجود داشته باشد ولی متغیر خروجی بدلیل مثبت نبودن ضرایب ستون لولا قابل تعریف نباشد ، مدل برنامه‌ریزی خطی دارای ناحیه جواب بی‌کران است .
- ت) جواب تبهگن : اگر در جواب بهینه ، متغیری اساسی دارای مقدار صفر باشد ، جواب بدست آمده تبهگن است .

مسائل فصل چهارم

مسئلهای تکمیلی و چهارگزنه‌ای (صفحه ۶۰ کتاب درسی)

- ۱- متغیرهایی که نامعادلات را به معادله تبدیل می‌کنند ، متغیرهای نامیده می‌شوند.

پاسخ :

کمکی

- ۲- اضافه کردن متغیر مصنوعی (R) به محدودیت ، موجب منطقه موجه می‌گردد.

پاسخ :

بزرگتر

- ۳- هر تابلوی سیمپلکس از نظر هندسی ، همواره متناظر با یک است .

پاسخ :

گوشه

- ۴- اگر یک گوشه موجه ، از نظر تابع هدف نسبت به گوشه‌های مجاور خود بهتر باشد، آن گوشه ، جواب است .

پاسخ :

بهینه (این یکی از خواص اساسی گوشه‌های موجه است)

- ۵- در صورتی که یک محدودیت نیازی به متغیر کمکی (S) نداشته باشد ، آن محدودیت یک محدودیت است .

پاسخ :

مساوی

۶- اگر متغیر خروجی مطابق با قاعده «حداقل نسبت اعداد سمت راست بر مقادیر مثبت ستون لولا نباشد» ، حداقل یک متغیر اساسی در تابلوی بعد خواهد شد .

پاسخ :

منفی

۷- محدودیتی به عنوان محدودیت فعال (الزم‌آور) تلقی می‌شود که از میان گوشاهای که جواب بر روی آن قرار دارد ، عبور کند .

پاسخ :

بهینه

۸- برای تبدیل یک محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) به مساوی ($=$) باید از متغیر استفاده کرد .

پاسخ :

کمکی کمبود

۹- هر یک از متغیرهای کمبود و مازاد را متغیر گویند .

پاسخ :

کمکی

۱۰- برای تبدیلتابع هدف Min به تابع هدف Max باید طرفین معادله را در ضرب کرد .

پاسخ :

منهای یک (-1)

۱۱- در جواب موجه اساسی ، متغیرهای مساوی صفر را متغیر گویند .

پاسخ :

غیراساسی

۱۲- در صورتی که کلیه متغیرهای مصنوعی غیراساسی شوند ، تابلوی سیمپلکس متناظر با یک گوشه شده است .

پاسخ :

موجه

۱۳- کدامیک از متغیرهای زیر می‌تواند متغیر کمکی تلقی شود؟

- الف) متغیر تصمیم ب) متغیر مازاد ج) متغیر کمیود

د) ب و ج

پاسخ :

گزینه د

۱۴- اگر در یک نقطه، m متغیر مقدار بزرگتر از صفر داشته باشند و n متغیر مقدار صفر، آن

جواب : (توجه : تعداد کل متغیرهای مدل $m+n$ است)

الف) موجه اساسی است.

ب) موجه غیر اساسی است.

د) غیر اساسی است.

ج) غیرموجه است.

پاسخ :

گزینه الف

۱۵- شروع روش سیمپلکس، همواره از :

ب) مبدا مختصات است.

الف) یک گوشه غیر موجه است.

د) یک جواب موجه غیر گوشه‌ای است.

ج) یک جواب موجه غیر گوشه‌ای است.

گزینه ب

۱۶- در روش سیمپلکس، متغیر خروجی متغیری است که دارای :

الف) حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر منفی ستون لولا باشد.

ب) حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد.

ج) حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر منفی ستون لولا باشد.

د) حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد.

پاسخ :

گزینه د

۱۷- اگر در یک تابلوی سیمپلکس، حداقل یکی از متغیرهای اساسی، مصنوعی با مقدار بزرگتر از

صفر باشد، گوشه متناظر با آن تابلو حتماً یک گوشه :

الف) موجه است.

ب) بهینه است.

ج) غیرموجه است.

د) تبهگن است.

پاسخ :

گزینه ج

- ۱۸- اگر تابلوی بهینه سیمپلکس مدل دارای مقدار صفر برای یک متغیر غیراساسی در سطر صفر باشد، آن مدل حتماً دارای حالت خاص :
- الف) بهینه چندگانه است.
 - ب) فاقد ناحیه جواب است.
 - ج) تبہگن است.
 - د) ناحیه جواب بیکران است.

پاسخ :

گزینه الف

- ۱۹- کدامیک از گزینه‌های زیر جایگزین محدودیت $x \geq -10$ است؟

ب) $x = x' - 10$	آزاد در علامت'	الف) $x = -10$
د) $x = x' - 10$	$-x' \leq -10$	ج) $x' \geq 0$

پاسخ :

گزینه د - محدودیت $x \geq -10$ نشان می‌دهد که x می‌تواند مقادیر منفی و مثبت داشته باشد. بنابراین x آزاد در علامت است. درنتیجه تعریف می‌کنیم

$$x = x' - x'' \quad \Rightarrow \quad x = x' - 10 \\ x' \geq 0$$

- ۲۰- مدل زیر داده شده است :

$$MaxZ = 3x_1 + x_p$$

s.t

$$x_1 + x_p \leq 100$$

$$x_1, x_p \geq 0 \quad \text{آزاد در علامت}$$

مدل جایگزین کدام است؟

$$MaxZ = 3x'_1 - 3x''_1 + x_p \quad \text{ب) } \\ s.t$$

$$x'_1 - x''_1 + x_p \geq 100 \\ x'_1, x''_1, x_p \geq 0$$

$$MaxZ = 3x'_1 + x'_p - x''_p \quad \text{الف) } \\ s.t$$

$$x'_1 + x'_p \leq 100 \\ x'_1, x'_p \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' - x_2'' &\leq 100 \\ x_1, x_2' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 3x_1 + x_2' - x_2'' \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' - x_2'' &\leq 100 \\ x_1, x_2', x_2'' &\geq 0 \end{aligned}$$

پاسخ :

گزینه ج - چون x_2 آزاد در علامت است تعریف می کنیم $x_2 = x_2' - x_2''$ ، با جایگذاری این مقدار در مساله بدست می آوریم :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2' - x_2''$$

s.t :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' - x_2'' &\leq 100 \\ x_1, x_2', x_2'' &\geq 0 \end{aligned}$$

۲۱- مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 16x_1 + 4x_2$$

s.t :

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

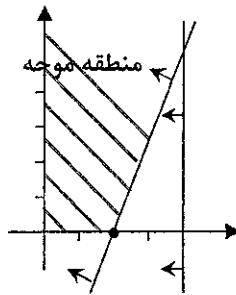
$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

کدام گزینه صحیح است ؟

- ب) جواب بهینه چندگانه دارد .
- د) فاقد جواب موجه
- الف) منطقه موجه یک نقطه است .
- ج) منطقه موجه نامحدود است

پاسخ :



همانطوریکه از روی شکل پیدا است مساله دارای جواب بیکران است.

۲۲- تعداد متغیرهای کمکی برای مساله زیر چقدر است؟

$$MaxZ = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.t:

$$2x_1 + x_3 \leq 2 \quad \text{الف) ۳}$$

$$x_2 + x_3 \geq 5 \quad \text{ب) ۲}$$

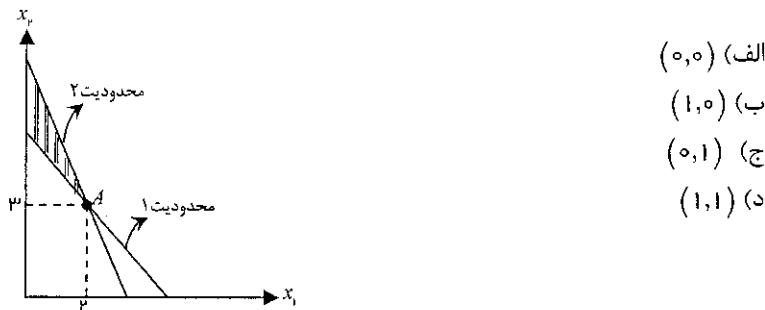
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad \text{ج) ۱}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{د) ۴}$$

پاسخ :

گزینه ب - محدودیت‌های اول و دوم به شکل تساوی نیستند. لذا نیاز به متغیر کمکی دارند. پس ۲ متغیر کمکی لازم است.

۲۳- منطقه موجه یک مساله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر مشخص شده است. در گوشه A مقدار متغیرهای کمکی (S_1, S_2) به ترتیب از راست به چپ چقدر است؟

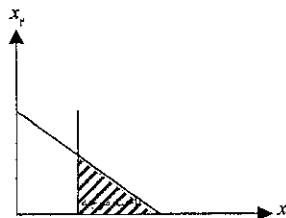


پاسخ :

گزینه الف - در گوشه A محدودیت اول و دوم هر دو فعال هستند (به شکل تساوی برقرارند) لذا مقدار متغیرهای کمکی در این نقطه صفر است. پس $S_1 = 0, S_2 = 0$.

نکته: برای محدودیتها بی که معادلات نظریشان گوشه‌ای را تشکیل می‌دهند، در آن گوشه مقدار متغیرهای کمکی متناظرشان صفر است.

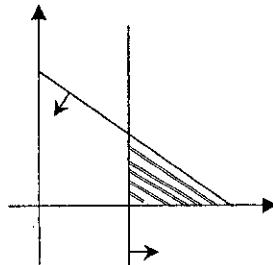
۲۴- برای حل مساله زیر به روش سیمپلکس به چند متغیر مصنوعی نیاز است؟



- (الف) ۱
- (ب) ۲
- (ج) ۳
- (د) صفر

پاسخ :

گزینه الف - مساله فوق دارای یک محدودیت به صورت بزرگتر مساوی (\geq) و یک محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) است.



محدودیتی که به صورت کوچکتر مساوی است (\leq) تنها به یک متغیر کمکی نیاز دارد.
اما محدودیتی که به شکل بزرگتر مساوی (\geq) است به یک متغیر کمکی و یک متغیر تصنیعی نیاز دارد.

۲۵- یک مساله برنامه‌ریزی خطی دارای ۱۰ متغیر تصمیم، ۸ متغیر کمکی، ۳ متغیر مصنوعی و ۹ محدودیت است. تعداد متغیرهای اساسی این مساله در تابلوی سیمپلکس چند تا است؟

- (الف) ۳
- (ب) ۸
- (ج) ۹
- (د) ۱۰

پاسخ :

گزینه ج - تعداد متغیرهای اساسی یک مساله برابر با تعداد محدودیتهای آن است.

۲۶- تعداد تکرارهای سیمپلکس در روش M بزرگ در مقایسه با روش سیمپلکس دو مرحله‌ای همواره:

- (الف) کمتر است.
- (ب) بیشتر است.
- (ج) متفاوت است.
- (د) مساوی است.

پاسخ :

گزینه د - تعداد تکرارهای سیمپلکس در روش M بزرگ و دو مرحله‌ای برابر است.

- ۲۷- انتقال از یک تابلوی سیمپلکس به تابلوی بعدی به معنای انتقال از یک جواب :
- الف) غیر گوشه به جواب گوشه است .
 - ب) غیر گوشه به جواب گوشه است .
 - ج) گوشه به جواب غیر گوشه است .
 - د) گوشه به جواب غیر گوشه است .

پاسخ :

گزینه د - الگوریتم سیمپلکس همواره از گوشه‌ای به گوشه مجاور حرکت می‌کند به نحوی که تابع هدف را بهبود بخشد .

- ۲۸- در یک تابلوی سیمپلکس متغیر ورودی وجود دارد ولی تمامی عناصر ستون لولا غیر مثبت هستند ، حتماً مدل برنامه‌ریزی خطی مربوطه :
- الف) دارای جواب بهینه چندگانه است .
 - ب) دارای ناحیه جواب بیکران است .
 - ج) فاقد ناحیه موجه است .
 - د) دارای جواب تبهگن است .

پاسخ :

گزینه ب

- ۲۹- در روش سیمپلکس دو مرحله‌ای همواره عنصر لولا :
- الف) منفی است .
 - ب) مثبت است .
 - ج) صفر است .
 - د) کوچکتر مساوی صفر است .

پاسخ :

گزینه ب

- ۳۰- مساله LP^* زیر داده شده است . مقدار Z^* در گوشه بهینه چقدر است ؟
- $$\text{Max } Z = 10x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + x_5 \quad ۹۰۰$$
- s.t :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 \leq 90 \quad ۳۰۰$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad ۴۵۰$$

پاسخ :

گزینه د

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + x_5 + 0S_1 \\ \Rightarrow Z - 10x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 - x_5 - 0S_1 &= 0 \end{aligned}$$

S.t :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{\mu}x_5 + S_1 = 90$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, S_1 \geq 0$$

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-10	1	-5	3	-1	0	0
S_1	0	(μ)	2	1	1	$\frac{1}{\mu}$	1	90
Z_0	1	0	$\frac{2\mu}{\mu}$	$-\frac{5}{\mu}$	$\frac{19}{\mu}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{\mu}$	300
X_1	0	1	$\frac{2}{\mu}$	($\frac{1}{\mu}$)	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{\mu}$	30
Z_0	1	5	11	0	8	$\frac{2}{\mu}$	5	450
X_2	0	3	2	1	1	$\frac{1}{\mu}$	1	90

بنابراین مقدار Z^* برابر است با ۴۵۰

۳۱- در روش سیمپلکس دو مرحله‌ای ، تابلوی نهایی مرحله I (با فرض محدود بودن ناحیه موجه)

بیانگر یک گوشه :

- ب) غیرموجه
 الف) لزوماً بهینه
 د) مبدا مختصات
 ج) موجه

پاسخ :

گزینه ج

۳۲- تابلوی نهایی یک مساله LP به صورت زیر است . کدام گزینه صحیح است ؟

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_p	مقادیر سمت راست
Z_o	1	1	0	$M+3$	M	0	$30-10M$
X_p	0	1	1	1	0	0	10
R_p	0	0	0	-1	-1	1	20

الف) مدل دارای جواب بهینه جایگزین است .

ب) مدل فاقد ناحیه جواب است .

ج) مدل دارای ناحیه جواب بیکران است .

د) مدل دارای جواب تبیهگن است .

پاسخ :

گزینه ب - چنانچه در تابلوی نهایی متغیر تصنیعی با مقدار غیرصفر وجود داشته باشد تشخیص می‌دهیم که مساله فاقد ناحیه شدنی است .

۳۳- تابلوی نهایی یک مساله LP به صورت زیر است . کدام گزینه صحیح است ؟

الف) مدل دارای جواب بهینه چندگانه است .

ب) مدل دارای جواب بهینه تبیهگن است .

ج) مدل فاقد ناحیه موجه است .

د) مدل دارای ناحیه جواب بیکران است .

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_o	1	0	0	2	0	42
X_p	0	0	1	$\frac{7}{45}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{3}$
X_1	0	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{7}{3}$

پاسخ :

گزینه الف - چنانچه در تابلوی نهایی ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر برابر صفر باشد مساله جواب بهینه چندگانه دارد . در تابلوی فوق نیز متغیر غیراساسی S_p در سطر صفر دارای مقدار صفر است.

۳۴- تابع هدف مرحله I مدل زیر در روش دو مرحله‌ای سیمپلکس کدام است ؟

$$\text{Max } Z = 5x_1 - 6x_p$$

s.t:

$$x_1 + 5x_p \geq 15$$

$$x_1 + x_p = 5$$

$$5x_1 + 2x_p \leq 10$$

$$x_1, x_p \geq 0$$

$$\text{Min } R_s = R_1 \quad (\text{الف})$$

$$\text{Min } R_s = R_1 + R_p \quad (\text{ب})$$

$$\text{Min } R_s = R_1 + R_p + R_p \quad (\text{ج})$$

$$\text{Max } R_s = R_1 + R_p + R_p \quad (\text{د})$$

پاسخ :

گزینه ب - داریم :

$$\text{Max } Z = 5x_1 - 6x_p$$

$$x_1 + 5x_p - S_1 + R_1 = 15$$

$$x_1 + x_p + R_p = 5$$

$$5x_1 + 2x_p + S_p = 10$$

$$x_1, x_p, S_1, S_p, R_1, R_p \geq 0$$

بنابراین تابع هدف مرحله I عبارتست از :

$$\text{Min } R = R_1 + R_p$$

۳۵- تابلوی سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید . تعداد محدودیتهای مساوی (=) در مدل آن چندتا است ؟ (هیچ مغایری از تابلوی زیر حذف نشده است)

- | | |
|--------|--------|
| ب) ٢ | الف) ١ |
| د) هيج | ج) ٣ |

متغیر اساسی	Z	x_1	x_p	x_p	S_1	S_p	S_p	مقادیر سمت راست
Z_0	1	0	10	0	0	2	1	۲۴۰
X_1	0	1	1	0	0	0	$\frac{1}{6}$	۴۰
X_p	0	0	$\frac{1}{\mu}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	10
S_1	0	0	$\frac{1}{\mu}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	10

پاسخ:

گزینه ۵ - زیرا از متغیر تصنیعی استفاده شده است.

تمرینات (صفحه ۱۶۶ کتاب درسی)

۱- تابلوی سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید و به سوالات مورد نظر پاسخ دهید؟

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست
$Z_{\text{ب}}$	۱	۰	۰	۱۰	۲	۴	۰	۲۴۰
X_2	۰	۰	۱	-۲	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	۱۰
X_1	۰	۱	۰	۲	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۴۰
S_3	۰	۰	۰	۸	-۳	$\frac{3}{2}$	۱	۳۰

الف) تابلوی فوق چگونه تابلویی از روش سیمپلکس است؟ چرا؟

ب) متغیرهای غیراساسی را مشخص کنید؟

ج) جواب مربوط به این تابلو را بنویسید؟

د) مدل این تابلوی سیمپلکس دارای چند محدودیت است؟

ه) اگر هیچ متغیری از مدل حذف نشده باشد، تعداد محدودیتهای مساوی مدل را بنویسید؟

و) اگر هیچ متغیری از مدل حذف نشده باشد، تعداد محدودیتهای کوچکتر مساوی مدل را بنویسید؟

پاسخ:

الف) تابلوی فوق یک تابلوی بهینه موجه است. زیرا هم شرط بهینگی (نامنفی بودن ضرایب سطر $Z_{\text{ب}}$) و هم شرط نامنفی بودن متغیرها در آن صادق است.

ب) متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

$$X_3, S_1, S_2$$

ج) جواب مربوط به تابلو عبارتست از

$$x_1 = 40, x_2 = 10, x_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = 30, Z_{\text{ب}} = 240$$

د) چون بعد از سطر صفر، سه سطر در تابلو وجود دارد، پس مدل این تابلو دارای سه محدودیت می‌باشد.

