

**کالج پروژه**

**[www.collegeprozheh.ir](http://www.collegeprozheh.ir)**



**دانلود پروژه های دانشگاهی**

**بانک موضوعات پایان نامه**

**دانلود مقالات انگلیسی با ترجمه فارسی**

**آموزش نگارش پایان نامه ، مقاله ، پروپوزال**

به نام آرامش بخش دل ها



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه دکتری مهندسی برق

گرایش الکترونیک-ادوات

عنوان:

بهینه سازی عملکرد کیوبیت های ابررسانا

**Optimaization of the superconductor qubites operation**

نگارنده:

حسام زندی

استاد راهنما: دکتر سینا خراسانی

استاد همکار: دکتر مهدی فردمنش

شهریور ۱۳۹۱

به نام خدا

## پیشگفتار

این پایان‌نامه نتیجه تحقیقات و تلاش‌های اینجانب در طی دوره دکتری و در مدت بیش از ۴ سال کسب علم و تجربه از اساتید و مراکز علمی در گوشه و کنار داخل و خارج این سرزمین می‌باشد. امید است که نتایج ارایه شده، سهم هر چند بسیار کوچکی در قطار سریع‌السیر پیشرفت معلومات بشری داشته باشد. با توجه به این که موضوع مورد بحث، یکی از داغ‌ترین موضوعات روز دنیا می‌باشد و یکی از موارد استراتژیک حساس در مراکز علمی کشورهای تراز اول دنیاست، انتخاب این موضوع و بدست آوردن خروجی مورد نظر بسیار دشوار می‌نمود. با توفیق الهی و همکاری اساتید گرامی توانستیم به سطحی از این موضوع دست پیدا کنیم که نتایج این تحقیق در چندین مجله و گردهمایی معتبر در سرتاسر دنیا ارایه شد و پسخوردهای بسیار مثبت و امیدوارکننده‌ای دریافت گردید. نویسنده بسیار امیدوار است که پس از ارایه این پایان‌نامه، این مسیر ادامه پیدا کرده و در آینده نه چندان دور تکنولوژی ساخت قابل قبول روز دنیا در دسترس قرار گرفته و این ادوات در داخل میهن عزیزمان ساخته و مورد بهره‌برداری قرار گیرند.

حسام زندی

## تشکر و قدردانی

ای خدای پاک و بی نیاز و یار  
دست گیر و جرم ما را در گذار  
یاد ده ما را سخن های رقیق  
کان به رحم آرد تو را، ای خوش رفیق  
گر خطا گفتیم، اصلاحش تو کن  
مصلحی تو، ای تو سلطان سخن  
کیما داری که تبدیلیش کنی  
گرچه جوی خون بود، نیلش کنی  
اینچنین میناگریها کار توست  
اینچنین اکسیرها ز اسرار توست

پیش از هر چیز خداوند را شاکرم که به من توانایی تهیه این پایان نامه را داد. پس از آن از خانواده ام (مادرم) سپاس گزارم که طی این مدت به طرق مختلف در راستای تحصیل علم و دانش مرا یاری نمودند. همچنین مراتب تقدیر و تشکر فراوان خود را از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر سینا خراسانی و جناب آقای دکتر مهدی فردمنش به پاس زحمات بی دریغشان، به جای می آورم. بدون شک علم آموزی در محضر این اساتید بزرگوار از ارزشمندترین تجارب من در طول زندگی ام خواهد بود.

زحمت داوری این پروژه را اساتید گرامی جناب آقایان دکتر ..... و ..... و ..... تقبل فرمودند. از این اساتید بزرگوار که با راهنمایی ها و پیشنهادات ارزنده ی خود از معایب این رساله کاسته و بر غنای آن خواهند افزود، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