ه) با توجه به قسمت (د) مدل مساله دارای سه محدودیت است . محدودیتی که به شکل کوچکتر مساوی (\leq) باشد . با افزودن متغیر کمکی آن را به صورت مساوی می‌نویسند :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \leq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i + S_j = b_j$$

محدودیتی که به شکل بزرگتر مساوی (\geq) باشد ، با کم کردن متغیر کمکی آن را به صورت تساوی می‌نویسند :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \geq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i - S_j = b_j$$

برای این نوع محدودیتها به یک متغیر مصنوعی نیز نیاز خواهیم داشت . لذا خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i - S_j + R_j = b_j$$

بنابراین نتیجه کلی زیر را داریم :
در تابلوی سیمپلکس

تعداد سطرهای زیر سطر صفر تابلو = تعداد محدودیتها

تعداد متغیرهای کمکی – تعداد محدودیتها = تعداد محدودیتهای مساوی

تعداد متغیرهای کمکی که متغیر تصنیعی متناظر نداشته باشند = تعداد محدودیتهای به شکل کوچکتر مساوی در جدول فوق چون سه متغیر کمکی وجود دارد و هیچ کدام متغیر تصنیعی نظیر ندارند (در جدول وجود ندارد) لذا از مطالب بالا نتیجه می‌شود که مساله سه محدودیت کوچکتر مساوی دارد و هیچ محدودیتی به شکل تساوی ندارد .

و) با توجه به توضیحات قسمت (ب) مساله سه محدودیت به شکل کوچکتر مساوی دارد .

۲- تابلوی سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید و به سوالات مورد نظر پاسخ دهید؟ (تابلوی داده شده بیانگر تمام متغیرهای مورد استفاده در حل مدل LP است)

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	۳۰
X_2	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	۱۰
S_1	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	۲۰
X_1	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	۱۰

الف) تعداد محدودیتهای مدل را بنویسید؟

ب) چندتا از محدودیتهای مدل به صورت مساوی است؟ چرا؟

ج) مدل LP مربوط به این تابلو چه حالت خاصی از LP است؟ چرا؟

د) با توجه به جواب بند ج، جواب جایگزین را بدست آورید؟

پاسخ:

الف) مدل سه محدودیت دارد.

ب) با توجه به توضیحات بند (ه) از تمرین قبل مدل دارای محدودیت به صورت مساوی نیست. زیرا مساله دارای سه متغیر کمکی و سه محدودیت است.

ج) بهینه چندگانه زیرا ضریب متغیر غیر اساسی S_1 در سطر صفر جدول برابر صفر است. (با توجه به اینکه ضریب تمامی متغیرها در سطر صفر نامنفی است، پس جدول بهینه است).

د) چون ضریب S_1 صفر است، پس S_1 متغیر ورودی می‌باشد. روشن است S_1 متغیر خروجی است.

پس از ورود S_1 جدول به صورت زیر خواهد شد:

متغیر اساسی	Z	x_1	x_p	x_p	S_1	S_p	S_p	مقادیر سمت راست
Z_0	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	30
X_p	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{3}$
S_1	0	0	0	-1	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{80}{3}$
X_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{70}{3}$

۳- جواب بهینه مدل LP زیر را با استفاده از روش ترسیمی و سیمپلکس بدست آورید؟

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_p$$

s.t :

$$x_1 + 2x_p \leq 10$$

$$6x_1 + 6x_p \leq 36$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_p \geq 0$$

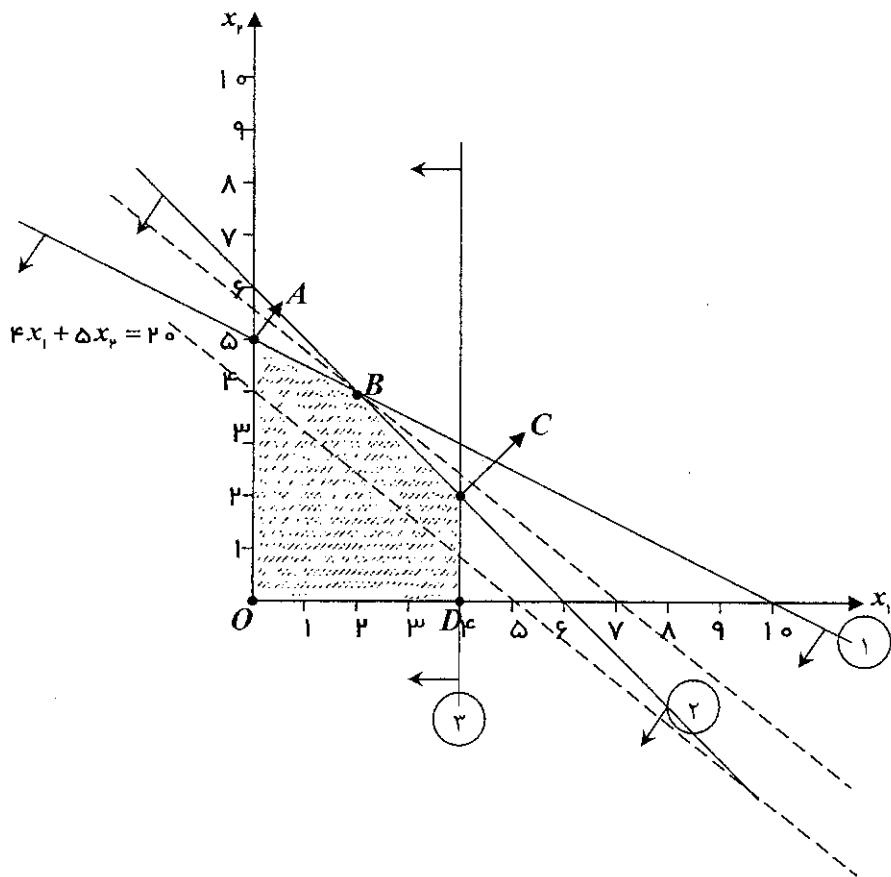
پاسخ :

به روش ترسیمی داریم:

$$1: x_1 + 2x_p = 10 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 10 \\ \hline x_p & 5 & 0 \end{array}$$

$$2: 6x_1 + 6x_p = 36 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 6 \\ \hline x_p & 6 & 0 \end{array}$$

$$3: x_1 = 4$$



گوشه	مختصات	مقدارتابع هدف
O	(0,0)	0
A	(0,5)	25
B	(2,4)	27
C	(4,2)	26
D	(5,0)	16

مقدار تابع هدف در گوشه B بیشترین مقدار است. لذا گوشه B راس بهینه است . پس

$$x_1^* = 4, \quad x_2^* = 5, \quad Z^* = 28$$

روش سیمپلکس : با افزودن متغیرهای کمکی S_1, S_2, S_3 به ترتیب به محدودیتهای اول ، دوم ، سوم خواهیم داشت .

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

s.t :

$$x_1 + 4x_2 + S_1 = 10$$

$$6x_1 + 5x_2 + S_2 = 36$$

$$x_1 + S_3 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

مراحل اجرای روش سیمپلکس در جدول زیر آمده است :

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	سمت راست
Z	1	-4	-5	0	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	0	10
S_2	0	6	5	0	1	0	36
S_3	0	1	0	0	0	1	4
Z_1	1	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	25
X_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	5
S_2	0	3	0	-3	1	0	6
S_3	0	1	0	0	0	1	4
Z	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	28
X_2	0	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	0	4
X_1	0	1	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	2
S_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	1	2

تابلوی اول

تابلوی دوم

تابلوی
بهینه

جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1^* = 2, x_2^* = 4, S_1^* = 0, S_2^* = 0, S_3^* = 2, Z^* = 28$$

که با جواب قبلی مطابقت دارد.

۴- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الف) جواب بهینه مدل را به روش ترسیمی بدست آورید؟

ب) جواب بهینه مدل را به روش M بزرگ بدست آورید؟

ج) مسیر حرکت سیمپلکس را بر روی شکل بند الف مشخص کنید؟

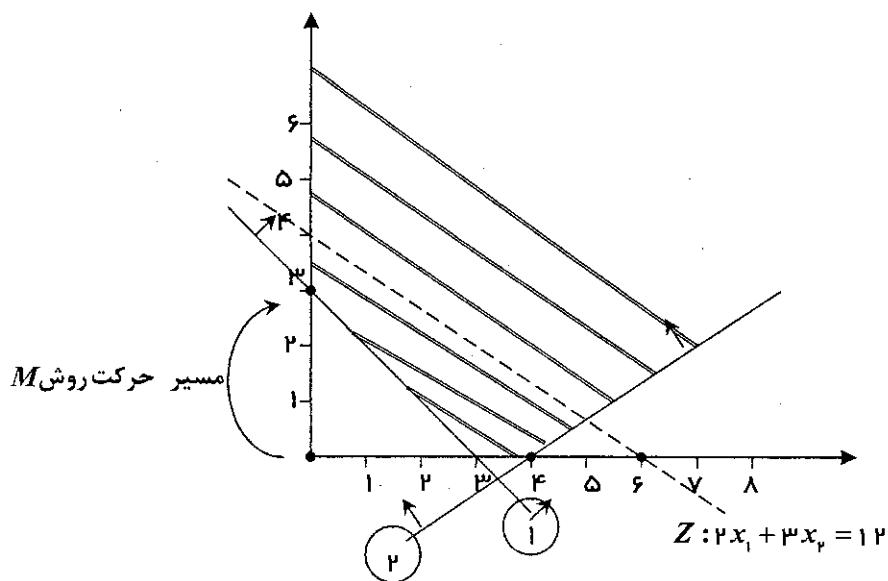
د) جواب بهینه مدل را به روش سیمپلکس دو مرحله‌ای بدست آورید؟

 پاسخ :

به روش ترسیمی داریم :

$$1: x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 3 \\ \hline x_2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$2: x_1 - 2x_2 = 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 4 & 6 \\ \hline x_2 & 0 & 1 \end{array}$$



روشن است Z می‌تواند به طور بیکران افزایش یابد.

ب) با روش M بزرگ داریم :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - MR_1$$

s.t :

$$x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + S_2 = 4$$

$$x_1, x_2, R_1, S_1, S_2 \geq 0$$

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	سمت راست	
Z	1	-۲	-۳	۰	۰	M	۰	تابلوا مقدماتی
R_1	۰	1	1	-1	۰	1	۳	
S_2	۰	1	-2	۰	1	۰	۴	
Z	1	-۲ - M	-۳ - M	- M	۰	۰	-۳ M	تابلوا اول
R_1	۰	(1)	1	-1	۰	1	۳	
S_2	۰	1	-2	۰	1	۰	۴	
Z	1	1	۰	-۳ -1 -2	۰	$۳ + M$	۹	تابلوا دوم
X_2	۰	1	1		۰	1	۳	
S_1	۰	۳	۰		1	۲	۱۰	

در تابلوا دوم S_1 متغیر ورودی است . اما بدلیل مثبت نبودن عناصر ستون لولا ، انتخاب متغیر خروجی غیرممکن است . بنابراین تابع هدف می تواند به طور بیکران افزایش یابد .

ج) مسیر حرکت در قسمت (الف) روی نمودار نشان داده شده است .

د) به روش دو مرحله ای داریم :

مرحله I

$$\text{Min } R_1 = R_1$$

$$x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = ۳$$

$$x_1 - ۲x_2 + S_2 = ۴$$

$$x_1, x_2, R_1, S_1, S_2 \geq ۰$$

مراحل حل مساله I

متغیر اساسی	R_0	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	سمت راست
R_0	-1	0	0	0	0	1	0
R_1	0	1	1	-1	0	1	3
S_2	0	1	-2	0	1	0	4
R_0	-1	-1	-1	1	0	0	-3
R_1	0	1	(1)	-1	0	1	3
S_2	0	1	-2	0	1	0	4
R_0	-1	0	0	0	0	1	0
X_1	0	1	1	-1	0	1	3
S_2	0	3	0	-2	1	2	10

تابلوی مقدماتی

تابلوی اول

تابلوی دوم

حال تابع هدف Z را به معادله قابل ورود به تابلوی سیمپلکس درمی‌آوریم :

$$Z = -2x_1 - 3x_2$$

مراحل حل مساله II

متغیر اساسی	Z_0	x_1	x_2	S_1	S_2	سمت راست
Z	1	-2	-3	0	0	0
x_2	0	1	1	-1	0	3
S_2	0	3	0	-2	1	10
Z	1	1	-1	(-3)	0	9
X_1	0	1	1	(-1)	0	3
S_2	0	0	0	-2	1	1

تابلوی مقدماتی

تابلوی اول

در تابلوی فوق x_2 متغیر ورودی است اما به خاطر منفی بودن عناصر ستون لولا ، امکان انتخاب متغیر خروجی وجود ندارد . لذا تابع هدف می‌تواند به طور بیکران افزایش یابد .

۵- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

الف) مساله را به روش ترسیمی حل کنید ؟

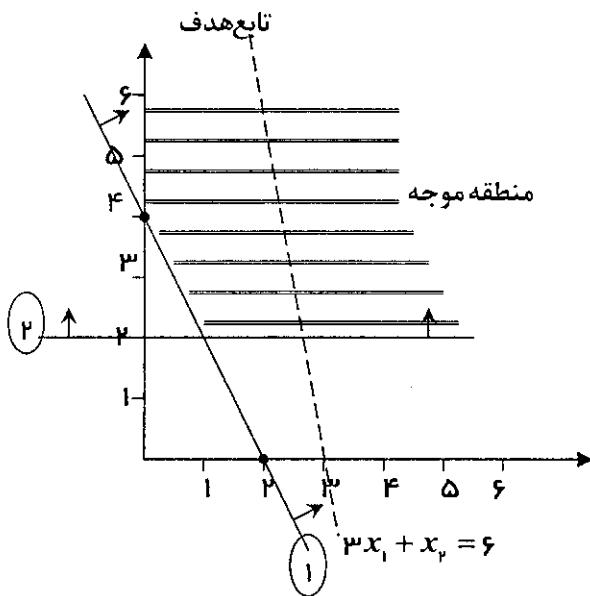
ب) مدل را به روش سیمپلکس حل کنید ؟

پاسخ :

الف) داریم :

$$1: 2x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 2 \\ \hline x_2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x_2 = 2$$



با توجه به نمودار ، روشن است تابع هدف نمی‌تواند به طور بیکران افزایش یابد .

ب) ابتدا مساله را به حالت استاندارد می‌نویسیم :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 - MR_1 + MR_2$$

$$\Rightarrow Z - 3x_1 - x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2 = 0$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 4$$

$$x_2 - S_2 + R_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مراحل مختلف اجرای روش سیمپلکس در جدول زیر خلاصه شده است :

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	سمت راست
Z	1	-3	-1	0	0	M	M	0
R_1	0	2	1	-1	0	1	0	4
R_2	0	0	1	0	-1	0	1	2
Z	1	$\frac{-3+M}{2}$	$\frac{-1-M}{2}$	M	M	0	0	$-M$
R_1	0	(2)	1	-1	0	1	0	4
R_2	0	0	1	0	-1	0	1	2
Z	1	0	$\frac{1-M}{2}$	$-\frac{3}{2}$	M	$\frac{3}{2}+M$	0	$6-M$
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
R_2	0	0	(1)	0	-1	0	1	2
Z	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}+M$	$-\frac{1}{2}+M$	5
X_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
X_2	0	0	1	0	-1	0	1	2

تابلوی
مقدماتی

تابلوی
اول

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم

در تابلوی سوم ، S_1 متغیر وارد شونده است . اما چون در ستون لولا عنصر مثبت وجود ندارد ، لذا مساله دارای جواب بیکران است . (همان موضوعی که به روش ترسیمی نیز آن را نشان دادیم) .

۶- مساله زیر را درنظر بگیرید . مساله را به روش M بزرگ حل کرده و مشخص کنید که چه حالت خاصی از برنامه‌ریزی خطی است ؟ چرا ؟

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

ابتدا مساله را به صورت استاندارد می‌نویسیم : (مساله M بزرگ)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - MR_p \Rightarrow Z - 2x_1 - 3x_2 + 0S_1 + 0S_p + MR_p = 0$$

s.t :

$$x_1 + x_2 + S_1 = 10$$

$$x_1 + x_2 - S_p + R_p = 40$$

$$x_1, x_2, S_1, S_p, R_p \geq 0$$

مراحل اجرای روش سیمپلکس در جدول خلاصه شده است .

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_p	R_p	سمت راست
Z	1	-2	-3	0	0	M	0
S_1	0	1	1	1	0	0	10
R_p	0	1	1	0	-1	1	40
Z	1	-2 - M	-3 - M	0	M	0	- $20M$
S_1	0	1	1	1	0	0	10
R_p	0	1	1	0	-1	1	40
Z	1	1	0	$2 + M$	M	0	$20 - 10M$
X_p	0	1	1	1	0	0	10
R_p	0	0	0	-1	-1	1	10

تابلوی
مقدماتی

تابلوی
اول

تابلوی
بهینه

تابلوی سوم نشان دهنده بهینگی است (تمام عناصر سطر صفر نامنفی هستند) لذا جواب بهینه به صورت

$$x_1 = 10, R_p = 10, x_2 = 0, S_1 = 0, S_p = 0$$

می‌باشد . چون در جواب بهینه مساله M بزرگ متغیر R_p ظاهر شده است لذا مساله اصلی فاقد ناحیه شدنی می‌باشد .

- مساله زیر را در نظر بگیرید . مساله را به روش سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید و گوشتهای مربوط به هر تابلوی سیمپلکس را به طریق هندسی نمایش دهید ؟

$$\text{Min } Z = x_1 - 2x_p$$

s.t :

$$x_1 + x_p \geq 2$$

$$-x_1 + x_p \geq 1$$

$$x_p \leq 10$$

$$x_1, x_p \geq 0$$

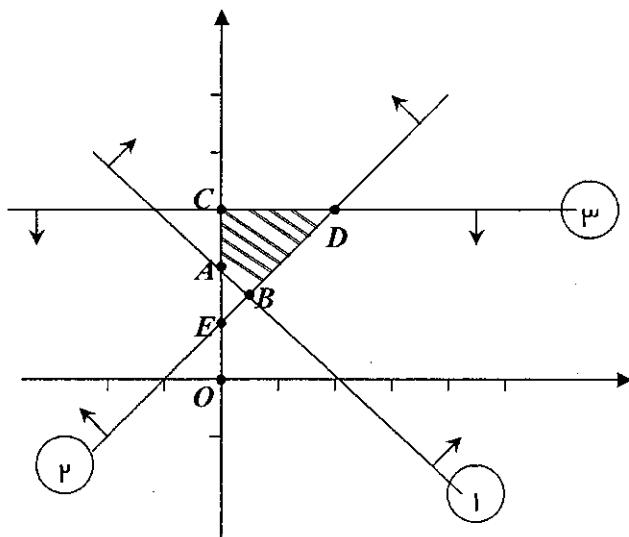
 پاسخ :

ناحیه شدنی به صورت زیر است :

$$1: \quad x_1 + x_p = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 2 \\ \hline x_p & 2 & 0 \end{array}$$

$$2: \quad -x_1 + x_p = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & -1 \\ \hline x_p & 1 & 0 \end{array}$$

$$3: \quad x_p = 10$$



حل مساله به صورت دو مرحله‌ای:

: مرحله I

$$\text{Min } R = R_i + R_p \Rightarrow \text{Max } -R = -R_i - R_p \Rightarrow -R + -R_i + R_p = 0$$

s.t :

$$x_i + x_p - S_i + R_i = \mu$$

$$-x_i + x_p - S_p + R_p = 1$$

$$x_p + S_p = \mu$$

$$x_i, x_p, S_i, S_p, R_i, R_p \geq 0$$

تабلوی مرحله I :

متغیرهای اساسی	R	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	سمت راست
R	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
R_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
R_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	3
R	-1	0	-2	1	1	0	0	0	-3
R_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
R_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
S_2	0	0	1	0	0	1	0	0	3
R	-1	-2	0	1	-1	0	0	2	-1
R_1	0	1	0	-1	1	0	1	-1	1
X_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
S_1	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
R	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
X_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
X_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
S_3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

جدول فوق نشان دهنده بهینگی مساله مرحله I می‌باشد. حال با حذف متغیرهای تصنیعی، وارد مرحله دوم می‌شویم. خلاصه مراحل اجرای روش سیمپلکس مرحله II در ادامه آمده است.

مرحله II

$$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2 \Rightarrow \text{Max } -Z = -x_1 + 2x_2 \Rightarrow -Z + x_1 - 2x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, S_1 = 0, S_2 = 0, S_{\mu} = \frac{1}{2}$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_{μ}	سمت راست
Z	-1	1	-2	0	0	0	0
X_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
X_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
S_{μ}	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
Z	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
X_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})$	0	$\frac{1}{2}$
X_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
S_{μ}	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
Z	-1	3	0	-2	0	0	4
S_2	0	2	0	-1	1	0	1
X_2	0	1	1	-1	0	0	2
S_{μ}	0	-1	0	(1)	0	1	1
Z	-1	1	0	0	0	2	6
S_2	0	1	0	0	1	1	2
X_2	0	0	1	0	0	1	3
S_1	0	-1	0	1	0	1	1

تابلوی
مقدماتیتابلوی اول
 B گوشهتابلوی دوم
 A گوشهتابلوی بهینه
 C گوشه

- مدل‌های زیر را با استفاده از روش M بزرگ حل کنید ؟

(ب)

$$\text{Max } Z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

s.t :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s.t :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(ج)

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

s.t :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

پاسخ :

(الف)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - MR_1 - MR_2 \\ \Rightarrow Z &- x_1 - 2x_2 - 3x_3 + MR_1 + MR_2 = 0 \end{aligned}$$

s.t :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + R_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + R_2 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + S_3 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

مراحل اجرای روش سیمپلکس در جدول خلاصه شده است .

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_r	S_r	R_1	R_r	سمت راست
Z	1	-1	-2	-3	0	M	M	0
R_1	0	1	2	3	0	1	0	15
R_r	0	2	1	5	0	0	1	20
S_r	0	1	2	1	1	0	0	10
Z	1	$-1 - M$	$-2 - M$	$-3 - M$	0	0	0	$-M$
R_1	0	1	2	3	0	1	0	15
R_r	0	2	1	(5)	0	0	1	20
S_r	0	1	2	1	1	0	0	10
Z	1	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}M$	$-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}M$	$-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}M$	0	0	$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}M$	$13 - 3M$
R_1	0	$-\frac{1}{5}$	($\frac{1}{5}$)		0	0	1	$\frac{3}{5}$
X_r	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$		1	0	0	4
S_r	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$		0	1	0	6
Z	1	0	0	0	0	$M+1$	M	15
X_r	0	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{15}{7}$
X_r	0	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{25}{7}$
S_r	0	$\frac{5}{7}$	0	0	1	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}$

تابلوی سوم نشان دهنده بهینگی مساله است . (عناصر سطر صفر نامنفی هستند) چون متغیرهای تصنیعی در جواب بهینه حضور ندارند ، لذا مساله اصلی دارای جواب بهینه متناهی است .

این جواب عبارت است از :

$$x_1 = 0 , \quad x_r = \frac{1\Delta}{V} , \quad x_p = \frac{2\Delta}{V} , \quad S_p = \frac{1\Delta}{V} , \quad Z^* = 1\Delta$$

(ب)

$$Max(-Z) = -\mu x_1 - x_r - x_p - MR_r - MR_p$$

$$\Rightarrow -Z - \mu x_1 + x_r + x_p + MR_r + MR_p = 0$$

$$x_1 - 2x_r + x_p + S_1 = 11$$

$$-\mu x_1 + x_r + 2x_p - S_p + R_p = \mu$$

$$-2x_1 + x_p + R_p = 1$$

$$x_1, x_r, x_p, S_1, S_p, R_p, R_r \geq 0$$

تمام مراحل اجرای روش سیمپلکس در جدول صفحه بعد خلاصه شده است .

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_r	x_p	S_1	S_r	R_r	R_p	سمت راست
Z	-1	-3	1	1	0	0	M	M	0
S_1	0	1	-2	1	1	0	0	0	11
R_r	0	-4	1	2	0	-1	1	0	3
R_p	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
Z	-1	$-3 + 5M$	$1 - M$	$1 - 3M$	0	M	0	0	$-4M$
S_1	0	1	-2	1	1	0	0	0	11
R_r	0	-4	1	2	0	-1	1	0	3
R_p	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
Z	-1	-1	$1 - M$	0	0	M	0	$-1 + 3M$	$-1 - M$
S_1	0	3	-2	0	1	0	0	-1	10
R_r	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
X_r	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
Z	1	-1	0	0	0	1	$-1 + M$	$1 + 5M$	-2
S_1	0	3	0	0	1	-2	2	-5	12
X_r	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
X_p	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
Z	-1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} + M$	$-\frac{2}{3} + M$	20
X_1	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	4
X_r	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
X_p	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	1

تابلوی نهایی نشان دهنده بهینگی مساله است. (عناصر سطر صفر نامنفی هستند). از طرفی در جواب بهینه متغیر تصنیعی ظاهر نشده است . پس جواب بهینه مساله اصلی متناهی است و عبارتند از :

$$x_1 = 4 , \quad x_2 = 1 , \quad x_3 = 9 , \quad S_1 = 0 , \quad S_2 = 0 , \quad Z^* = 2$$

(ج)

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 - MR_2 \Rightarrow Z - x_1 - x_2 + MR_2 = 0$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 20$$

$$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 - S_2 + R_2 = 2$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در تابلوی صفحه بعد خلاصه شده است .

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_r	S_1	S_r	S_p	R_p	سمت راست
Z	۱	-1	-1	۰	۰	۰	M	۰
S_1	۰	۳	۲	۱	۰	۰	۰	۲۰
S_r	۰	۲	۳	۰	۱	۰	۰	۲۰
R_p	۰	۱	۲	۰	۰	-1	۱	۲
Z	۱	-1-M	-1-2M	۰	۰	M	۰	-2M
S_1	۰	۳	۲	۱	۰	۰	۰	۲۰
S_r	۰	۲	۳	۰	۱	۰	۰	۲۰
R_p	۰	۱	(2)	۰	۰	-1	۱	۲
Z	۱	— $\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	— $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + M$	۱
S_1	۰	۲	۰	۱	۰	۱	-1	۱۸
S_r	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۱	($\frac{3}{2}$)	$-\frac{3}{2}$	۱۷
X_r	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰	۰	— $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱
Z	۱	— $\frac{1}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۰	M	$\frac{20}{3}$
S_1	۰	($\frac{5}{3}$)	۰	۱	— $\frac{2}{3}$	۰	۰	$\frac{20}{3}$
S_p	۰	$\frac{1}{3}$	۰	۰	$\frac{2}{3}$	۱	-1	$\frac{20}{3}$
X_r	۰	$\frac{2}{3}$	۱	۰	$-\frac{1}{3}$	۰	۰	$\frac{20}{3}$
Z	۱	۰	۰	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	M	۸
X_1	۰	۱	۰	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	۰	۰	۴
S_p	۰	۰	۰	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	۱	-1	۱۰
X_r	۰	۰	۱	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	۰	۰	۴

تابلوی چهارم نشان دهنده بهینگی مساله M بزرگ است (عناصر سطر صفر نامنفی هستند) چون در جواب بهینه متغیر تصنیعی ظاهر نشده است . پس این جواب ، جواب بهینه متناهی مساله اصلی نیز است . لذا ، جواب بهینه مساله اصلی عبارتست از :

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 4, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 10, \quad Z^* = 8$$

۹- مدل‌های زیر را با استفاده از روش سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید ؟

(ب)

$$\text{Min } Z = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

s.t :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$$

$$2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

s.t :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

پاسخ :

(الف) مساله فاز I به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\text{Min } R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\Rightarrow \text{Max}(-R) = -R_1 - R_2 - R_3$$

$$\Rightarrow -R + R_1 + R_2 + R_3 = 0$$

s.t :

$$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + R_2 = 4$$

$$2x_2 + 3x_3 + R_3 = 10$$

$$x_3 + S_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, R_3, S_4 \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس روی مساله مرحله I در جدول خلاصه شده است :

متغیرهای اساسی	R	x_1	x_r	x_p	S_r	R_1	R_r	R_p	سمت راست
R	-1	0	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	1	1	0	1	0	0	6
R_r	0	-2	1	2	0	0	1	0	4
R_p	0	0	2	3	0	0	0	1	10
S_r	0	0	0	1	1	0	0	0	2
R	-1	1	-4	-6	0	0	0	0	-20
R_1	0	1	1	1	0	1	0	0	6
R_r	0	-2	1	2	0	0	1	0	4
R_p	0	0	2	3	0	0	0	1	10
S_r	0	0	0	1	1	0	0	0	2
R	-1	1	-4	0	6	0	0	0	-8
R_1	0	1	1	0	-1	1	0	0	4
R_r	0	-2	1	0	-2	0	1	0	0
R_p	0	0	2	0	-3	0	0	1	4
X_r	0	0	0	1	1	0	0	0	2
R	-1	-7	0	0	-2	0	4	0	-8
R_1	0	3	0	0	1	1	-1	0	4
R_r	0	-2	1	0	-2	0	1	0	4
R_p	0	4	0	0	1	0	-2	1	4
X_r	0	0	0	1	1	0	0	0	2
R	-1	0	0	0	-0/25	0	0/5	1/75	-1
R_1	0	0	0	0	0/25	1	0/5	-0/75	1
X_r	0	0	1	0	-1/5	0	0	0/5	2
X_1	0	1	0	0	0/25	0	-0/5	0/25	1
X_p	0	0	0	1	1	0	0	0	2
R	-1	0	0	0/25	0	0	0/5	1/75	-0/5
R_1	0	0	0	-0/25	0	1	0/5	-0/75	0/5
X_r	0	0	1	1/5	0	0	0	0/5	5
X_1	0	1	0	-0/25	0	0	-0/5	0/25	0/5
S_r	0	0	0	1	1	0	0	0	2

تابلوی
مقدماتی

تابلوی
اول

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم

تابلوی
چهارم

تابلوی
پنجم

تابلوی فوق نشان دهنده بهینگی مساله مرحله I می‌باشد. (عناصر سطر صفر نامنفی هستند). اما در جواب بهینه متغیر مصنوعی با مقدار غیر صفر وجود دارد ($R_1 = 0 / 5$). فلذا مساله اصلی فاقد ناحیه شدنی می‌باشد.

ب) مساله مرحله I به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } R &= R_1 + R_p + R_{\mu} \Rightarrow \text{Max}(-R) = -R_1 - R_p - R_{\mu} \Rightarrow -R + R_1 + R_p + R_{\mu} = 0 \\ \text{s.t.:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_p + x_{\mu} + R_1 &= 6 \\ -2x_1 + 2x_p + 4x_{\mu} + R_p &= 8 \\ 2x_p + 3x_{\mu} + R_{\mu} &= 10 \\ x_1, x_p, x_{\mu}, R_1, R_p, R_{\mu} &\geq 0 \end{aligned}$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس روی مساله مرحله I در تابلوی زیر خلاصه شده است:

متغیرهای اساسی	R	x_1	x_p	x_{μ}	R_1	R_p	R_{μ}	سمت راست
R	-1	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	1	1	1	0	0	6
R_p	0	-2	2	4	0	1	0	8
R_{μ}	0	0	2	3	0	0	1	10
R	-1	1	-5	-8	0	0	0	-24
R_1	0	1	1	1	1	0	0	6
R_p	0	-2	2	4	0	1	0	8
R_{μ}	0	0	2	3	0	0	1	10
R	-1	-3	-1	0	0	2	0	-8
R_1	0	1/5	0/5	0	1	-0/25	0	4
X_p	0	-0/5	0/5	1	0	0/25	0	2
R_{μ}	0	1/5	0/5	0	0	-0/75	1	4
R	-1	0	0	0	2	1/5	0	0
X_1	0	1	1/3	0	2/3	1/6	0	8/3
X_p	0	0	2/3	1	1/3	1/6	0	10/3
R_{μ}	0	0	0	0	-1	-0/5	1	0

تابلوی فوق نشان دهنده بهینگی مساله مرحله I است (ضرایب سطر صفر نامنفی هستند) چون متغیر مصنوعی در جواب بهینه دارای مقدار صفر است جواب بدست آمده یک جواب شدنی برای مساله مرحله II است.

تابلوی مقدماتی مرحله II را حل می کنیم و روش سیمپلکس را ادامه می دهیم:
مساله مرحله II

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \Rightarrow \text{Max}(-Z) &= x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \Rightarrow -Z - x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	سمت راست
Z	-1	-1	2	-1	0
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{8}{3}$
X_2	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{10}{3}$
Z	-1	0	3	0	6
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{8}{3}$
X_2	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{10}{3}$

تابلوی مقدماتی

تابلوی بهینه

تابلوی فوق نشان دهنده بهینگی مساله مرحله II است. لذا جواب بهینه عبارتست از:

$$x_1 = \frac{8}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{10}{3}, \quad -Z^* = 6 \Rightarrow Z^* = -6$$

۱۰- مدل‌های برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید. (روش هندسی و سیمپلکس) و نوع خاص آنها را مشخص کنید؟

(ب)

(الف)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

s.t :

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 9x_2$$

s.t :

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(د)

(ج)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 14x_2$$

s.t :

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$

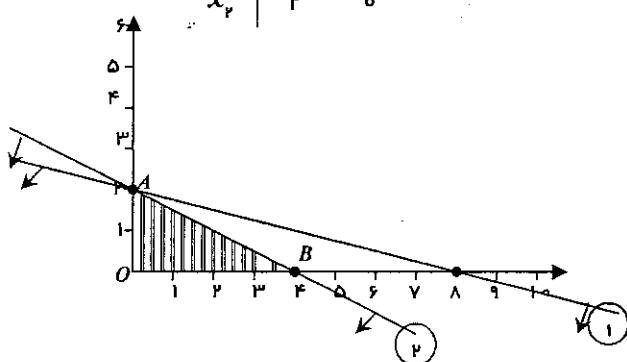
$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ : 

(الف) ناحیه شدنی به صورت زیر است :

$$1: \quad x_1 + 4x_2 = 10 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 0 & 10 \\ x_2 & 10 & 0 \end{array}$$

$$2: \quad x_1 + 2x_2 = 40 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 0 & 40 \\ x_2 & 40 & 0 \end{array}$$



برای حل مساله به روش سیمپلکس، ابتدا آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 \Rightarrow Z - 3x_1 - 9x_2 = 0$$

s.t :

$$x_1 + 4x_2 + S_1 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر خلاصه شده است:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	سمت راست
Z	1	-3	-9	0	0	0
S_1	0	1	4	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4
Z	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
X_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
S_2	0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
Z	0	0	0	3	$\frac{3}{2}$	18
X_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
X_1	0	1	0	-1	2	0

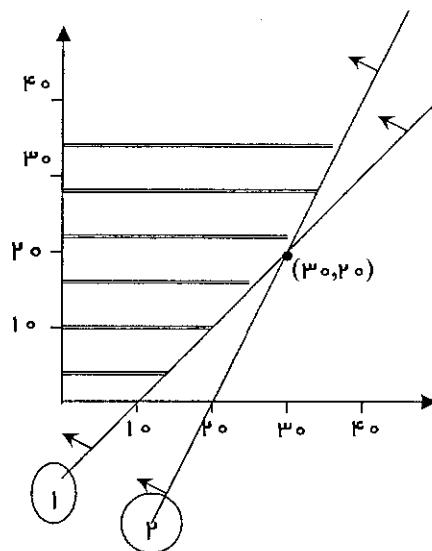
با توجه به اینکه در جواب بهینه متغیر اساسی x_2 دارای مقدار صفر است، لذا مساله از نوع تبیهگن است.

ب) ناحیه شدنی به صورت زیر است:

$$1: x_1 - x_2 = 10 \quad : \quad \begin{array}{c|cc} x_1 & 10 & 20 \\ \hline x_2 & 0 & 10 \end{array}$$

$$M: \begin{array}{l} 2x_1 - x_r = 40 \\ \Rightarrow \end{array}$$

x_1	20	30
x_r	0	20



برای اجرای الگوریتم سیمپلکس ابتدا مساله را به حالت استاندارد درمی‌آوریم:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_r \Rightarrow Z - 2x_1 - x_r$$

s.t :

$$x_1 - x_r + S_1 = 10$$

$$2x_1 - x_r + S_r = 40$$

$$x_1, x_r, S_1, S_r \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر خلاصه شده است :

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_r	S_1	S_r	سمت راست	
Z	۱	-۲	-۱	۰	۰	۰	تابلوی اول
	۰	۱	-۱	۱	۰	۱۰	
	۰	۲	-۱	۰	۱	۴۰	
X_1	۱	۰	-۳	۲	۰	۲۰	تابلوی دوم
	۰	۱	-۱	۱	۰	۱۰	
	۰	۰	۱	-۲	۱	۲۰	
X_r	۱	۰	۰	-۴	۳	۸۰	تابلوی سوم
	۰	۱	۰	-۱	۱	۳۰	
	۰	۰	۱	-۲	۱	۲۰	

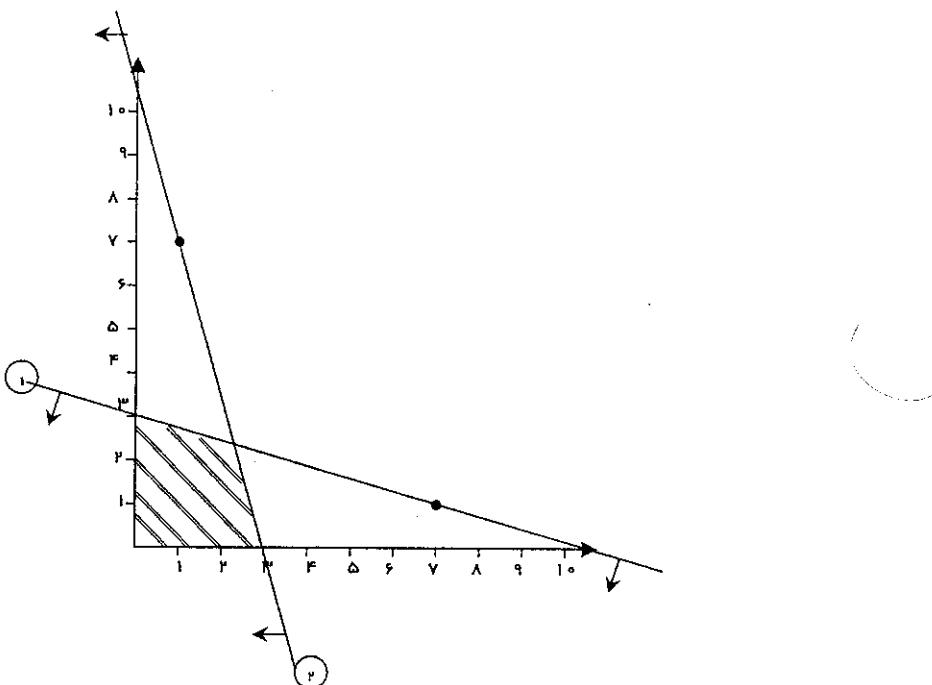
در تابلوی سوم x_r متغیر واردشونده است ، اما در ستون لولا هیچ درایه‌ای مثبت نیست لذا نمی‌توان متغیر خارج شونده را مشخص کرد. درنتیجه مساله دارای جواب بیکران است این امر از روی نمودار نیز مشخص است .