## چکیده:

یکی از مهم‌ترین و پیشرفته‌ترین ابزارهای مورد نیاز بشر، وسایل محاسباتی همچون رایانه‌ها می‌باشند که در چند سال اخیر با توجه به رشد و پیشرفت سریع تکنولوژی نیمه‌هادی سریع‌ترین آنها ساخته شده‌اند. اما رایانه‌های امروزی پاسخ‌گوی همه این نیازها نیستند. دو مسئله بسیار مهم که در آنها ضعف محسوب می‌شود؛ یکی سرعت انجام محاسبات است که با توجه به حد نهائی تکنولوژی ساخت ادوات نیمه‌هادی و رسیدن به ابعاد نزدیک اتم، دیگر نمی‌توان به سرعت‌های بسیار بالاتر امیدوار بود، و دوم حل برخی مسایل بسیار پیچیده که با اینگونه رایانه‌ها سال‌ها و بلکه قرن‌ها طول خواهد کشید. درحالی‌که با توجه به اصول علم کوانتوم و برخی الگوریتم‌های معرفی شده، این مسایل توسط یک رایانه کوانتومی در مدت زمان بسیار کمتر به نتیجه خواهد رسید. در رایانه‌های کوانتومی به منظور بهره‌گیری از اصول کوانتوم به بیت کوانتومی نیاز است که از بین طرح‌های مختلف، بیت‌های کوانتومی بر مبنای مواد ابررسانا توجه و محبوبیت بیشتری را به خود اختصاص داده‌اند. تمامی تحقیقات انجام شده درباره این بیت‌ها با در نظر گرفتن ارتباط جریان و اختلاف فاز پیوند جوزفسون به صورت سینوسی خالص بوده است. اما این یک رابطه تقریبی است و به دلیل حساسیت بسیار بالای پیوندهای جوزفسون و حالت‌های کوانتومی، محاسبات دقیق‌تری احتیاج است. بدین منظور آنالیزی از موضوع تونل‌زنی در پیوندهای جوزفسون ارائه داده‌ایم که در آن پس از حل دقیق معادله گینزبرگ-لانداو با روشی نوین احتمالات تونل‌زنی حالت‌ها در یک کیوبیت فاز تک پیوندی را بدست آورده‌ایم. در این پروژه برای اولین بار تأثیر دقیق پارامترهای خود پیوند و پارامترهای خارجی سیستم همچون عرض پیوند، سطح مقطع پیوند، جریان بایاس و میدان مغناطیسی خارجی را بررسی کرده و پس از تعریف و محاسبه معیارهای منطقی برای عملکرد بهینه کیوبیت، شرایط مناسب عملکرد و اندازه‌گیری حالت در آن را بدست آورده‌ایم. همچنین نتایج محاسبات بدست آمده را با گزارش یک آزمایش تجربی از یک گروه معتبر مقایسه نموده و هماهنگی بسیار خوبی بین این دو یافته‌ایم که صحت محاسبات را تأیید می‌کند. در ادامه مشخصات سیستم‌های دوکیوبیتی تزویجی را بررسی نموده و توسط مفهوم تونل‌زنی دو-بعدی، ساختار جدیدی معرفی کرده‌ایم. در سیستم‌های کوانتومی تزویجی به دلیل درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی، اندازه‌گیری مستقل کیوبیت‌ها امکان‌پذیر نیست؛ به همین دلیل سیستم پیشنهادی در این پروژه طوری طراحی شده است که هم‌سنوایی اندازه‌گیری در آن قابل صرف نظر باشد. همچنین، با الهام از مدار دو کیوبیتی، سیستم تک کیوبیتی دو پیوندی طراحی نموده‌ایم که در آن تشابه اندازه‌گیری پیش بینی شده به مقدار ۹۹/۹۹٪ رسیده است. این تشابه اندازه‌گیری عالی حتی به وسیله پالس‌هایی با عرض کمتر از یک نانو ثانیه به دست می‌آید، در حالی که بالاترین تشابهات گزارش شده تا به امروز توسط پالس‌های زمانی پهن بدست آمده‌اند. در انتها زمان عدم همدوسی این ساختار را بررسی نموده و بهبود قابل ملاحظه‌ای را در مدار طراحی شده مشاهده کرده‌ایم.

## کلمات کلیدی :

اطلاعات کوانتومی، ابررسانا، کیوبیت فاز، پیوند جوزفسون، تشابه اندازه‌گیری، هم‌سنوایی

## فهرست مطالب

مقدمه ..... ۱

ساختار پایاننامه ..... ۵

فصل ۱ ..... مروری بر محاسبات کوانتومی

### ۷

۱-۱ ..... مقدمه ..... ۷

۲-۱ ..... اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی ..... ۸

۳-۱ ..... بیت کوانتومی (QUBIT) و پیاده سازی آن ..... ۱۱

۴-۱ ..... کاواک کوانتومی الکترودینامیکی (CAVITY QUANTUM ELECTRODYNAMICS) ..... ۱۳

۱-۴-۱ ..... معادلات کوانتومی برهمکنش موج (نور) و اتم (ماده) ..... ۱۸

۵-۱ ..... مدارهای کوانتومی ابررسانا ..... ۲۳

فصل ۲ ..... اصول ابررسانایی و مقدمه‌های بر پدیده جوزفسون

### ۲۴

۱-۲ ..... مقدمه ..... ۲۴

۲-۲ ..... تئوریهای ابررسانایی ..... ۲۸

2-2-1 ..... تئوری BCS ..... ۲۹

۲-۲-۲ ..... مدل دوسیالی ابررسانا ..... ۳۱

۳-۲ ..... مقدمه‌های بر ویژگیهای پیوند جوزفسون در ابررسانا ..... ۳۳

۱-۳-۲ ..... مدل گینزبرگ-لاندائو برای ابررسانایی ..... ۳۳

۲-۳-۲ ..... تونل‌زنی در پیوندهای ابررسانا ..... ۳۵

۳-۳-۲ ..... تونل‌زنی الکترونهاي معمولی در پیوند SIS ..... ۳۷

۴-۳-۲ ..... تونل‌زنی زوج‌الکترونها: پدیده جوزفسون و روابط آن ..... ۳۸

۵-۳-۲ ..... انرژی تزویج جوزفسون (Josephson coupling energy) ..... ۴۲

۴۲.....	مدار معادل پیوند جوزفسون.....	۶-۳-۲
۴۴.....	عملگرهای کوانتومی در هامیلتونی پیوند جوزفسون.....	۷-۳-۲
۴۵.....	مشخصه ایستایی ۱-۷ پیوند جوزفسون.....	۸-۳-۲

### فصل ۳.....بیت‌های کوانتومی ابررسانا

۴۹

۴۹.....	مقدمه.....	۱-۳
۴۹.....	مدارهای کوانتومی ابررسانا.....	۲-۳
۵۴.....	مدار کوانتومی الکترودینامیکی (CIRCUIT QUANTUM ELECTRODYNAMICS).....	3-3
۵۶.....	بیت‌های کوانتومی ابررسانا.....	۴-۳
۵۸.....	انواع کیوبیت‌های ابررسانا.....	۱-۴-۳
۶۲.....	کیوبیت ابررسانایی بر مبنای فاز.....	3-5
۶۲.....	ساختار کیوبیت فاز.....	۱-۵-۳
۶۳.....	حالت‌های کیوبیت فاز.....	۲-۵-۳
۶۵.....	محاسبه پتانسیل فازی.....	۳-۵-۳

### فصل ۴.....تحلیل دقیق پیوند جوزفسون

۶۷

۶۷.....	مقدمه.....	۱-۴
۶۸.....	معادله گینزبرگ-لاندائو.....	۲-۴
۶۹.....	رابطه تقریبی مرسوم چگالی جریان الکتریکی.....	۳-۴
۷۰.....	محاسبه دقیق چگالی جریان الکتریکی پیوند.....	۴-۴
۷۳.....	نتایج محاسبات.....	۵-۴
۷۳.....	مقادیر دقیق چگالی جریان الکتریکی پیوند.....	۱-۵-۴

### فصل ۵.....بهینه‌سازی دقیق کیوبیت ابررسانا

۷۵

۱-۵	مقدمه.....	۷۵
۲-۵	محاسبه احتمالات تونلرزی حالات کیوبیت.....	۷۶
۳-۵	نتایج محاسبات.....	۸۳
5-3-1	اثر عرض پیوند.....	۸۳
5-3-2	اثر جریان بایاس.....	۸۶
5-3-3	اثر سطح مقطع.....	۸۷
5-3-4	اثر حضور میدان مغناطیسی خارجی.....	۹۰

## فصل ۶..... کیوبیت‌های تزویج شده

۹۵

۱-۶	مقدمه.....	۹۵
۲-۶	اندازه‌گیری حالت سیستم‌های دو کیوبیتی.....	۹۶
6-3	طراحی مدار تزویج با استفاده از خازن و DC-SQUID.....	۱۰۰
6-3-1	اندازه‌گیری حالت سیستم تزویجی توسط دو پالس مجزا.....	۱۰۳
۲-۳-۶	اندازه‌گیری حالت تنها توسط یک پالس.....	۱۱۲
۴-۶	طراحی تک کیوبیت با عملکرد عالی.....	۱۱۳
۵-۶	زمان عدم همدوسی در کیوبیت.....	۱۱۸