(ج)

ناحیه شدنی به صورت زیر است :

$$1: 2x_1 + 7x_r = 21 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 7 \\ \hline x_r & 3 & 1 \end{array}$$

$$2: 7x_1 + 2x_r = 21 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & 3 & 1 \\ \hline x_r & 0 & 7 \end{array}$$



برای اجرای الگوریتم سیمپلکس ابتدا مساله را به حالت استاندارد درمی‌آوریم :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 14x_2 \Rightarrow Z - 4x_1 - 14x_2$$

s.t :

$$2x_1 + 4x_2 + S_1 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 + S_2 = 12$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر خلاصه شده است:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_r	S_1	S_r	سمت راست
Z	1	-۴	-۱۴	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۷	۱	۰	۲۱
S_r	۰	۷	۲	۰	۱	۲۱
Z	1	۰	۰	۲	۰	۴۲
X_r	۰	$\frac{۲}{۷}$	۱	$\frac{۱}{۷}$	۰	۳
S_r	۰	$\frac{۴۵}{۷}$	۰	$-\frac{۲}{۷}$	۱	۱۵

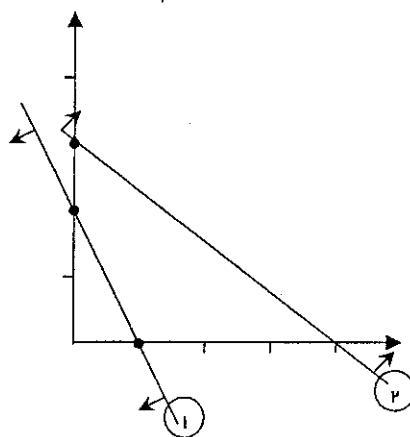
تابلوی اول

تابلوی بهینه

تابلوی دوم نشان دهنده بهینگی است . متغیر غیر اساسی x_1 در سطر صفر دارای مقدار صفر است . بنابراین مساله دارای بهینه چندگانه است .
۵) مساله قادر ناچیه شدنی است .

$$1: 2x_1 + x_r = ۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & ۰ & 1 \\ \hline x_r & ۲ & ۰ \end{array}$$

$$2: ۳x_1 + ۴x_r = ۱۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x_1 & ۰ & ۴ \\ \hline x_r & ۳ & ۰ \end{array}$$



توجه: فصل مشترک دو محدودیت را باید در ربع اول جستجو کنیم زیرا محدودیتهای $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ را داریم.

برای حل مساله به روش سیمپلکس داریم:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 - MR_p \Rightarrow Z - 3x_1 - 3x_2 + MR_p = 0$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 - S_2 + R_p = 12$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_p \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر خلاصه شده است.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_p	سمت راست
Z	1	-3	-3	0	0	M	0
S_1	0	2	1	1	0	0	2
R_p	0	3	4	0	-1	1	12
Z	1	-3-3M	-3-4M	0	M	0	-12M
S_1	0	2	1	1	0	0	2
R_p	0	3	4	0	-1	1	12
Z	0	3+5M	0	3+4M	M	0	6-4M
X_p	0	2	1	1	0	0	2
R_p	0	-5	0	-4	-1	1	4

تابلوی
مقدماتی

تابلوی
اول

تابلوی
بهینه

در جدول بهینه چون متغیر مصنوعی R_p دارای مقدار ناصفر است لذا مساله نشدنی است.

نمونه سوالات پایان ترم فصل چهارم

سؤالات تستی

- ۱- اضافه کردن متغیر مصنوعی (R) به محدودیت مؤثر، چه تأثیری بر منطقه موجه می‌گذارد؟
- (الف) آن را کوچکتر میکند.
 - (ب) آن را بزرگتر میکند.
 - (ج) بستگی به تابع هدف دارد.
 - (د) هیچ تأثیری نمی‌گذارد.

پاسخ :

گزینه ب

- ۲- هرگاه در جدول بهینه سیمپلکس یک متغیر مصنوعی با مقدار غیر صفر وجود داشته باشد، آن مسئله کدام حالت خاص را دارد؟

- (الف) بهینه چندگانه
- (ب) تبهگن دائم
- (ج) ناحیه موجه بیکران
- (د) فاقد ناحیه موجه

پاسخ :

گزینه د

- ۳- علامت مشخصه یک مدل LP که دارای حالت خاص تبهگن است و به روش سیمپلکس حل شده است این است که در جدول نهایی سیمپلکس :

- (الف) حداقل ضریب یک متغیر غیر اساسی در سطر تابع هدف صفر است.
- (ب) متغیر ورودی قابل تعریف است و متغیر خروجی قابل تعریف نیست.
- (ج) حداقل یکی از متغیرهای اساسی صفر است.
- (د) یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر به عنوان متغیر اساسی وجود دارد.

پاسخ :

گزینه ج

- ۴- در تابلوی نهایی سیمپلکس مربوط به یک مدل LP امکان انتخاب متغیر ورودی وجود دارد، اما متغیر خروجی قابل تعریف نیست.

- (الف) تبهگن
- (ب) بهینه چندگانه
- (ج) فاقد ناحیه موجه
- (د) ناحیه جواب بیکران

پاسخ :

گزینه د

۵-تابع هدف مرحله I مدل زیر در روش دو مرحله‌ای کدام است؟

$$\text{Max } z = 5x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } R_s = R_1 + R_2 + R_3 \quad (\text{ب})$$

$$\text{Min } R_s = R_1 + R_2 \quad (\text{د})$$

$$\text{Min } R_s = R_1 \quad (\text{الف})$$

$$\text{Max } R_s = R_1 + R_2 + R_3 \quad (\text{ج})$$

پاسخ :

گزینه د

ابندا مسئله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\text{Min } z = 5x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + 5x_2 - S_1 + R_1 = 15$$

$$x_1 + x_2 + R_2 = 5$$

$$5x_1 + 4x_2 + S_3 = 10$$

$$x_1, x_2, R_1, R_2, S_1, S_3 \geq 0$$

بنابراین تابع هدف مرحله I به صورت $\text{Min } R_s = R_1 + R_2$ می‌باشد.

۶- شروع روش سیمپلکس همواره از :

ب) مبدأ مختصات است.

الف) یک گوشة غیر موجه است.

د) یک جواب موجه غیر گوشه‌ای است.

ج) یک جواب موجه گوشه‌ای است.

پاسخ :

گزینه ب

- ۷- در یک مدل LP متغیر x آزاد در علامت است. برای وارد کردن این متغیر در جدول سیمپلکس باید آن را:
- ب) به $x'' - x' = x$ تغییر داد.
 - الف) به $x'' + x' = x$ تغییر داد.
 - ج) حذف کرد.
 - د) مستقیماً وارد جدول کرد.

پاسخ :

گزینه ب

- ۸- اگر در تابلوی بهینه سیمپلکس مدل دارای مقدار صفر برای یک متغیر غیر اساسی در سطر z باشد، آن مدل حتماً دارای حالت خاص..... است.
- ب) تبهگن موقت
 - الف) تبهگن دائم
 - ج) فاقد ناحیه جواب
 - د) بهینه چندگانه

پاسخ :

گزینه د

- ۹- تعداد تکرارهای سیمپلکس در روش M بزرگ در مقایسه با روش سیمپلکس دو مرحله‌ای همواره:
- د) کمتر است.
 - ب) برابر است.
 - ج) بیشتر است.
 - الف) متفاوت است.

پاسخ :

گزینه ج

- ۱۰- در روش دو مرحله‌ای برای حل یک مدل LP شرط اتمام مرحله اول:
- الف) بهینه شدن جدول آخر در مرحله اول است.
 - ب) منفی شدن ضرایب سطر R است.
 - ج) غیر منفی شدن ضرایب سطر R و مساوی صفر شدن R است.
 - د) غیر منفی شدن ضرایب R در مرحله اول است.

پاسخ :

گزینه ج

مسئلات تشریعی

۱- مدل LP زیر را به روش M بزرگ حل کنید:

$$\text{Min } z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

$$x_1 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \leq 4$$

 پاسخ :

چون متغیرهای x_1, x_2 آزاد در علامت هستند، ابتدا با تغییر متغیر :

$$x_1 = x'_1 - x''_1 \quad , \quad x_2 = x'_2 - x''_2$$

مدل را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{Min } z = \frac{1}{2}x'_1 - \frac{1}{2}x''_1 + x'_2 - x''_2$$

$$x'_1 - x''_1 \leq 2$$

$$2x'_1 - 2x''_1 + x'_2 - x''_2 \geq 4$$

$$x'_2 - x''_2 \leq 4$$

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2 \geq 0$$

با افزودن متغیرهای کمکی و تصنیعی مدل LP روش M بزرگ به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max } -z = -\frac{1}{2}x'_1 + \frac{1}{2}x''_1 - x'_2 + x''_2 - MR_p \Rightarrow -z + \frac{1}{2}x'_1 - \frac{1}{2}x''_1 + x'_2 - x''_2 + MR_p$$

$$x'_1 - x''_1 + S_1 = 2$$

$$2x'_1 - 2x''_1 + x'_2 - x''_2 - S_p + R_p = 4$$

$$x'_2 - x''_2 + S_p = 4$$

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, S_1, S_p, R_p \geq 0$$

تمام مراحل سیمپلکس در جدول خلاصه شده است.

متغیرهای اساسی	Z	x'_1	x''_1	x'_r	x''_r	S_1	S_r	S_{rp}	R_r	سمت راست
Z	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	0	0	0	M	0
S_1	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	۲
R_r	0	۲	-۲	1	-1	0	-1	0	1	۴
S_r	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	۴
Z	-1	$\frac{1}{2} - \gamma M$	$-\frac{1}{2} + \gamma M$	$1 - M$	$-1 + M$	0	M	0	0	$-\frac{1}{2}M$
S_1	0	(1)	-1	0	0	1	0	0	0	۲
R_r	0	۲	-۲	1	-1	0	-1	0	1	۴
S_r	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	۴
Z	-1	0	0	$1 - M$	$-1 + M$	$-\frac{1}{2} + \gamma M$	M	0	0	-1
x'_1	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	۲
R_r	0	0	0	(1)	-1	-۲	-1	0	1	۰
S_r	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	۴
Z	-1	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	1	0	0	-1
x'_1	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	۲
x'_r	0	0	0	1	-1	-۲	-1	0	1	۰
S_r	0	0	0	0	0	۲	1	1	-1	۴

جدول فوق، تابلوی بهینه را نشان می‌دهد. بنابراین جواب بهینه عبارتست از:

$$-Z = -1 \Rightarrow Z = 1$$

$$x'_1 = 1, x''_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x'_r = 0, x''_r = 0 \Rightarrow x_r = 0$$

$$S_1 = 0, S_r = 0, S_{rp} = 4$$

-۲- مدل LP زیر را در نظر بگیرید. جدول مقدماتی و اول آن را به روش سیمپلکس M بزرگ بنویسید: (تالبوا اول و دوم)

$$\text{Min } z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

با افزودن متغیرهای کمکی و تصنیعی خواهیم داشت:

$$\text{Max} - Z = -5x_1 - 3x_2 - MR_1 - MR_2 \Rightarrow -Z + 5x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2 = 0$$

s.t

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

تمام مراحل در جدول زیر خلاصه شده است.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	سمت راست
Z	-1	5	4	0	0	M	M	0
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24
Z	-1	5 - 5M	4 - 8M	M	M	0	0	$-40M$
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24
Z	-1	$3 - 2M$	0	$1 - M$	M	$-1 + 2M$	0	$-4 - 3M$
X_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1
R_2	0	2	0	-1	-1	-1	1	8

فصل پنجم : برنامه‌ریزی خطی (تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس و مساله ثانویه)

تابلوی بدست آمده از روش سیمپلکس ، دارای اطلاعات مفیدی است که در این بخش اختصاصاً به تحلیل هر یک از عناصر آن در قالب یک مساله تولیدی می‌پردازیم. برای تحلیل عناصر جدول سیمپلکس از روی جدول باید به ستون مورد نظر و متغیر معرف ستون (متغیر وارد شونده) و نیز متغیر معرف سطر (متغیر خارج شونده) و شماره سطر توجه داشت .

مقدار a در سطری که متغیر اساسی آن متغیر کمکی می‌باشد ، را در نظر می‌گیریم . فرض کنیم عدد a در ستون مربوط به متغیر x_r ، در سطر مربوط به متغیر کمکی S_r باشد. مقدار مثبت a بیانگر آنست که به ازای تولید یک واحد از محصول x_r ، a واحد از منبع r (مربوط به متغیر کمکی S_r) مصرف می‌شود . مقدار منفی a بیانگر آنست که به ازای تولید هر واحد از محصول x_r ، a واحد به منبع r افزوده می‌شود (بدلیل کاهش تولید برخی از محصولات دیگر)

اگر a در سطری که متغیر اساسی آن متغیر تصمیم مانند x_k است باشد ، مقدار مثبت a بیانگر آنست که به ازای هر واحد تولید محصول x_r ، a واحد از تولید محصول x_k کم می‌شود . به همین ترتیب مقدار منفی a بیانگر آنست که به ازای هر واحد تولید محصول x_r ، a واحد به تولید محصول x_k افزوده می‌شود .

مفهوم قیمت سایه‌ای

قیمت سایه‌ای ، عبارتست از ارزش نهایی منابع به کار رفته در تولید . قیمت سایه‌ای منبع $-i$ -ام را با \bar{Z}_i نمایش می‌دهند و مبنی آنگه افزایش Z در اثر افزایش یک واحد به این منبع (b_i) است . با توجه به قیمت سایه‌ای می‌توان دریافت که چنانچه یک واحد به منبع $-i$ -ام افزوده شود چه مقدار سود کل افزایش می‌یابد . (یا هزینه چقدر کاهش می‌یابد.)

روش استخراج قیمت سایه‌ای برای مدل‌های از نوع Max

الف) اگر محدودیت از نوع کوچکتر مساوی (\leq) باشد آنگاه ضریب متغیر کمکی (منبع مربوطه) در سطر Z قیمت سایه‌ای منبع مورد نظر است .

ب) اگر محدودیت از نوع بزرگتر مساوی (\geq) باشد ، آنگاه ضریب متغیر تصنیعی در سطر Z را ملاک عمل قرار می‌دهیم به طوریکه مقدار M حذف شده و قدر مطلق عدد بجای مانده قیمت سایه‌ای منبع مربوطه است .

مساله ثانویه

برنامه ثانویه یک مساله عبارتست از یک برنامه خطی به منظور یافتن ارزش‌هایی (قیمت سایه‌ای) که ملاک ارزیابی منابع مورد استفاده قرار می‌گیرند . ارزش واقعی منابع باید به نحوی تعیین شوند که مجموع ارزش نسبت داده شده به هزینه استفاده از منابع (یا هزینه تولید) حداقل گردد . برنامه ثانویه یک مساله ، وسیله‌ای است که جهت ارزش‌یابی منابع مورد استفاده برای تولید (یا مصرف) در مقابل راه حل‌های دیگر در بکارگیری آن منابع (مثلاً فروش آنها) .

قاعده کلی برای نوشتن مساله ثانویه برای یک مدل از نوع Max

۱- چنانچه مدل از نوع Max باشد ، مساله ثانویه آن باید از نوع Min باشد .

۲- برای هر محدودیت مدل یک متغیر ، لا برای مساله ثانویه تعریف می‌شود .

۳- عناصر سمت راست محدودیت $-i$ -ام مدل (b_i) ضریب \bar{Z}_i در تابع هدف است .

۴- ضریب a_{ij} در مدل ، متناظر با a_{ij} در مساله ثانویه است .

- ۵- ارزش‌های c_i (ضرایب تابع هدف مدل) سمت راست محدودیت‌های مساله ثانویه را تشکیل می‌دهند.
- ۶- اگر محدودیت i -ام مدل از نوع کوچکتر مساوی (\leq) باشد، آنگاه متغیر x_i در مساله ثانویه نامنفی ($x_i \geq 0$) است.
- ۷- اگر محدودیت i -ام در مدل به صورت تساوی ($=$) باشد، آنگاه متغیر x_i در مساله ثانویه به صورت آزاد در علامت است.
- ۸- اگر x_i در مدل به صورت $x_i \geq 0$ باشد، آنگاه محدودیت i -ام در مساله ثانویه به صورت بزرگتر مساوی (\geq) است.
- ۹- اگر متغیر x_i آزاد در علامت باشد، آنگاه محدودیت i -ام در مساله ثانویه به صورت تساوی ($=$) است.

در حالتی که مدل به صورت استاندارد باشد داریم :

مدل اصلی

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

s.t

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \rightarrow y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \rightarrow y_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \rightarrow y_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$



مساله ثانویه

$$\begin{aligned} \text{Min } Y &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \\ a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m &\geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m &\geq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m &\geq c_n \\ y_1, y_2, \dots, y_m &\geq 0 \end{aligned}$$

قاعده کلی برای نوشتن مساله ثانویه برای یک مدل از نوع Min

۱- چنانچه تابع هدف مدل از نوع Min باشد ، تابع هدف مساله ثانویه از نوع Max است.

قاعده ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ مانند قبلی است .

۶- اگر محدودیت i -ام مدل از نوع بزرگتر مساوی باشد ، آنگاه y_i در مساله ثانویه نامنفی ($y_i \geq 0$) است .

۷- اگر محدودیت i -ام در مدل از نوع مساوی ($=$) باشد ، آنگاه y_i در مساله ثانویه آزاد در علامت است .

۸- اگر x_i در مدل اصلی به صورت $x_i \geq 0$ باشد ، آنگاه محدودیت i -ام در مساله ثانویه به صورت کوچکتر مساوی (\leq) است .

۹- اگر x_i در مدل اصلی آزاد در علامت باشد ، آنگاه محدودیت i -ام در مساله ثانویه به صورت تساوی ($=$) است .

در حالتی که مدل به صورت استاندارد باشد، داریم:

مدل اصلی

$$\text{Min } Z = c_1 x_1 + c_p x_p + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{1p} x_p + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \rightarrow y_1$$

$$a_{p1} x_1 + a_{pp} x_p + \dots + a_{pn} x_n \geq b_p \rightarrow y_p$$

⋮

$$a_{m1} x_1 + a_{mp} x_p + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \rightarrow y_m$$

$$x_1, x_p, \dots, x_n \geq 0$$

مساله ثانویه

$$\text{Max } Y = b_1 y_1 + b_p y_p + \dots + b_m y_m$$

$$a_{11} y_1 + a_{1p} y_p + \dots + a_{1n} y_m \leq c_1$$

$$a_{p1} y_1 + a_{pp} y_p + \dots + a_{pn} y_m \leq c_p$$

⋮

$$a_{m1} y_1 + a_{mp} y_p + \dots + a_{mn} y_m \leq c_n$$

$$y_1, y_p, \dots, y_m \geq 0$$

روابط بین مساله اولیه و ثانویه

قضیه ۱: ثانویه مساله ثانویه، مساله اولیه است.