## فصل ۷..... نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی

۱۱۹

۱۲۳	مراجع.....
-----	------------



## فهرست جداول

- جدول ۱-۲ دمای ابررسانایی برخی ابررساناهای دما بالا [۱۹] ..... ۲۷
- جدول ۱-۳. هر بیت کوانتومی به انواع مختلفی از نویز حساستر است. بیت‌های کوانتومی ساده که متغیر کنترلی و خواندنی یکسانی را استفاده میکنند، حساسیت بیشتری را نسبت به نویز در آن پارامتر از خود نشان میدهند. در بیت‌های کوانتومی که متغیرهای خواندنی دیگری را استفاده میکنند، میتوان اثرات نویز را با کار کردن در نقاط غیر حساس مرتبه اول و خواندن مشخصه‌های مرتبه دوم کاهش داد. .... ۵۲
- جدول ۱-۶. زاویه فرار  $\theta$  بر حسب قدرت تزویج  $b$  و شار مغناطیسی خارجی نرمالیزه  $\pi\Phi/\Phi_0$ . اعداد پررنگ: نتایج اعمال دو پالس جریان انداز‌گیری همزمان. اعداد کمرنگ: تک پالس جریان اعمال شده است. .... ۱۰۸
- جدول ۲-۶. مقادیر بهینه شده عرض پالس لازم اعمالی (ستون سوم) به یک سیستم تک کیوبیتی برای مقادیر مختلف جریان بایاس و جریان بحرانی پیوندهای جوزفسون. اعداد پررنگ در صورت: در کیوبیتی با یک پیوند جوزفسون با در نظر گرفتن پارامتر  $(F=0.992)$   $u=1000$  اعداد کمرنگ در مخرج: در کیوبیتی با دو پیوند جوزفسون تزویج شده و پارامتر  $(F=0.9999)$   $u'=500000$  ..... ۱۱۸

## فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ - هر دو سطحی از انرژی می‌تواند به عنوان یک بیت کوانتومی استفاده شود. سطح ۰ وقتی اتفاق می‌افتد که بیت کوانتومی میرا شده و پس از مدتی سقوط می‌کند. وقتی به صورت جمع آثار به بیت کوانتومی نگاه کنیم، فاز حالت در فرکانسی که با توجه به اختلاف انرژی دو سطح تعیین می‌شود، تغییر می‌کند. اگر این انرژی در طول زمان تغییر کند (به دلیل نویز یا اغتشاش در سیستم) سرعت ساعت تغییر خواهد کرد و باعث از دست رفتن حساب زمان خواهد شد [۱۰]..... ۱۲
- شکل ۲-۱. یک اتم دو حالته که با موج داخل کاواک برهمکنش دارد. نرخ برهمکنش همدوس  $g$ ، نرخ خروج فوتون  $\kappa$ ، نرخ میرایی ناخواسته اتم برابر  $\gamma_{\perp}$  و نرخ تغییر حالت اتم برابر  $1/T$  می‌باشد [۱۲]..... ۱۴
- شکل ۳-۱ (a) مدلی از سیستم کوانتومی الکترودینامیکی اتمهای ریدبرگ. ابتدا اتمها در حالت برانگیخته ریدبرگ قرار میگیرند. سپس در حالت اولیه قرار میگیرند و از فیلتر به سرعت میگذرند. وارد یک کاواک میکروویو که تا نزدیکی یک درجه کلین سرد شده میشوند و با فوتونهای درون آن برهمکنش انجام میدهند. در نهایت حالت اتمها، با پلاریزاسیون انتخابی اندازهگیری میشود. (b) نوسان رابی در خلأ. یک اتم که در حالت برانگیخته قرار دارد به درون کاواک فرستاده شده و به صورت همدوس به جذب و آزاد کردن فوتون میپردازد. سپس تعداد حالت‌های برانگیخته اتم بر حسب زمان در کاواک محاسبه میشود [۱۰]..... ۱۷
- شکل ۴-۱ (a) تراشهای از یک کاواک کوانتومی الکترودینامیکی که در حال پذیرفتن یک ابر از اتمهای سزیم به درون خود میباشد. با تاباندن لیزر به درون کاواک حالت اتم تشخیص داده میشود. (b) گسسته شدن طیف در خلأ که مشابه پاسخ یک مولکول با دو جفت سطح انرژی است که این دو سطح بر اساس قدرت پیوند از هم فاصله گرفته‌اند. (c) نمودار زمانی تابش کاواک که برای شمردن تعداد اتمهای درون آن مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]..... ۱۷
- شکل ۵-۱. نمودارهای ترازهای انرژی پس از برهمکنش موج و اتم. خطوط گسسته انرژیهای

هامیلتونی تزویج نشده و خطوط توپر انرژیهای سیستم تزویج شده کامل میباشند؛ چپ: موج و اتم در تزویج قوی قرار دارند. راست: سیستم در رژیم پاشندگی قرار دارد [۹]..... ۲۰

شکل ۶-۱. طیف یک کاواک کوانتومی الکتروپایه‌ای در رژیم پاشندگی قوی؛ راست: حول فرکانس اتم در تعداد فوتونهای مختلف. چپ: حول فرکانس رزوناتور؛ آبی: اتم در حالت برانگیخته، قرمز: پایه و سیاه: بدون اتم [۱۰]..... ۲۱

شکل ۷-۱. نواحی مختلف کاری برای یک سیستم تزویج شده موج و اتم [۱۴]..... ۲۲

شکل ۸-۱. (a) یک نقطه کوانتومی درون میکروپیلار از نیمههادیها (Ga-As و Al-As). (b) یک بلور فوتونی دو بعدی که به یک میکروپیلار تکیه داده شده است. (c) نمای بالا از یک بلور فوتونی. مکان کوانتوم دات پایین این سطح و درون ناخالصیها است [۱۷]-[۱۸]..... ۲۳

شکل ۱-۲ شرایط بروز خاصیت ابرسانی در عناصر جدول تناوبی [۱۹]..... ۲۵

شکل ۲-۲ دیاگرام سطوح انرژی در دماهای صفر و غیر صفر الف) نیمه‌رسانا (الکترونها همواره فرمیون) ب) ابررسانا (الکترونها در حالت بوزون و زوج کوپر در شکل ابرالکترون) [۲۰]..... ۳۰

شکل ۳-۲ پدیده تونلزی [۲۰]..... ۳۶

شکل ۴-۲ حالت‌های مختلف تونلزی [۲۱]..... ۳۷

شکل ۵-۲ تونلزی تک الکترونها در پیوند SIS [۲۱]..... ۳۸

شکل ۶-۲ تونلزی تک الکترونها در پیوند SIS در دمای غیر صفر [۲۱]..... ۳۸

شکل ۷-۲ مدل مداری پیوند جوزفسون..... ۴۳

شکل ۸-۲ جریان نرمالیزه  $I/I_c$  بر حسب ولتاژ نرمالیزه شده  $GV/I_c$ ..... ۴۷

شکل ۹-۲ منحنی مشخصه پیوندی با  $\beta_c = 4$ ..... ۴۷

شکل ۱-۳. یک مجموعه از بیت‌های کوانتومی مختلف. شکل اول، یک بیت کوانتومی بر پایه بار بر اساس جعبه زوج کوپر به همراه خواندن یک ترانزیستور تک الکترونی. شکل دوم، یک بیت کوانتومی

بار/فاز که جعبه زوج کوپری است که از طریق بار تحریک میشود، ولی متغیر خواندنی آن شار است. شکل سوم، یک بیت کوانتومی بر پایه فاز که هم متغیر کنترل و هم متغیر خواندنی آن فاز است. شکل چهارم، یک بیت کوانتومی بر پایه شار که جهت جریان، حالت کوانتومی آن است و شار متغیر خواندنی آن است [۱۰] و [۲۴]..... ۵۰

شکل ۲-۳. جعبه زوج کوپر به عنوان یک اتم قابل تنظیم. Cooper pair (جفت‌های دایره ای شکل سبز رنگ) میتوانند بین جزیره‌های آبی رنگی که توسط جوزفسون جانکشن به رنگ نارنجی از یکدیگر جدا شده‌اند، تحت تاثیر ولتاژ اعمالی به گیت (میدان الکتریکی  $E$ ) و جریان (شار جاری در حلقه) کانال بزنند. به جعبه زوج کوپر میتوان به عنوان یک اتم نگاه کرد که سطوح انرژی آن قابل تنظیم است. انرژی الکترواستاتیکی ( $E_c$ ) میتواند با اعمال یک میدان الکتریکی تغییر کند (شیفت Stark) و انرژی کانال زدن جوزفسون ( $E_J$ ) میتواند توسط یک میدان مغناطیسی (شیفت Zeeman) تنظیم شود. این سطوح برانگیختگی که پایین تر قرار دارند، به وسیله  $2\Delta$  gap مربوط به ابر رسانا از سطوح طبیعی و پیوسته الکترون‌ها محافظت میشوند [۱۰]..... ۵۳