قضیه ۲: چنانچه (x_1, x_p, \dots, x_n) یک جواب موجه مساله اولیه (از نوع Max)

و (y_1, y_p, \dots, y_m) یک جواب موجه مساله ثانویه باشد، در این صورت داریم:

$$Z_0 \leq y_0 \Rightarrow c_1 x_1 + c_p x_p + \dots + c_n x_n \leq b_1 y_1 + b_p y_p + \dots + b_m y_m$$

قضیه ۳: (ثبوت) چنانچه $(x_1^*, x_p^*, \dots, x_n^*)$ و $(y_1^*, y_p^*, \dots, y_m^*)$ به ترتیب جوابهای بهینه

مساله اولیه و ثانویه باشند در این صورت داریم:

$$c_1 x_1^* + c_p x_p^* + \dots + c_n x_n^* = b_1 y_1^* + b_p y_p^* + \dots + b_m y_m^*$$

$Z^* = y^*$ یعنی

قضیه ۴: هر جواب اساسی در مساله اولیه دارای یک جواب اساسی مکمل در مساله ثانویه است که بین متغیرهای آنها یک رابطه لنگی مکمل وجود دارد:

متغیر ثانویه مربوط	متغیر اولیه
$y =$ متغیر تصمیم	$s =$ متغیر کمکی
$t =$ متغیر کمکی	$x =$ متغیر تصمیم

همواره دو جواب بهینه داریم:

$$tx = 0, \quad ys = 0$$

با توجه به قضایای فوق نتایج مهم زیر در مورد روابط مسائل اولیه و ثانویه حاصل می شود:

الف) اگر مساله اولیه و ثانویه هر دو شدنی باشند، آنگاه هر دو دارای جواب بهینه متناهی هستند و مقدار تابع هدف بهینه آنها مساوی است.

ب) اگر مساله اولیه نشدنی باشد، آنگاه مساله ثانویه یا نشدنی است و یا دارای جواب بیکران است.

پ) اگر مساله اولیه دارای جواب بیکران بدون گوش بهینه باشد، آنگاه مساله ثانویه نشدنی است.

روش سیمپلکس ثانویه

فرض کنید برای مساله اولیه برنامه ریزی خطی، امکان تشکیل اولیه نقطه موجه (مبدأ مختصات) با اضافه کردن متغیرهای کمبود(S) وجود نداشته باشد، اما در صورت نوشتن مساله ثانویه برای مدل بتوان از مبدأ مختصات آغاز کرد. بنابراین بجای استفاده از متغیر تصنیعی (مصنوعی) در برنامه اولیه مساله، ابتدا مساله ثانویه را نوشت و سپس از طریق

سیمپلکس عادی به حل مساله ثانویه می‌پردازیم . اما می‌توان به جای استفاده از مساله ثانویه در حل مساله ، آن را به حالت اولیه حفظ کرده و عیناً عملیاتی را مشابه با آنچه در انتقالات مساله ثانویه انجام می‌گردد ، در این حالت برای مساله اولیه انجام داد . روش حل مساله اولیه بر اساس منطق مساله ثانویه به روش «سیمپلکس ثانویه» معروف است که توسط لیمک برای اولین بار معرفی شد .

مراحل استفاده از روش سیمپلکس ثانویه به شرح زیر است :

مرحله ۱ : مساله را به فرم استاندارد سیمپلکس ثانویه تبدیل کنید . مساله استاندارد سیمپلکس ثانویه یک مساله Max است که تمام محدودیت‌های آن کوچکتر مساوی (\leq) خواهد بود و تمام متغیرهای تصمیم در تابع هدف دارای ضریب غیرمثبت خواهد بود ($c_j \leq 0$)

مرحله ۲ : یک جواب اساسی اولیه را که بهینه ولی غیرموجه است ، انتخاب کنید و تابلوی اول سیمپلکس را تهیه کنید . بر اساس شکل استاندارد ، جواب اولیه با متغیرهای کمکی (S) تعریف می‌شود و حتماً مبدأ مختصات است .

مرحله ۳ : منفی ترین مقدار سمت راست (b_i) را به عنوان سطر لولا انتخاب کنید . متغیر مربوط به سطر لولا را متغیر خروجی می‌نامند . به مرحله ۴ بروید . در صورتی که تمام اعداد سمت راست دارای مقدار غیرمنفی باشند ، جواب اساسی موجه و بهینه است . پس توقف کنید .

مرحله ۴ : برای انتخاب متغیر ورودی از حداقل حاصل تقسیم عناصر سطر Z به قدر مطلق عناصر منفی سطر لولا استفاده کنید . عنصر لولا حتماً یک عدد منفی است . اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد ، مساله اولیه فاقد ناحیه موجه است .

مرحله ۵ : عملیات ردیفی روش سیمپلکس را به طور معمول انجام دهید تا به تابلوی جدید برسید . سپس به مرحله ۳ بروید .

مسائل فصل پنجم

سئوالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای (صفحه ایانا کتاب درسی)

- ۱- در تحلیل اقتصادی عناصر تابلوی سیمپلکس مقدار منفی ذیل ستون متغیر کمکی و سطر متغیر تصمیم به معنی در آن متغیر تصمیم است .

پاسخ :

افزایش

- ۲- در تحلیل اقتصادی عناصر تابلوی سیمپلکس مقدار مثبت ذیل ستون متغیر تصمیم و سطر متغیر تصمیم به معنی در آن متغیر تصمیم است .

پاسخ :

کاهش

- ۳- هر مساله اولیه دارای یک مساله است .

پاسخ :

ثانویه

- ۴- سمت چپ هر محدودیت ثانویه به معنای ارزش واقعی منابع به کار رفته در یک واحد متغیر است .

پاسخ :

تصمیم

- ۵- محدودیتی که تاثیری در ایجاد منطقه موجه نداشته باشد و وجود یا عدم وجود آن موجب تغییر در ناحیه موجه نگردد ، محدودیت نامیده می شود .

پاسخ :

زاید

- ۶- هرگاه در مساله اولیه یک متغیر آزاد در علامت وجود داشته باشد ، محدودیت متناظر به آن در مساله ثانویه به صورت تعریف می شود .

پاسخ :

مساوی

۷- هر محدودیت در مساله اولیه دارای یک متناظر در مساله ثانویه است .

☞ پاسخ :

متغیر

۸- در روش سیمپلکس ثانویه عنصر لولا همواره است .

☞ پاسخ :

منفی

۹- در تابلوی بهینه مساله اولیه همواره مقدار تابع هدف مقدار تابع هدف مساله ثانویه در تابلوی بهینه آن است .

☞ پاسخ :

مساوی

۱۰- متغیر کمکی مساله ثانویه متناظر با متغیر مساله اولیه است .

☞ پاسخ :

تصمیم

۱۱- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

s.t :

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_3 \geq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مساله ثانویه آن دارای چند محدودیت است ؟

۴(۵)

۲(ج)

۳(ب)

۱(الف)

☞ پاسخ :

گزینه ب- به ازای هر متغیر مساله اولیه ، یک محدودیت در مساله ثانویه وجود دارد .
به ازای هر محدودیت مساله اولیه ، یک متغیر اساسی در مساله ثانویه وجود دارد .
درنتیجه با توجه به اینکه مساله اولیه دارای سه متغیر است نتیجه می‌شود که مساله ثانویه دارای سه محدودیت می‌باشد .

۱۲- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Min } Z = 5x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

s.t :

$$x_1 + x_2 = 20$$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 \geq 10$$

$$x_1 - x_3 = 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

آزاد در علامت x_3

مساله ثانویه آن دارای چند متغیر آزاد در علامت است ؟

۴) ۵

۱) ۳

ب) ۳

الف) ۲

پاسخ :

گزینه الف - هر محدودیت مساله اولیه که به شکل تساوی باشد ، متغیر نظیر آن در مساله ثانویه آزاد در علامت خواهد بود . درنتیجه چون مساله اولیه دارای دو محدودیت به شکل تساوی است . مساله ثانویه نیز دارای دو متغیر آزاد در علامت خواهد بود .

۱۳- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 14x_3$$

s.t :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جواب مساله اولیه $(x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = \frac{8}{5}, x_3 = 0)$ است . اگر گوشة متناظر ثانویه آن

$y_1 = \frac{29}{5}, y_2 = -\frac{2}{5}$ باشد . جواب تعریف شده مساله اولیه چه نوعی گوشه‌ای است ؟

۵) بهینه

ج) بهتر از گوشة بهینه

ب) مجاور گوشة بهینه

الف) غیرموجه

پاسخ :

گزینه ۵ -

تابع هدف مساله ثانویه به صورت زیر است :

$$Miny = 5y_1 + 2y_2$$

به ازای مقادیر داده شده داریم :

$$Z = 5\left(\frac{9}{5}\right) + 12\left(\frac{1}{5}\right) + 4(0) = \frac{141}{5}$$

$$y = 5\left(\frac{39}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{141}{5}$$

چون مقادیر تابع هدف اولیه و ثانویه در نقطه فوق مساوی هستند، پس گوشه داده شده گوشه بهینه می باشد .

۱۴- اگر در جواب بهینه مساله اولیه $x^* = 3$ باشد ، مقدار متغیر کمکی محدودیت معادل آن در مساله ثانویه ، چقدر خواهد بود ؟

- الف) بزرگتر از صفر ب) مساوی صفر ج) بزرگتر یا مساوی صفر د) مساوی ۳

پاسخ :

گزینه ب - با توجه به قضیه لنگی مکمل ، چون $x^* = 3$ (بزرگتر از صفر است) پس متغیر کمکی نظیر آن در مساله ثانویه دارای مقدار صفر است .

۱۵- ضریب S_i در ردیف Z تابلوی بهینه سیمپلکس مساوی ۱۰ است . متغیر متناظر آن در مساله ثانویه :

- الف) یک متغیر غیراساسی است .
ب) دارای مقدار صفر است .
ج) یک متغیر اساسی است .
د) آزاد در علامت است .

پاسخ :

گزینه ج - چون ضریب S_i در سطر Z مساوی ۱۰ است . پس S_i متغیر غیراساسی است . لذا متغیر نظیر آن در مساله ثانویه ، یک متغیر اساسی است .

۱۶- در روش سیمپلکس ثانویه ، سطر خروجی عبارت است از :

- الف) کوچکترین حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر ستون لولا
ب) کوچکترین مقدار مثبت
ج) منفی ترین مقدار سمت راست
د) بزرگترین مقدار منفی

پاسخ :

گزینه ج

۱۷- در روش سیمپلکس ثانویه انتخاب متغیر ورودی چگونه انجام می‌گیرد؟

الف) منفی ترین عنصر ردیف Z در تابلوی سیمپلکس

ب) بزرگترین مقدار مثبت ردیف Z در تابلوی سیمپلکس

ج) کوچکترین حاصل تقسیم عناصر ردیف Z تابلوی سیمپلکس بر عناصر مثبت سطر لولا

د) کوچکترین حاصل تقسیم عناصر ردیف Z تابلوی سیمپلکس بر قدر مطلق عناصر منفی سطر لولا

پاسخ :

گزینه د

۱۸- مساله زیر را در نظر بگیرید : تعداد متغیرها و محدودیتهای مساله ثانویه آن به ترتیب از راست

به چه کدام است؟

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

s.t

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(۱) و (۲)

ج) (۳) و (۴)

ب) (۲) و (۳)

الف) (۳) و (۴)

پاسخ :

گزینه ب - با توجه به توضیحات تمرین ۱۱ ، مساله ثانویه دارای سه محدودیت و دو متغیر می‌باشد .

۱۹- در صورتی که Z مقدارتابع هدف یک مساله حداکثرسازی با محدودیتهای کوچکتر مساوی باشد و \neq مقدارتابع هدف مساله ثانویه آن ، آنگاه :

$$Z > y$$

$$Z \geq y$$

$$Z \leq y$$

$$Z = y$$

پاسخ :

گزینه ب

- ۲۰- در یک تابلوی سیمپلکس شرط بهینگی برقرار است و در سمت راست تابلو برای متغیرهای اساسی مقدار منفی وجود دارد . جواب اساسی بدست آمده :
- الف) بهینه است .
 - ب) غیرموجه است .
 - ج) موجه است .
 - د) در کلیه محدودیتهای مدل صدق می‌کند.

پاسخ :

گزینه ب - اگر مقادیر سمت راست منفی باشند جواب غیرموجه است . بنابراین باید مساله را با حفظ بهینگی ، به سمت فضای موجه تا رسیدن به اولین جواب اساسی موجه سوق دهیم (روش سیمپلکس ثانویه)

۲۱- در صورتی که \neq نشان دهنده ، مقدار تابع هدف ثانویه مساله زیر باشد ، مقدار آن برابر است با

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۸(۵)

ج

۴(۶)

الف) صفر

پاسخ :

گزینه الف

$$\text{مساله اولیه : } \text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

عناصر سمت راست محدودیتها در مساله اولیه ، ضرایب متغیرهای ثانویه در تابع هدف می‌باشد . عناصر سمت راست محدودیتها در مساله اولیه صفر است . بنابراین ضرایب

متغیرهای ثانویه در تابع هدف برابر صفر می‌شود و در نتیجه مقدار تابع هدف ثانویه صفر می‌باشد.

۲۲- قسمتی از جدول اول و نهایی (بهینه) یک مساله LP به صورت زیر داده شده است. کدام گزینه درست است؟

$$Z^* = 290 \quad (d)$$

$$Z^* = 200 \quad (c)$$

$$Z^* = 100 \quad (b)$$

$$Z^* = 250 \quad (f)$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z^*	۱						۰
S_1	۰						۴۰
S_2	۰						۵۰
Z^*	۱	۰	۰	۲	۵	۰	؟
x_3	۰						
S_1	۰						

تابلوی بهینه

پاسخ:

گزینه b - تابع هدف مساله ثانویه را می‌نویسیم چون در جدول اول مساله اولیه دو متغیر کمکی S_1, S_2 (دو محدودیت در مساله اول) داریم بنابراین مساله ثانویه دارای دو متغیر x_1, x_2 می‌باشد و مقادیر سمت راست محدودیتها در مساله اولیه ضرایب متغیرها در تابع هدف مساله ثانویه می‌باشد بنابراین تابع هدف مساله ثانویه به شکل زیر می‌باشد:

$$\text{Min } y^* = 20y_1 + 50y_2$$

ضرایب متغیرهای کمکی S_1, S_2 در سطر صفر جدول نهایی (بهینه) برابر مقدار بهینه x_1, x_2 در مساله ثانویه می‌باشد.

$S_1 = y_1 = 5$ در سطر صفر جدول بهینه

$$Z^* = y^* = 20(5) + 50(0) = 100$$

$S_2 = y_2 = 0$ در سطر صفر جدول بهینه

۲۳- تابلوی نهایی یک مساله LP به صورت زیر داده شده است . قیمت سایه‌ای منابع به ترتیب از راست به چپ کدام است ؟

(د) (۵۰)

(ج) (۸۶)

(ب) (۲۱)

(الف) (۲۱)

اساسی	Z	x_1	x_p	S_1	S_p	سمت راست
Z_o	۱	۰	۰	۱	۲	۱۱۶
x_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۸
x_p	۰	۰	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	۶

پاسخ :

گزینه الف - مقدار متغیرهای ثانویه بر اساس ضریب متغیرهای تصمیم و کمکی در سطر صفر (Z_o) تابلوی بهینه مساله اولیه تعیین می‌شوند .

۱- در سطر صفر تابلوی بهینه $S_1 = j_1 = 1$

۲- در سطر صفر تابلوی بهینه $S_p = y_p = 2$

۲۴- در صورتی که قیمت منابع مساله ۲۲ در بازار ۵۰٪ باشد . خرید کدام یک از منابع را توصیه می‌کنید ؟

الف) هر دو منبع ب) فقط منبع اول ج) فقط منبع دوم د) هیچ یک از منابع

پاسخ :

گزینه د - از منبع دوم (S_p) مقدار باقی‌مانده (چون در تابلوی بهینه متغیر اساسی گردید) و سمت راست آن صفر نیست) بنابراین خرید آن مقرر نبود . به ازاء یک واحد از منبع ۱ سود ۵ واحد زیاد می‌شود (مقدار S_p در سطر صفر جدول بهینه) قیمت خرید منبع اول $10 \times 50\% = 50$ است . بنابراین :

زیان داریم $50 - 5 = 45$

بنابراین خرید S_p نیز مقرر نبود .

۲۵- اگر یک مساله اولیه دارای دو متغیر تصمیم و سه محدودیت کارگردی باشد . تعداد گوششای مساله ثانویه آن چقدر است ؟

- ٢٠(الف) ١٢(ب) ٨(ج) ٥(د)

پاسخ:

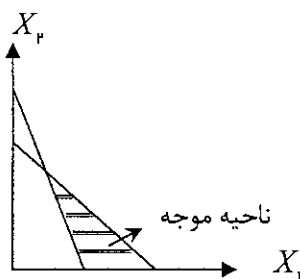
گزینہ د

$$\text{متغير تصميم} = n = 2$$

$$\text{تعداد گوشه‌ها} = \frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(m+n)!}{m! \times n!} = 10$$

$m =$ محدودیت کارکردی

۲۶- ناحیه موجه یک مساله LP با تابع هدف $\min Z = 2x_1 + 3x_2$ به شرح زیر است:



برای حل آن به کمک روش سیمپلکس از کدام روش می‌توان استفاده کرد؟

- | | |
|---|--|
| <p>ب) روش M بزرگ</p> <p>د) الف و ب و ج</p> | <p>الف) روش دو مرحله‌ای</p> <p>ج) روش سیمپلکس ثانویه</p> |
|---|--|

پاسخ :

گزینہ ۵

۲۷- مساله اولیه فاقد ناحیه موجه است . مساله ثانویه آن :

- الف) فاقد ناحیه موجه است .

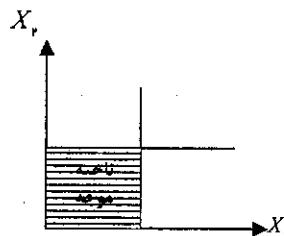
ب) دارای ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه است .

ج) دارای ناحیه موجه محدود است .

د) الف با

☞ پاسخ :

گزینه د - هرگاه مساله اولیه فاقد موجه باشد مساله ثانویه آن یا دارای ناحیه جواب بیکران بدون گوشه بهینه است یا فاقد ناحیه موجه (جواب) خواهد بود .
۲۸ - ناحیه موجه مساله اولیه به صورت زیر است .



کدام گزینه صحیح است ؟

- الف) مساله ثانویه دارای ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه است .
- ب) مساله ثانویه دارای ناحیه موجه بیکران با گوشه بهینه است .
- ج) مساله ثانویه فاقد ناحیه موجه است .
- د) مساله ثانویه دارای ناحیه موجه محدود است .

☞ پاسخ :

گزینه ب - هرگاه مساله اولیه دارای ناحیه موجه محدود باشد ، مساله ثانویه آن دارای ناحیه موجه بیکران با گوشه بهینه است .

۲۹ - تابلوی اول سیمپلکس ثانویه متناظر با چه گوشه‌ای است ؟

- الف) موجه ب) بهینه ج) مبدأ مختصات
- د) غیر از مبدا مختصات

☞ پاسخ :

گزینه ب - تابلوی سیمپلکس ثانویه متناظر با گوشه بهینه است . در سیمپلکس ثانویه با حفظ بهینگی به سوی موجه شدن پیش خواهیم رفت . به عبارت دیگر مساله ثانویه در جستجوی موجه شدن است .

-۳۰- متغیرهای اساسی جدول بهینه مساله زیر $x_1 = 45$, $x_2 = 110$, $S_y = 90$ می‌باشد. مقدار بهینه تابع هدف مساله ثانویه برابر است با :

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 10x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 = 150$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱۰۵

۲۰۰

۱۹۰۰

۶۵۰

پاسخ :

گزینه ب - قضیه ثنویت : چنانچه $(x_1^*, x_2^*, \dots, y_m^*)$, $(x_1^*, x_2^*, \dots, y_m^*)$ به ترتیب جوابهای بهینه مساله اولیه و ثانویه باشند، در این صورت رابطه‌های زیر برقرار است .

$$\sum_{j=1}^n C_j X_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \Rightarrow Z^* = y_i^*$$

$$\Rightarrow \text{Max } Z = 20x_1 + 10x_2 \xrightarrow{(x_1, x_2) = (40, 110)} Z = 20(40) + 10(110) = 1900$$

-۳۱- جواب مساله ثانویه مربوط به مدل زیر کدام است ؟

$$\text{Min } Z = 4x_1 - 7x_2 + 9x_3$$

s.t :

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_3 آزاد در علامت

ب) تبهگن موقت

الف) بهینه چندگانه

د) فاقد ناحیه موجه (بدون جواب بهینه)

ج) تبهگن غیرموقت

پاسخ :

گزینه د

مساله اولیه:

$$\text{Min } Z = 4x_1 - 7x_2 + 9x_3$$

s.t:

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

آزاد در علامت x_3

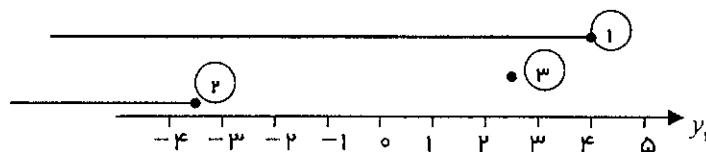
$$\text{Max } y_1 = 4y_1$$

s.t:

$$y_1 \leq 4 \quad (1)$$

$$4y_1 \leq -7 \Rightarrow y_1 \leq -\frac{7}{4} \quad (2)$$

$$4y_1 = 9 \Rightarrow y_1 = \frac{9}{4} \quad (3)$$



چون سه محدودیت منطقه مشترک ندارند درنتیجه مساله ثانویه فاقد ناحیه موجه است.

تمرینات (صفحه ۵ دانا کتاب درسی)

- ۱- جدول (تایلوبی) اول و بهینه یک مساله برنامه‌ریزی تولید به صورت زیر داده شده است .
 x_1, x_2, x_3 به ترتیب متغیرهای تصمیم مساله هستند . عناصر هر یک از تابلوها را تحلیل اقتصادی کنید ؟

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۲	-۵	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۰	۲	۰	۱	۰	۴۶۰
S_3	۰	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
Z_*	۱	۴	۰	۰	۱	۲	۰	۱۳۵۰
x_1	۰	$-\frac{1}{4}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۱۰۰
x_2	۰	$\frac{3}{2}$	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۲۳۰
S_*	۰	۲	۰	۰	-۲	۱	۱	۲۰

تایلوبی اول

تایلوبی بهینه

همچنین با استفاده از مفهوم قیمت سایه‌ای مقدار $Z^* = 1350$ را کنترل کنید .

پاسخ :

تفسیر عناصر تایلوبی اول :

عناصر تایلوبی اول ، در واقع همان ضرایب فنی در محدودیت‌های کارکردی (a_{ij}) ، مقادیر سمت راست محدودیت‌ها (b_i) و ضرایب سودآوری هر یک از محصولات در تابع هدف (c_j) می‌باشند . مقادیر سطر صفر تایلوبی اول بیسانگر ضرایب متغیرهای مدل استاندارد در تابع هدف است که جهت استفاده در تایلوبی سیمپلکس به سمت چپ معادله هدف انتقال یافته‌اند .

تابع هدف به صورت زیر می‌باشد :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \Rightarrow Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

بنابراین مقادیر $(-3, -2, -5)$ به ترتیب بیانگر میزان افزایش تابع هدف در ازای تولید یک واحد از محصولات نوع ۱، ۲ و ۳ است. به عنوان مثال ضریب ۳ در x_1 نشان می‌دهد که به ازای یک واحد افزایش x_1 ، تابع هدف به اندازه ۳ واحد افزایش پیدا می‌کند. مقادیر قید شده در سطر یک (سطر ۱) به ترتیب از چپ به راست بیانگر آنست که برای تولید هر واحد از محصولات نوع اول ۱ واحد، نوع دوم ۲ واحد، نوع سوم ۱ واحد از منبع اول نیاز داریم. مقادیر قید شده در سطر دوم (سطر ۲) نیز به ترتیب از چپ به راست بیانگر آنست که برای تولید هر واحد از محصولات نوع اول ۳ واحد و نوع سوم ۲ واحد از منبع دوم نیاز داریم. ضریب صفر برای متغیر x_4 بیانگر آنست که برای تولید x_4 نیازی به منبع ۲ نداریم. تفسیر مقادیر سطر سوم نیز مانند سطر دوم است.

تفسیر عناصر تابلوی بهینه :

متغیرهای اساسی در تابلوی بهینه، گوشاهی را بیان می‌کند که مختصات آن با x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 تعریف می‌گردد (متغیرهای اساسی آن x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 و متغیرهای غیراساسی آن x_4, S_3 هستند) بنابراین ترکیب بهینه تولید با x_1, x_2, x_3 بدست می‌آید. به طوری که جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, S_1 = 0, S_2 = 20$$

و مقدار تابع هدف بهینه عبارتست از :

$$Z = 3 \times 0 + 2 \times 100 + 5 \times 230 = 1350$$

تحلیل اعداد ستون x_1 : مقادیر ستون x_1 در سطرهای x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 عبارتند از $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

این اعداد بیانگر آنند که به ازای تولید یک واحد از محصول ۱، تولید x_1 به اندازه $\frac{1}{2}$

افزایش و تولید x_1 به اندازه $\frac{3}{2}$ کاهش می‌باید و همچنین ۲ واحد از منبع ۳ مصرف خواهد شد.

تحلیل هزینه - منفعت تولید x_1 ، افزایش تولید x_1 ، کاهش تولید x_1 ، مصرف منبع ۳ نشان می‌دهد که تولید x_1 به صرفه نیست.

نتایج به شرح زیر است :

$$(سود به دست آمده از افزایش x) ۲ \times (\افزایش تولید x) \frac{1}{\mu} + (سود حاصل از تولید یک واحد x) ۳$$

$$- \frac{۳}{\mu} = (سود از دست رفته کاهش x) ۵ \times (\کاهش تولید x) \frac{۳}{\mu}$$

این نشان می‌دهد به ازای هر واحد تولید x ، مقدار تابع هدف به اندازه ۴ کاهش می‌یابد .
(به عدد ۴ ذیل x در سطر صفر توجه کنید) تحلیل اعداد سایر ستونها نیز دقیقاً به طور مشابه است .

همچنین ضرایب S_1, S_2, S_3 در سطر صفر تابلوی بهینه نشان دهنده ارزش واقعی (قیمت سایه) منابع اول ، دوم و سوم هستند . بنابراین داریم :

$$y_1 = ۱ , y_2 = ۲ , y_3 = ۰$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$Z^* = ۱ (منبع اول) \times ۱۴۳۵ + ۰ (ارزش واقعی هر واحد) (S_1)$$

$$+ ۲ (منبع دوم) \times ۱۴۶۰ + ۰ (ارزش واقعی هر واحد) (S_2)$$

$$+ ۰ (منبع سوم) \times ۱۴۲۰ + ۰ (ارزش واقعی هر واحد) (S_3) = ۱۳۵۰$$

۲- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید و مساله ثانویه آن را بنویسید ؟

$$Max Z = ۱۴x_1 + ۱۵x_2 + x_3 + ۱۰x_4$$

s.t :

$$x_1 + x_2 - x_4 \leq ۱۰۰$$

$$x_2 - x_3 \geq ۸۰$$

$$x_1 + x_2 - ۱۴x_4 = ۹۰$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq ۰$$

آزاد در علامت

پاسخ :

برای نوشتن ثانویه مساله ، ابتدا آن را به صورت استانداره می‌نویسیم . چون تابع هدف از نوع Max است ، لذا محدودیت‌های آن باید از نوع (\leq) یا (=) باشند . بنابراین با ضرب محدودیت دوم در منفی مساله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$Max Z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4$$

s.t

$$x_1 + x_2 - x_4 \leq 100$$

$$-x_1 + x_2 \leq -80$$

$$x_1 + x_2 - 3x_4 = 90$$

x_1 آزاد در علامت

$$x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

متغیرهای x_1, x_2, x_3, x_4 را به ترتیب برای محدودیت‌های اول ، دوم و سوم در نظر می‌گیریم .

برای نوشتن مساله ثانویه نکات زیر را در نظر می‌گیریم :

(الف) چون x_1 آزاد در علامت است ، پس محدودیت اول در مساله ثانویه به صورت (=) خواهد بود .

(ب) چون محدودیت سوم مساله به صورت (=) است . پس y_4 در مساله ثانویه آزاد در علامت خواهد بود .

لذا مساله ثانویه به صورت زیر است :

$$Min Z = 100y_1 - 80y_2 + 90y_3$$

$$y_1 + y_2 = 3$$

$$y_1 - y_2 + y_3 \geq 5$$

$$-y_2 \geq 1$$

$$-y_1 - 3y_3 \geq 10$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ آزاد در علامت ،

۳- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید و مساله ثانویه آن را بنویسید.

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 8x_2 - x_3$$

s.t:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 30$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_2 + x_3 = 25$$

$$x_3 \geq 2$$

$$x_1 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

آزاد در علامت x_2, x_3

پاسخ :

چونتابع هدف از نوع Min است، پس محدودیتهای آن باید از نوع (=) یا (\leq) باشند.

با ضرب محدودیت پنجم در منفی مساله به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 8x_2 - x_3$$

s.t

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 30$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_2 + x_3 = 25$$

$$x_3 \geq 2$$

$$-x_1 \geq -10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

آزاد در علامت x_2, x_3

برای نوشتن مساله ثانویه به دو نکته زیر توجه می‌کنیم:

الف) چون محدودیت سوم مساله از نوع (=) است پس y آزاد در علامت خواهد بود.

ب) چون x_3, x_4 آزاد در علامت هستند، پس محدودیت سوم و چهارم مساله ثانویه به صورت ($=$) خواهند بود. بنابراین مساله ثانویه به صورت زیر است :

$$\text{Max } Z = 2y_1 + 3y_2 + 25y_3 + 2y_4 - 10y_5$$

s.t

$$2y_1 + y_2 - y_5 \leq 0$$

$$3y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3 \leq 100$$

$$y_3 - y_4 = 80$$

$$-y_1 = 0$$

$$-y_2 + y_3 + y_4 \leq -1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

۴- مساله زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید ؟

(ب)

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

s.t :

$$2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = -2x_1 - 2x_2$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(ج)

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 12$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

پاسخ :

الف) ابتدا مساله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\text{Max } Z = -x_1 - x_p \Rightarrow Z + x_1 + x_p = 0$$

s.t

$$-x_1 - x_p + S_1 = -6$$

$$-x_1 - x_p + S_p = -6$$

$$x_1, x_p, S_1, S_p \geq 0$$

تمام مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس ثانویه در جدول زیر خلاصه شده است :

متغیر اساسی	Z	x_1	x_p	S_1	S_p	سمت راست
Z	1	2	2	0	0	0
S_1	0	-2	-1	1	0	-6
S_p	0	-1	(-2)	0	1	-6
Z	1	-1	0	1	1	-6
S_1	0	($\frac{-2}{2}$)	0	1	$-\frac{1}{2}$	-3
x_p	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	3
Z	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-8
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
x_p	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2

تابلوی
اول

تابلوی
دوم

جدول
بهینه

جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1 = 2, \quad x_p = 2, \quad S_1 = 0, \quad S_p = 0, \quad Z = -8$$

ب) ابتدا مساله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$Max(-Z) = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \Rightarrow -Z + 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

s.t :

$$-2x_1 - 3x_2 - \frac{1}{2}x_3 + S_1 = -12$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + S_2 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

تمام مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس ثانویه در جدول زیر آمده است :

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	سمت راست
S_1	1	3	2	1	0	0	0
	0	-2	(-3)	$-\frac{1}{2}$	1	0	-12
	0	1	1	4	0	1	20
S_2	-1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-8
	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{23}{6}$	$\frac{1}{3}$	1	16

تابلوی
اول

تابلوی
بهینه

جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, -Z = -8, S_1 = 0, S_2 = 16$$

بنابراین برای مساله اصلی داریم :

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, Z^* = 8, S_1 = 0, S_2 = 16$$

ج) ابتدا مساله را به فرم استاندارد از نوع Max تبدیل می‌کنیم:

$$\text{Max}(-Z) = -1 \cdot x_1 - 5x_r - 4x_p \quad -Z + 1 \cdot x_1 + 5x_r + 4x_p$$

s.t :

$$-3x_1 - 2x_r + 3x_p \leq -3 \quad \Rightarrow \quad -3x_1 - 2x_r + 3x_p + S_1 = -3$$

$$-4x_1 - 2x_r \leq 10 \quad -4x_1 - 2x_r + S_r = -10$$

$$x_1, x_r, x_p, S_1, S_r \geq 0$$

تعداد مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس ثانویه در جدول زیر آمده است:

متغیر اساسی	Z	x_1	x_r	x_p	S_1	S_r	سمت راست
Z	-1	10	5	4	0	0	0
S_1	0	-3	-2	3	1	0	-3
S_r	0	-4	0	(-2)	0	1	-10
Z	-1	2	5	0	0	2	-20
S_1	0	(-9)	-2	0	1	-2	-18
x_p	0	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
Z	-1	0	$\frac{41}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$	-24
x_1	0	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	2
x_r	0	0	$-\frac{4}{9}$	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	1

بنابراین جواب بهینه عبارتست از:

$$x_1 = 2, x_r = 0, x_p = 1, S_1 = 0, S_r = 0, -Z = -24 \Rightarrow Z = 24$$

۵- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید : با استفاده از روش هندسی جواب بهینه مساله اولیه و ثانویه آن را پیدا کنید ؟

$$MinZ = 3x_1 + 2x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

☞ پاسخ :

چون مساله از نوع Min است پس محدودیت‌های آن باید از نوع (\geq) یا $(=)$ باشند . با ضرب محدودیت اول در منفی خواهیم داشت :

$$MinZ = 3x_1 + 2x_2$$

s.t :

$$-x_1 - x_2 \geq -10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مساله ثانویه به صورت زیر خواهد بود :

$$MaxZ = -10y_1 + 14y_2$$

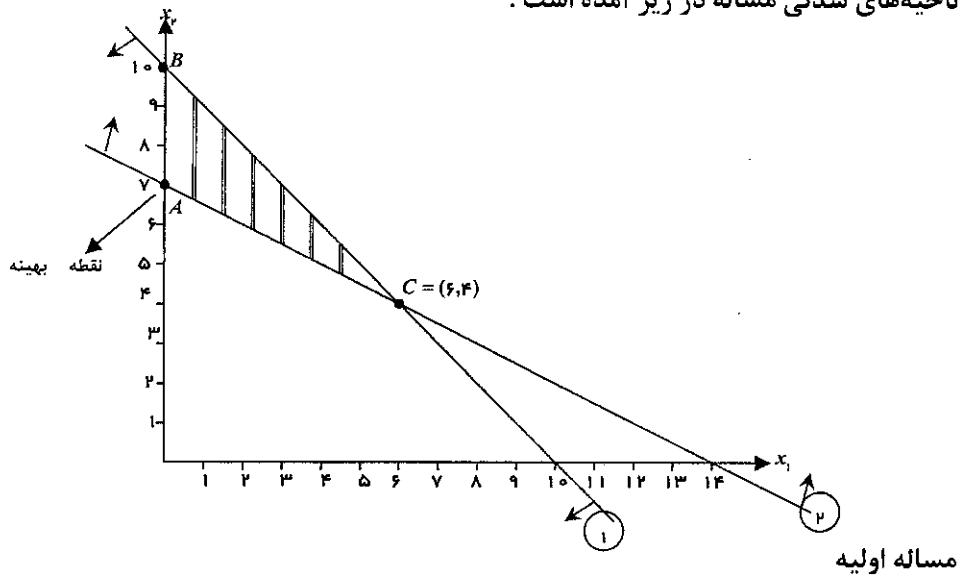
s.t :

$$-y_1 - y_2 \leq 3$$

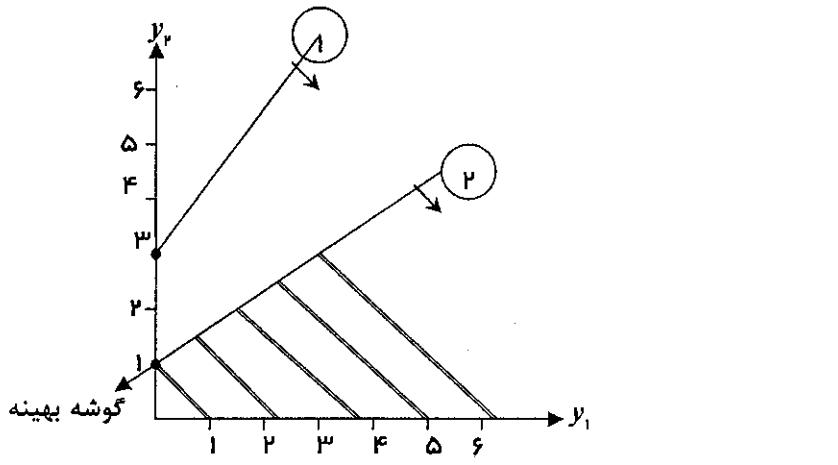
$$-y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ناحیه‌های شدنی مساله در زیر آمده است :



$$x_1 = 0, x_2 = 4, Z = 14$$



ناحیه شدنی : بیکران

$$x_1 = 0, x_2 = 1, Z = 14$$

۶- مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید؛ ضمن نوشتن مساله ثانویه و حل آن به روش ترسیمی نتایج و مفاهیم بدست آمده را بیان کنید؟

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2$$

s.t :

$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$

$$-2x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

 پاسخ :

مساله ثانویه به صورت زیر است :

$$MinZ = 5y_1 + y_2$$

s.t :

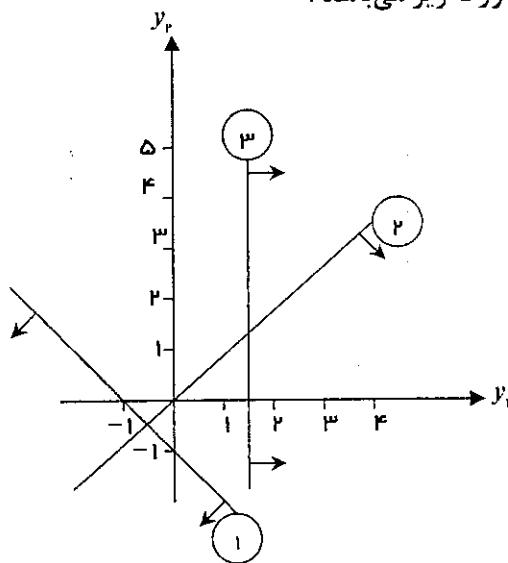
$$-3y_1 - 2y_2 \geq 2$$

$$y_1 - y_2 \geq 0$$

$$2y_1 \geq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ناحیه شدنی به صورت زیر می‌باشد :



با توجه به نمودار، مساله ثانویه فاقد ناحیه شدنی است. لذا مساله اولیه یا نشدنی است، یا دارای جواب بیکران است. اما $x_1 = 0, x_2 = 0$ یک جواب شدنی برای مساله اولیه است. پس مساله اولیه شدنی و دارای جواب بیکران است.