شکل ۳-۳. اولین طراحی از یک کاواک کوانتومی الکترو دینامیکی ساخته شده از فیلم ابر رسانا. جعبه زوج کوپر (سبز) در مرکز رزوناتور موجبر (آبی) قرار دارد. فرکانس رزونانس در حدود ۵ گیگاهرتز است. کاواک از یک سمت کنترل میشود و از سمت مقابل سیگنال انتقال یافته انداز گیری میشود [۲۶]..... ۵۴

شکل ۴-۳. (a) تصویر نوری از رزوناتور خط انتقال ابر رسانای نایوبیوم است که بر روی سیلیکون نشانه شده است. (b) خازن تزویج. (c) تصویر میکروسکوپ الکترونی با رنگ آمیزی غیرواقعی؛ آبی: درون کاواک، بژ: روی سطح سیلیکونی و سبز: خط انتقال. جعبه زوج کوپر از دو جزیره آلومینیومی به رنگ آبی که توسط یک پیوند جوزفسون کوچک به یکدیگر متصل شده‌اند (قسمت هم پوشانی دو انگشت بر روی جزیره‌های باریک)، تشکیل شده است [۱۰] و [۲۴]..... ۵۶

شکل ۵-۳. انواع کیوبیتهای ابر رسانا؛ چپ: کیوبیت شار (flux qubit)، راست- بالا: کیوبیت بار

(charge qubit)، راست-پایین: کیوبیت فاز (phase qubit) [۲۴] و [۴۱]..... ۵۹

شکل ۳-۶. (a) مدل مداری یک کیوبیت ترانسمون. دو پیوند جوزفسون (با پارامترهای  $E_J$ ,  $C_J$  یکسان) با یک خازن بزرگ ( $C_B$ ) شانت شده‌اند. (b) شماتیک ساده شده طراحی کیوبیت ترانسمون [۲۷].

..... ۶۱

شکل ۳-۷. نمایی از یک کیوبیت با پیوند جوزفسون و تغییرات پتانسیل ایجاد شده بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند..... ۶۳

شکل ۳-۸. (a) یک کیوبیت فاز تک پیوندی ابررسانا: خازنها، جریانهای بایاس، تغییر حالت و اندازه‌گیری (b) تونل‌زنی از سد پتانسیل فازی و نمایی از حالت‌های کیوبیت پس از اعمال جریان اندازه‌گیری..... ۶۵

شکل ۴-۱. چگالی جریان محاسبه شده از سه روش. معادلات (۴-۶)، (۴-۹) و پاسخ دقیق (۴-۱۶) بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  و جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$ ..... ۷۴

شکل ۴-۲. نسبت تفاضل چگالی جریان دقیق و تقریبی معادلات (۴-۶) و (۴-۱۶) بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$  و عرض‌های پیوند  $L/\xi=0.85$ ، 0.60 و 0.35..... ۷۴

شکل ۵-۱. انرژی حالت‌های چاه پتانسیل تشکیل شده در پیوند جوزفسون برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$ ؛ بالا: هر سه حالت محبوس می‌باشند، پائین: حالت سوم نشتی است..... ۷۷

شکل ۵-۲. گسسته‌سازی مانع پتانسیل برای محاسبه تونل‌زنی حالت‌ها با استفاده از روش ماتریس انتقال..... ۷۸

شکل ۵-۳. معیارهای بهینه‌سازی..... ۷۹

شکل ۵-۴. نمودارهای فرضی قابل تصور تغییرات نرخ تونل‌زنی حالت‌های کیوبیت برای بیان دلیل تعریف معیار  $\mathcal{R}$ . (a): علیرغم اینکه مقدار تشابه اندازه‌گیری ( $\mathcal{F}$ ) واحد است، به دلیل حساسیت زیاد به تغییرات جریان اندازه‌گیری مناسب نیست. (b): اختلاف جریانها ( $\Delta I$ ) برابر است، منحنی سبز (کمرنگ)