۷- مسائل زیر را در نظر بگیرید:

(ب)

$$MaxZ = 4x_1 + 5x_2$$

s.t :

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$MaxZ = 4x_1 + 3x_2$$

s.t :

$$-2x_1 - x_2 \leq -4$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(الف)

الف) مساله ثانویه هر یک را بنویسید.

ب) با استفاده از روش ترسیمی هر یک از مسائل را حل کنید و روابط ناحیه جواب اولیه و ثانویه را بیان کنید.

پاسخ :

الف) مساله ثانویه به صورت زیر است:

$$MinZ = -4y_1 + 5y_2$$

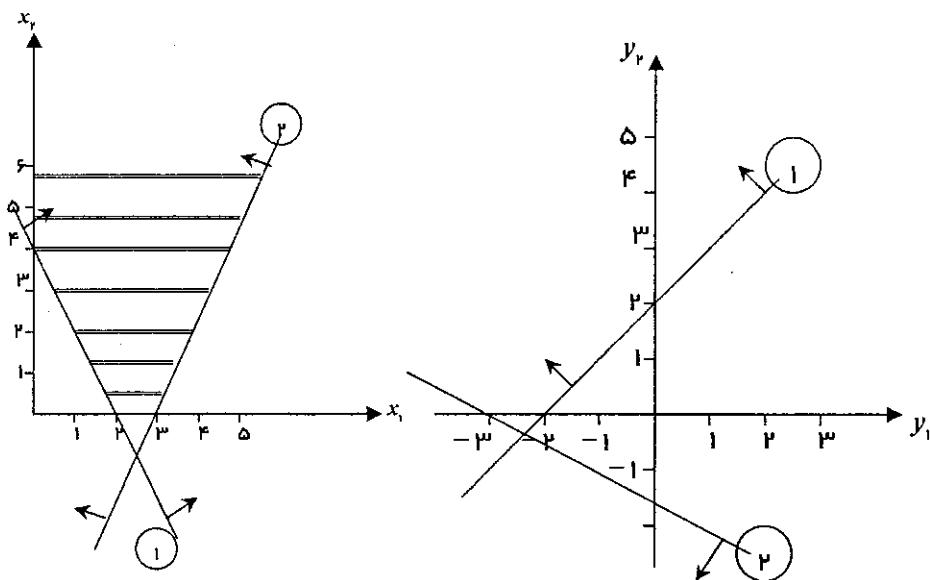
s.t :

$$-2y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$-y_1 - 2y_2 \geq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ناحیه‌های شدنی مساله‌های اولیه و ثانویه به صورت زیر می‌باشند :



مساله ثانویه فاقد ناحیه شدنی و مساله اولیه دارای ناحیه بیکران می‌باشد. چون مساله ثانویه نشدنی و مساله اولیه شدنی است پس مساله اولیه دارای جواب (تابع هدف) بیکران می‌باشد.

ب) مساله ثانویه به صورت زیر است :

$$\text{Min} Z = -2y_1 - 2y_2$$

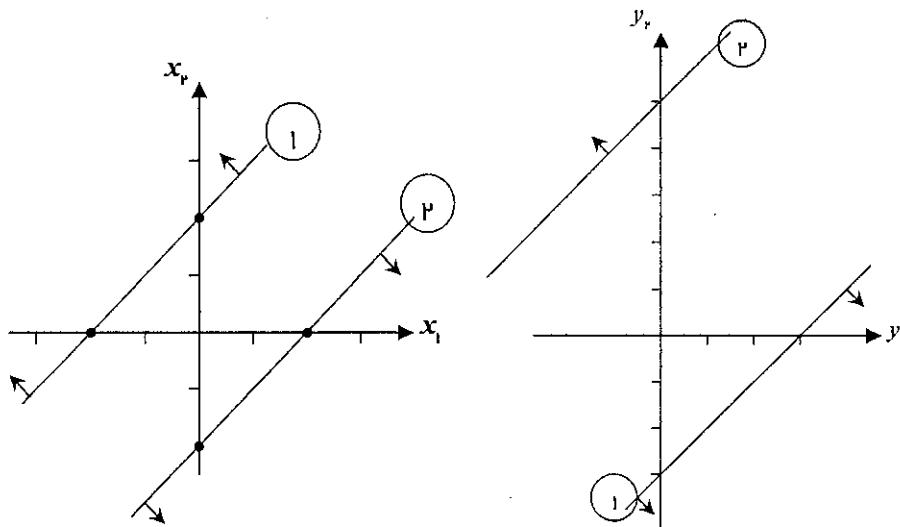
s.t :

$$y_1 - y_2 \geq 3$$

$$-y_1 + y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ناحیه‌های شدنی در زیر آمده است :



فاقد ناحیه شدنی

فاقد ناحیه شدنی

هر دو مساله اولیه و ثانویه فاقد ناحیه شدنی هستند.

- مساله LP زیر را در نظر بگیرید.

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_p$$

s.t :

$$x_1 + x_p \geq 4$$

$$x_1 - 2x_p \leq 4$$

$$x_1, x_p \geq 0$$

الف) مساله را با استفاده از روش M بزرگ حل کنید؟

ب) عناصر هر یک از تابلوهای سیمپلکس را تحلیل کنید؟

ج) جواب بهینه مساله ثانویه را با استفاده از تابلوی بهینه بدست آمده استخراج کنید؟

پاسخ :

الف) با افزودن متغیرهای کمکی و تصنیعی به مساله آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم :

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 - MR_1 \Rightarrow Z - 2x_1 - 3x_2 + MR_1 = 0$$

s.t :

$$x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + S_2 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1 \geq 0$$

تمام مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر آمده است :

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	سمت راست
Z	1	-2	-3	0	0	M	0
R_1	0	1	1	-1	0	1	3
S_2	0	1	-2	0	1	0	4
Z	1	-2-M	-3-M	M	0	0	$3M$
R_1	0	1	1	(1)	-1	0	3
S_2	0	1	2	0	1	0	4
Z	1	1	0	-3	0	$3+M$	9
x_2	0	1	1	-1	0	1	3
S_2	0	3	0	-2	1	2	10

در تابلوی دوم متغیر S_2 وارد شونده است (ضریب آن در سطر صفر منفی است) اما عناصر ستون لولا منفی هستند لذا متغیر خارج شونده را نمی‌توان تعیین کرد . پس مساله اولیه دارای جواب بیکران است .

ب) تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

تابلوی مقدماتی : عناصر این تابلو در واقع همان ضرایب فنی محدودیت‌ها ، مقادیر سمت راست محدودیت‌ها و ضرایب سطر صفر می‌باشند . چون در سطر صفر متغیر اساسی R_1 دارای ضریب نامنفی M است . لذا با استفاده از اعمال سطربال مقدماتی آن را صفر می‌کنیم (برابر سطر اول را با سطر صفر جمع می‌کنیم) .

تحلیل عناصر تابلوهای اول و دوم مانند تحلیل عناصر تمرين ۱ می‌باشد .

ج) چون مساله اولیه دارای جواب بیکران است پس مساله ثانویه فاقد ناحیه شدنی می‌باشد .

-۹- مساله اولیه زیر و تابلوی آخر آن داده شده است .

$$Maxz = 3x_1 + x_p$$

s.t :

$$2x_1 + x_p \geq 4$$

$$x_p \geq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

الف) جواب بهینه مساله ثانویه را با استفاده از تابلوی داده شده بدست آورید ؟

ب) جواب بند الف را با روش حل ترسیمی مساله ثانویه کنترل کنید .

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_p	S_1	S_p	R_1	R_p	مقادیر سمت راست
Z_0	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M + \frac{3}{2}$	$M - \frac{1}{2}$	5
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_p	0	0	1	0	-1	0	1	2

ج) تابلوی سیمپلکس فوق چه مفهومی را در خصوص ناحیه موجه مساله اولیه بیان می‌کند ؟

پاسخ :

الف) در تابلوی نهایی متغیر x_1 وارد شونده است (عنصر ذیل آن در سطر صفر منفی است) اما عناصر ستون لولا مثبت نیستند . لذا مساله اولیه دارای جواب بیکران است . پس مساله ثانویه نشدنی می‌باشد .

ب) برای نوشتن مساله ثانویه ابتدا محدودیت‌های مساله اولیه را به صورت (\leq) درمی‌آوریم . برای این منظور تمام محدودیت را در منفی ضرب می‌کنیم ، لذا مساله اولیه به صورت زیر خواهد بود :

$$MaxZ = 3x_1 + x_2$$

s.t :

$$-2x_1 - x_2 \leq -4$$

$$-x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و مساله ثانویه عبارتست از :

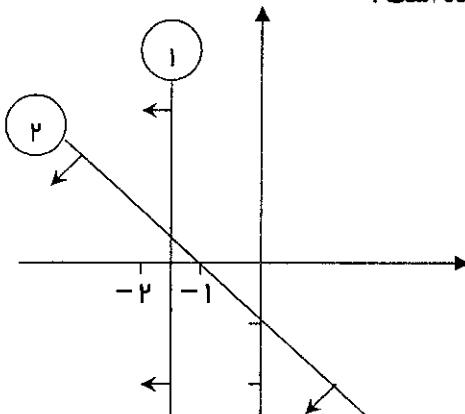
$$MinZ = -4y_1 - 2y_2$$

$$-2y_1 \geq 3$$

$$-y_1 - y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ناحیه جواب در نمودار زیر آمده است :



روشن است مساله ثانویه فاقد ناحیه موجه است.

ج) وجود S_1 به عنوان متغیر وارد شونده و نامثبت بودن عناصر ستون لولا نشان می‌دهد که منطقه موجه مساله اولیه بیکران است.

۱۰- مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الف) مساله را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

ب) مساله ثانویه مدل فوق را بنویسید و آن را حل کنید؟

ج) جوابهای بدست آمده از بند الف و ب را مقایسه کنید؟ به چه نتیجه مفیدی دست خواهید یافت؟ بنویسید.

 پاسخ :

الف) ابتدا مساله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{Max}(-Z) = -10x_1 - 5x_2 - 4x_3 \quad -Z + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

s.t :

$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -3 \quad \Rightarrow \quad -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_1 = -3$$

$$-4x_1 - 2x_3 \leq -10 \quad -4x_1 - 2x_3 + S_2 = -10$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

تمام مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس ثانویه در جدول زیر آمده است:

متغیر اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	سمت راست
Z	-1	10	5	4	0	0	0
S_1	0	-3	-2	3	1	0	-3
S_2	0	-4	0	(-2)	0	1	-10
Z	-1	2	5	0	0	2	-2
S_1	0	(-9)	-2	0	3	$\frac{3}{2}$	-18
x_3	0	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
Z	-1	0	$\frac{41}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$	-24
x_1	0	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{3}{9}$	$-\frac{1}{6}$	2
x_2	0	0	$-\frac{4}{9}$	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	1

در جدول فوق شرط بھینگی و شدنی بودن برقرار است. لذا جواب بھینه عبارتست از:

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, S_1 = 0, -Z = -24 \Rightarrow Z = 24$$

ب) با استفاده از مدل اصلی، مساله ثانویه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Max } Z = 3y_1 + 10y_2 \quad \text{Max } Z = 3y_1 + 10y_2 \Rightarrow Z - 3y_1 - 10y_2 = 0$$

$$s.t: \quad \quad \quad s.t:$$

$$-3y_1 + 4y_2 \leq 10 \quad \Rightarrow \quad 3y_1 + 4y_2 + S_1 = 10$$

$$2y_1 \leq 5 \quad \quad \quad 2y_1 + S_2 = 5$$

$$-3y_1 + 2y_2 \leq 4 \quad \quad \quad -3y_1 + 2y_2 + S_3 = 4$$

$$y_1, y_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

تمام مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر آمده است :

متغیر اساسی	Z	y_1	y_r	S_1	S_r	S_p	سمت راست	
Z	۱	-۳	-۱۰	۰	۰	۰	۰	تابلوی اول
S_1	۰	۳	۴	۱	۰	۰	۱۰	
S_p	۰	۲	۰	۰	۱	۰	۵	
S_r	۰	-۳	۲	۰	۰	۱	۴	
Z	۱	-۱۸	۰	۰	۰	۵	۲۰	تابلوی دوم
S_1	۰	۹	۰	۱	۰	-۲	۳	
S_p	۰	۲	۰	۰	۱	۰	۵	
y_r	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۲	
Z	۱	۰	۰	۲	۰	۱	۲۴	تابلوی بهینه
y_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{9}$	۰	$-\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	
S_p	۰	۰	۰	$-\frac{2}{9}$	۰	$\frac{4}{9}$	$\frac{41}{9}$	
y_r	۰	۰	۱	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$	

جواب بهینه عبارتست از :

$$y_1 = \frac{1}{9}, \quad y_r = \frac{7}{3}, \quad S_1 = 0, \quad S_p = \frac{41}{9}, \quad Z = 24$$

ج) روشن است قضایای بهینگی و لنگی مکمل برقرار است .

نمونه سوالات پایان ترم فصل پنجم

سؤالات تستی

۱- در نظر بگیرید Z مقدار تابع هدف یک مدل LP از نوع Max با محدودیت‌های که باشد و y مقدار تابع هدف مسأله ثانویه آن، کدام گزینه زیر صحیح می‌باشد؟

- الف) $Z \leq y$ ب) $Z = y$ ج) $Z \geq y$ د) $Z < y$

پاسخ :

گزینه ب

۲- مسأله اولیه یک مدل LP فاقد ناحیه موجه است. مسأله ثانویه آن :

- الف) ناحیه موجه بی‌کران بدون گوشه بهینه دارد.
 ب) فاقد ناحیه موجه است.
 ج) ناحیه موجه محدود دارد.
 د) الف یا ب

پاسخ :

گزینه د

۳- متغیر کمکی در مسأله ثانویه، متناظر با کدام متغیر در مسأله است؟

- الف) متغیر تصمیم ب) متغیر کمکی ج) متغیر اساسی د) متغیر غیر اساسی

پاسخ :

گزینه الف

جدول ابتدایی و نهایی یک مدل LP ارائه شده است. با توجه به این جدول به سوالات ۴ تا ۷ پاسخ دهید.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z	۱	-۶	-۴	-۱۲	۰	۰	۰
S_1	۰	۴	۱	۳	۱	۰	۲۴
S_2	۰	۲	۶	۳	۰	۱	۳۰
Z	۱	A	۲	۰	۴	۰	۹۶
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	۸
S_3	۰	-۴	۵	۰	-۱	۱	۶

تابلوی اول

تابلوی نهایی

۴- در جدول نهایی مقدار A برابر است با:

- (الف) ۱۲ (ب) ۱۰ (ج) ۸ (د) ۶

پاسخ:

گزینه ب

در جدول اول x متغیر وارد شونده و y متغیر خارج شونده است. لذا پس از انجام اعمال

$$A = 10$$

سطری بdst می‌آوریم:

۵- قیمت سایه منبع اول چقدر است؟

- (الف) ۴ (ب) صفر (ج) ۲ (د) ۸

پاسخ:

گزینه الف

ضریب S_1 در جدول نهایی قیمت سایه منبع اول است.

۶- مقدار متناظر با S_1 در جدول نهایی سیمپلکس ثانویه (۱) این مدل برابر است با:

(الف) صفر (ب) مقداری کوچکتر از صفر

(د) نمی‌توان اظهار نظر کرد. (ج) مقداری بزرگتر از صفر

پاسخ:

گزینه الف

با توجه به قضیه مکملی داریم $0 = S_1 - y_1$, چون $S_1 = 4$ پس $0 = 4 - y_1$

۷- مسئله ثانویه این مدل:

(الف) ناحیه موجه بیکران با گوشه بهینه دارد.

(ب) یا ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه دارد یا فاقد ناحیه موجه است.

(ج) فاقد ناحیه موجه است.

(د) ناحیه موجه سکان بدون گوشه بهینه دارد.

پاسخ:

گزینه الف

مسئلات تشرییع

۱- مسئله ثانویه مدل LP مقابل را بنویسید.

$$Min Z = 1 \circ x_1 + 5 x_2 + 4 x_3$$

s.t

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 10$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{آزاد در علامت } x_3$$

پاسخ :

$$Max y = 1 \circ y_1 + 1 \circ y_2 + 4 \circ y_3$$

s.t

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 10$$

$$4y_1 + y_3 = 5$$

$$-3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 4$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad \text{آزاد در علامت } y_3$$

۲- مدل زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید. (فقط جدول اول و دوم را بدست آورید).

$$Min Z = 1 \circ x_1 + 5 x_2 + 4 x_3$$

s.t

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

پاسخ:

ابتدا مسئله را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم.

$$Max - Z = -10x_1 - 5x_2 - 4x_3 \Rightarrow -Z + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

s.t

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - S_1 = 3 \Rightarrow -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + S_1 = -3$$

$$4x_1 + 2x_2 - S_2 = 10 \Rightarrow -4x_1 - 2x_2 + S_2 = -10$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

جدول اول و دوم روش سیمپلکس ثانویه در زیر آمده است:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	-1	10	5	4	0	0	0
S_1	0	-3	-2	4	1	0	-3
S_2	0	-4	0	(-2)	0	1	-10
Z_0	-1	2	5	0	0	2	-20
S_1	0	-11	-2	0	1	2	-23
X_3	0	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	5

تابلوی

اول

تابلوی

دوم

نمونه سؤالات پایان ترم

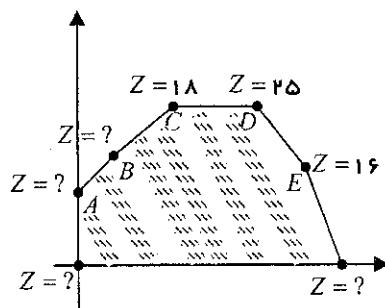
سؤالات تستی

- ۱- در معادله $Z = 5x_1 + 8x_2$ اعداد ۵ و ۸ نامیده می‌شوند؟
 الف) متغیر مستقل ب) پارامتر ج) منبع
 د) متغیر وابسته

پاسخ :

گزینه ب

- ۲- حل ترسیمی یک مدل LP باتابع هدف $\text{Max } Z$ ارائه شده است. کدام نقطه، نقطه بهینه است؟
 الف) نقطه C ب) نقطه A ج) نقطه D د) نمی‌توان اظهار نظر کرد.



پاسخ :

گزینه الف

می‌دانیم اگر مقدار تابع هدف در یک گوشه نسبت به دو گوشه مجاور بهینه باشد، آن گوشه، گوشه بهینه خواهد بود. در این مسأله چون تابع هدف از نوع Max است و مقدار تابع هدف در نقطه D نسبت به نقطه مجاور C و E بیشتر است، پس نقطه D بهینه مسأله می‌باشد.

- ۳- اگر در یک برنامه‌ریزی ریاضی، مفروضات تناسب، جمع‌پذیری و بخش‌پذیری رعایت شوند ولی فرض معین بودن برقرار نباشد، مدل به دست آمده، مدلی است:
 الف) عدد صحیح ب) احتمالی ج) برنامه‌ریزی خطی د) برنامه‌ریزی غیر خطی

پاسخ:

گزینه ب

۴- جواب بهینه مدل LP زیر چقدر است؟

$$Minz = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1200$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$z^* = 0 \quad (د)$$

$$z^* = 800 \quad (ج)$$

$$z^* = 1200 \quad (ب)$$

$$z^* = 1000 \quad (الف)$$

پاسخ:

گزینه د

مسئله را با افزودن متغیر کمکی S_1 به صورت زیر می نویسیم:

$$Max - Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \Rightarrow -Z + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 1200$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1 \geq 0$$

مراحل اجرای روش سیمپلکس در جدول زیر خلاصه شده است:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	R.H.S
Z	-1	1	2	3	0	0
S_1	0	1	2	3	0	1200

جدول فوق تابلوی بهینه است. بنابراین جواب بهینه عبارتست از:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, S_1 = 1200, Z^* = 0$$

۵- در روش سیمپلکس ثانویه عنصر لولا همواره:

الف) مثبت است.

د) کوچکتر یا مساوی صفر است.

ج) کوچکتر از صفر است.

پاسخ :

گزینه ج

۶- در حل ترسیمی یک مدل LP نقاط بهینه بر روی یک پاره خط قرار دارند. این مدل کدام حالت خاص را دارد؟

- (الف) فاقد نقطه بهینه (ب) ناحیه موجه نامحدود (ج) بهینه چندگانه (د) تبهگن موقت

پاسخ :

گزینه ج

در این حالت تمام نقاط روی پاره خط نقاط بهینه مساله هستند.

۷- هر تابلوی سیمپلکس از نظر هندسی (روش ترسیمی) متناظر با:

- (ب) گوش است.
 (الف) گوش موجه است.
 (د) نقطه بهینه است.
 (ج) نقطه غیر موجه است.

پاسخ :

گزینه الف

۸- اگر متغیر خروجی مطابق با قاعدة حداقل نسبت اعداد سمت راست بر مقادیر مثبت ستون لولا نباشد، در تابلوی بعد حداقل یک متغیر اساسی :

- (الف) مثبت می شود. (ب) صفر می شود. (ج) حذف می شود. (د) منفی می شود.

پاسخ :

گزینه د

قاعده مینیمم نسبت به خاطر آن به کار می رود که در تابلوی بعدی شرط نامنفی بودن متغیر حفظ شود. در صورتیکه این قاعده رعایت نشود، در تابلوی بعدی حداقل یک متغیر اساسی منفی می شود.

جدول اول و نهایی یک مدل LP ارائه شده است. با توجه به این مدل به سؤالات ۹ تا ۱۳ پاسخ

دهید:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۴	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	A	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{۳۶۵۰}{۳}$
X_1	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{۲}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{۴۰۰}{۳}$
X_2	۰	$\frac{۴}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{۲}{3}$	$\frac{۴۹۰}{۳}$

تabelوی اول

تabelوی نهایی

۹- مقدار A (ضریب x_1 در سطر Z جدول بهینه) را باید:

$$\frac{۲۲}{۶} \quad (۱)$$

$$\frac{۷}{۳} \quad (ج)$$

$$\frac{۴}{۳} \quad (ب)$$

$$\frac{۱۴}{۳} \quad (الف)$$

پاسخ :

گزینه ۵

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول آمده است.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۴	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	$\frac{۷}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۱۱۵۰
S_1	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲۰۰
X_3	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲۳۰
Z_0	۱	$\frac{۲۳}{۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۳۶۵۰}{۳}$
X_2	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۴۰۰}{۳}$
X_1	۰	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۴۹۰}{۳}$

جدول اول

جدول دوم

جدول بهینه

۱۰- قیمت سایه منبع دوم چقدر است؟

(د) $\frac{۶}{۳}$

(ج) $\frac{۷}{۳}$

(ب) $\frac{۱}{۳}$

(الف) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ :

گزینه ج

ضریب S_2 در جدول بهینه قیمت سایه منبع دوم را نشان می‌دهد.

۱۱- قیمت سایه منبع دوم و سوم در مسئله ثانویه مدل مذکور به ترتیب عبارتند از:

(د) $\frac{۴۰۰}{۳}, \frac{۴۹۰}{۳}$

(ج) $\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۳}$

(ب) $\frac{۱}{۳}, \frac{۱۴۰}{۳}$

(الف) $\frac{۷}{۳}, \frac{۱}{۳}$

پاسخ :

گزینه ۵

- مقادیر x_1 و x_2 در جدول بهینه، قیمت سایه منبع دوم و سوم مسأله ثانویه هستند.
 ۱۲- ضریب متغیر S_1 در ردیف Z تابلوی بهینه سیمپلکس برابر ۵ است. مقدار متغیر متناظر با آن (x_1) در مسأله ثانویه :

- ب) متغیر اساسی است.
 الف) مقدار صفر دارد.
 د) متغیر غیر اساسی است.
 ج) آزاد در علامت است.

پاسخ :

گزینه الف

- با توجه به قضیه مکملی داریم $0 = S_1 y_1 + 5 = 0$ پس $y_1 = 0$ می باشد.

۱۳- مسأله اولیه یک مدل LP فاقد ناحیه موجه است. مسأله ثانویه آن:

- الف) ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه دارد.
 ب) فاقد ناحیه موجه است.
 د) الف یا ب
 ج) ناحیه موجه محدود دارد.

پاسخ :

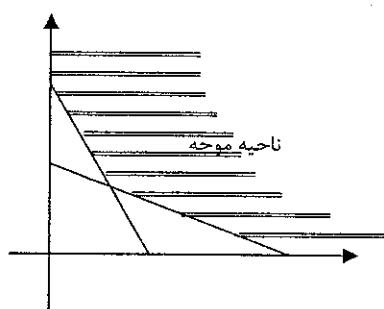
گزینه ۵

- ۱۴- متغیر کمکی در مسأله ثانویه متناظر با کدام متغیر در مسأله اولیه است?
 الف) متغیر تضمیم ب) متغیر کمکی ج) متغیر اساسی د) متغیر غیر اساسی

پاسخ :

گزینه الف

- ۱۵- ناحیه موجه مسأله اولیه یک مدل LP با تابع هدف Max به صورت زیر است. مسأله ثانویه آن:



الف) ناحیه موجه محدود دارد.

ب) ناحیه موجه بیکران دارد.

ج) یا ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه دارد یا فاقد ناحیه موجه است.

د) فاقد ناحیه موجه است.

پاسخ :

گزینه ۵

چون مسئله اولیه دارای جواب بیکران می‌باشد، لذا مسئله ثانویه فاقد ناحیه شدنی است.

تابلوی اول و نهایی یک مدل LP به صورت زیر داده شده است. با توجه به آنها به سؤالات ۱۶ تا

۲۰ پاسخ دهید.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_p	x_{μ}	S_1	S_p	S_{μ}	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۲	-۵	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۴۳۰
S_p	۰	۳	۰	۲	۰	۱	۰	۴۶۰
S_{μ}	۰	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
Z_0	۱	۴	۰	۰	۱	۲	۰	۱۳۵۰
X_p	۰	$-\frac{1}{4}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۱۰۰
X_{μ}	۰	$\frac{3}{2}$	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۲۳۰
S_{μ}	۰	۲	۰	۰	-۲	۱	۱	۲۰

۱۶- لازمه آزاد شدن یک واحد منبع S_1 :

الف) افزایش تولید x_p به مقدار $\frac{1}{\mu}$ واحد

ب) کاهش تولید x_{μ} به مقدار $\frac{1}{\mu}$ واحد

ج) آزاد شدن منبع S_{μ} به مقدار $\frac{1}{\mu}$ واحد

د) مصرف منبع S_{μ} به مقدار ۲ واحد

پاسخ :

گزینه ب

ستون مربوط به S_1 در جدول بهینه دارای مقدار $\frac{1}{\mu}$ متناظر با x_1 و ۲- متناظر با S_2

است. لذا لازمه آزاد شدن یک واحد منبع S . آن است که $\frac{1}{\mu}$ واحد تولید x کاهش یابد.

در این صورت ۱ واحد به منبع S_1 افزوده می‌شود. همچنین مقدار ۲- متناظر با S_2 نشان مس دهد که با این، عما، ۲ واحد به منبع S_2 نیز افزوده می‌شود.

۱۷- اگر بخواهیم از مخصوص x به مقدار ۲ واحد تولید کنیم:

الف) تولید محصول Z_2 به مقدار $\frac{1}{3}$ واحد افزایش می‌یابد.

ب) تولید محصول x به مقدار ۳ واحد ~~کاملاً~~ می‌یابد.

(ج) تولید محصول μ به مقدار $\frac{1}{\mu}$ افزایش می‌یابد.

د) الف و ب

پاسخ:

گزینہ د

مقادیر ستون x در جدول بهینه نشان می‌دهند که به ازای هر واحد تولید x ، $\frac{1}{4}$ واحد

تولید x افزایش می‌یابد، $\frac{3}{3}$ واحد تولید x کاهش می‌یابد و 2 واحد از منبع S_3

مصرف می شود. بنابراین اگر ۲ واحد x تولید شود آنگاه $\frac{2}{x}$ واحد تولید x افزایش، $\frac{6}{x}$

واحد تولید x کاهش و ۴ واحد از منبع S مصرف می‌شود.

۱۸- اگر مقدار ۴ واحد از منبع سوم از بازار خریداری گردد و برای تولید به کار گرفته شود مقدار Z چقدر افزایش می‌باشد؟

الف) ٣ واحد ب) تغيير نمي كند. ج) ٨ واحد د) ٢ واحد

ب) تغییر نمی‌کند.

Z چقدر افزایش می‌یابد؟

پاسخ :

گزینه ب

چون ضریب μ_D در سطر Z جدول بهینه صفر است، بنابراین با افزایش منبع ۳، هیچ تغییری در تابع هدف حاصل نمی‌شود.

۱۹- قیمت سایه منبع اول چقدر است؟

- الف) صفر ب) ۱۰۰ ج) ۲۰ د) ۱

پاسخ :

گزینه د

ضریب S_1 در سطر Z جدول بهینه قیمت سایه منبع اول است.

۲۰- مقدار λ در مسأله ثانویه متناظر چند است؟

- الف) صفر ب) ۱۰۰ ج) ۲۰ د) ۱

پاسخ :

گزینه د

قیمت سایه منبع اول، همان مقدار λ می باشد.

سوالات تشرییعی

- ۱- مدل LP زیر را به صورت ترسیمی رسم کنید. در صورتیکه مدل دارای حالت خاص است با ذکر دلیل توضیح دهید:

$$Maxz = 4x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

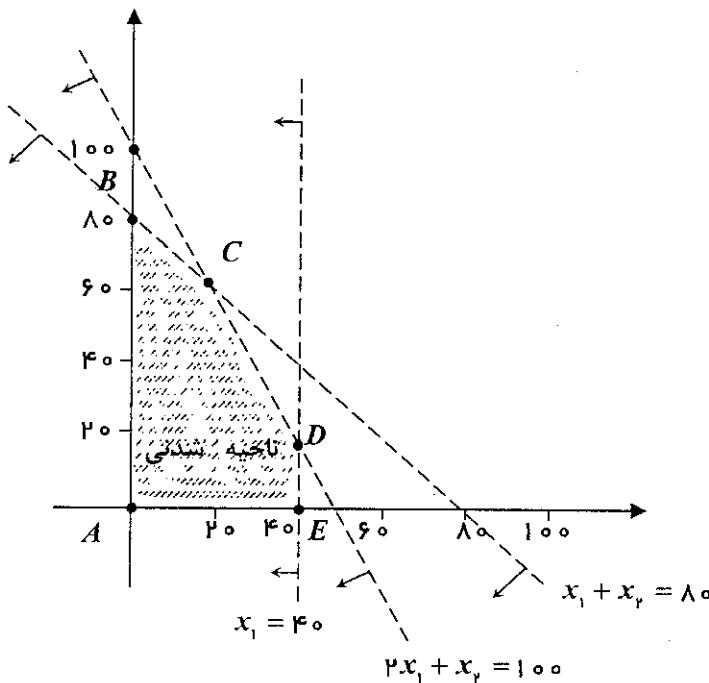
$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

ناحیه شدنی بهینه در شکل آمده است. نقطه C از تلاقی معادله اول و دوم حاصل می‌شود. بنابراین برای به دست آوردن مختصات نقطه C دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + x_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 20, x_2 = 60$$



همچنین نقطه D از تلاقي معادله اول و سوم حاصل می شود. پس برای بهينه دست آوردن
مختصات نقطه D دستگاه زير را حل می کنيم:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 = 40 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 40, x_2 = 20$$

گوشه	مختصات	مقدار تابع هدف
A	(0, 0)	0
B	(0, 80)	160
C	(20, 60)	200
D	(40, 20)	200
E	(40, 0)	160

چون تابع هدف از نوع Max است پس C و D گوشه های بهينه هستند. پس مسئله داراي
بهينه چندگانه می باشد.

۲- مسئله زير را به روش ترسيمی حل کنيد و حالت خاص آن را مشخص کنيد.

$$\text{Max} z = 2x_1 + x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

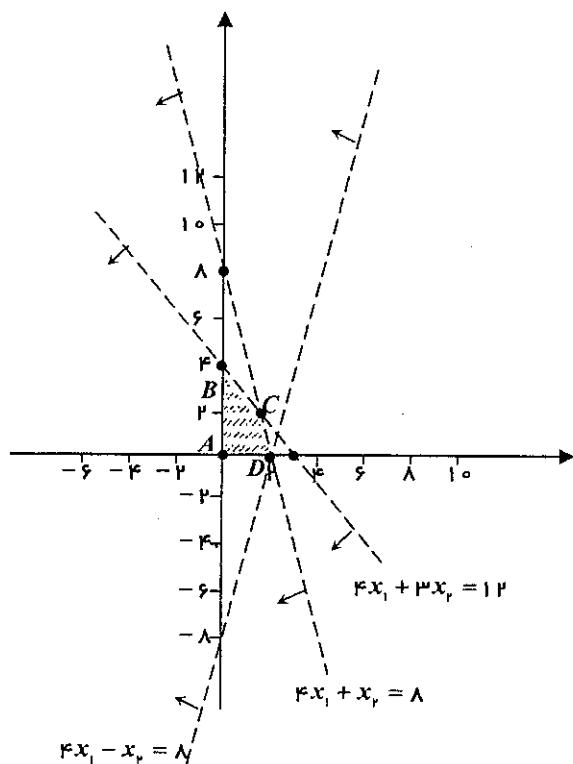
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

ناحیه شدنی به صورت زیر است :



نقطه C از تلاقی معادله ۱ و ۲ بدست آمده است. پس برای به دست آوردن مختصات نقطه C دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

گوشه	مختصات	مقدارتابع هدف
A	(0, 0)	0
B	(0, 4)	4
C	($\frac{3}{2}$, 2)	5
D	(2, 0)	4

چون تابع از نوع Max است پس C گوشه بهینه است. همچنین واضح است که محدودیت سوم زاید می باشد.

-۳- یک کارگاه، میز و صندلی تولید می کند. تولید هر میز و صندلی در دو مرحله صورت می گیرد. زمان لازم در مرحله اول برای هر میز و صندلی به ترتیب برابر با ۴ و ۲ ساعت است. حداقل زمان موجود در مرحله اول ۶۰ ساعت می باشد. زمان لازم در مرحله دوم برای هر میز و صندلی به ترتیب برابر با ۲ و ۴ ساعت می باشد. حداقل ساعت موجود در مرحله دوم برابر ۴۸ ساعت می باشد. سود حاصل از فروش هر میز و صندلی به ترتیب برابر با ۸ و ۶ تومان می باشد. مسئله را فرموله کنید.

پاسخ :

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعداد میز تولید شده: x_1

تعداد صندلی تولید شده: x_2

مدل LP مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$MaxZ = 8x_1 + 6x_2$$

s.t.

$$14x_1 + 2x_2 \leq 60 : \text{محدودیت مرحله اول}$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 48 : \text{محدودیت مرحله دوم}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۴- مسأله LP زیر را به روش M بزرگ حل کنید. فقط جدول مقدماتی و اول و دوم)

$$Maxz = 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

مسأله را به صورت زیر می نویسیم:

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2 - MR_2 \Rightarrow Z - 3x_1 - 2x_2 + MR_2 = 0$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 - S_2 + R_2 = 6$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر آمده است.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_p	مقادیر سمت راست	
Z	1	-۴	-۲	۰	۰	M	۰	جدول مقدماتی
S_1	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۴	
R_p	۰	۱	۱	۰	-۱	۱	۶	
Z	1	-۴ - M	-۲ - M	۰	M	۰	-۶ M	جدول اول
S_1	۰	(۲)	۱	۱	۰	۰	۴	
R_p	۰	۱	۱	۰	-۱	۱	۶	
Z	1	۰	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}M$	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}M$	M	۰	$6 - 4M$	جدول دوم
X_1	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۲	
R_p	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-۱	۱	۴	

۵- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را با روش M بزرگ حل کنید و نوع حالت خاص آن را مشخص کنید:

$$Maxz = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$4x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پاسخ :

مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 - MR_p \Rightarrow Z - 3x_1 - 3x_2 + MR_p = 0$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 2$$

$$3x_1 + x_2 - S_p + R_p = 12$$

$$x_1, x_2, S_1, S_p, R_p \geq 0$$

تمام مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس در جدول زیر آمده است.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_p	R_p	مقادیر سمت راست
Z	1	-3	-3	0	0	M	0
S_1	0	2	1	1	0	0	2
R_p	0	3	1	0	-1	1	12
Z	1	$-3 - 3M$	$-3 - M$	0	M	0	$-12M$
S_1	0	(2)	1	1	0	0	2
R_p	0	3	1	0	-1	1	12
Z	1	0	$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}M$	$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}M$	M	0	$3 - 9M$
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
R_p	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	9

جدول مقدماتی
جدول اول

جدول بهینه

چون در جدول بهینه متغیر تصنیعی با مقدار غیرصفر باقیمانده است. پس مسئله اصلی نشدنی است.

۶- مسئله ثانویه برای LP زیر را بنویسید:

$$Maxz = 4x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$-2x_1 + 4x_2 \leq -8$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1 + 3x_2 = 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ آزاد در علامت}$$

پاسخ :

مسئله را به صورت زیر می نویسیم:

$$MaxZ = 4x_1 + 2x_2$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq -8$$

$$-2x_1 - 4x_2 \leq -20$$

$$x_1 + 3x_2 = 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ آزاد در علامت}$$

مسئله ثانویه به صورت زیر خواهد بود.

$$MinY = -8y_1 - 20y_2 + 18y_3$$

$$-2y_1 - 4y_2 + y_3 \geq 4$$

$$4y_1 + 14y_2 + 3y_3 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \text{ آزاد در علامت}$$