- ارجح است چون حالت برانگیخته دوم طول عمر کمتری دارد. (c): در منحنی سیاه (پررنگ) تشابه به شدت افت کرده است (d): منحنی سیاه (پررنگ) تشابه بزرگتری دارد و همچنین حالت برانگیخته دوم نیز طول عمر کمتری دارد پس ارجح است. .... ۸۰
- شکل ۵-۵. احتمالات تونل زنی حالت های پایه کیوبیت بر حسب جریان اندازه گیری؛ خطوط پیوسته: نتایج عددی برای عرض پیوند  $L/\xi=0.02$ ، سطح مقطع  $A/\xi^2=100$  و جریان بایاس  $I_b/I_c=0.97$ ، دایره خالی: نتایج عملی برای حالت پایه، و دایره پر: نتایج عملی برای حالت برانگیخته. .... ۸۲
- شکل ۵-۶. احتمالات تونل زنی سه حالت اول بر حسب جریان اندازه گیری برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$  و عرض پیوند  $L/\xi=0.85$ ؛ خطوط تیره (آبی): محاسبات دقیق، و خطوط روشن (سبز): محاسبات تقریبی. .... ۸۲
- شکل ۵-۷. احتمالات تونل زنی بر حسب جریان اندازه گیری برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$ ، بالا: عرض پیوند  $L/\xi=0.25$ ، پائین: عرض پیوند  $L/\xi=0.85$ . .... ۸۳
- شکل ۵-۸. تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به عرض پیوند در جریان بایاس نرمالیزه  $I_b/I_c=0.915$  دایره های قرمز: پاسخ مرسوم تقریبی، مربع های آبی: پاسخ دقیق بر اساس راه حل جدید. .... ۸۵
- شکل ۵-۹. احتمالات تونل زنی بر حسب جریان اندازه گیری برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.385$ ، عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  و سطح مقطع  $A/\xi^2=0.5$ . .... ۸۸
- شکل ۵-۱۰. تغییرات معیارهای مقایسه و جریان بایاس اصلاح شده نسبت به سطح مقطع برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  دایره های قرمز: پاسخ مرسوم تقریبی، مربع های آبی: پاسخ دقیق بر اساس راه حل جدید. خط تو پر در (b) منحنی تطبیقی لگاریتمی می باشد. .... ۸۹
- شکل ۵-۱۱. نسبت تفاضل مقدار دقیق و تقریبی چگالی جریان بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند دارای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  و جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$  برای میدان های مغناطیسی ضعیف، متوسط و قوی. .... ۹۱

- شکل ۵-۱۲. احتمالات تونلزنی بر حسب جریان اندازه‌گیری برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی..... ۹۱
- شکل ۵-۱۳. تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به اندازه میدان مغناطیسی اعمالی در جریان بایاس نرمالیزه  $I_b/I_c=0.915$  و  $L/\xi=0.85$ . دایره‌های قرمز: پاسخ مرسوم تقریبی، مربعهای آبی: پاسخ دقیق بر اساس راهحل جدید..... ۹۲
- شکل ۵-۱۴. نمودار تغییرات چگالی جریان الکتریکی بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند هنگامی که میدان مغناطیسی با اندازه  $|A|^2=0.5$  در زوایای مختلف به پیوند اعمال شده است..... ۹۴
- شکل ۵-۱۵. احتمالات تونلزنی بر حسب جریان اندازه‌گیری هنگامی که میدان مغناطیسی با اندازه  $|A|^2=0.5$  در زوایای مختلف ( $\pi/2, 2\pi/3, \pi/3$ ) به پیوند اعمال شده است..... ۹۴
- شکل ۶-۱. (a) نمای ۳-بعدی و (b) نمای کانتور؛ از پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم بر حسب اختلاف فازهای کیوبیتهای A و B. خطوط نقطه‌چین دو راستایی را نشان می‌دهند که پتانسیل فازی بر اثر اعمال جریانهای اندازه‌گیری در جهت آنها خم می‌شود. فلش جهت تونلزنی احتمالی حالت را نشان می‌دهد اگر حالت کیوبیت  $|01\rangle_{AB}$  بوده باشد..... ۱۰۱
- شکل ۶-۲. دو کیوبیت تک پیوندی که توسط مدار تزویج کننده شامل یک خازن و یک DC-SQUID به یکدیگر متصل شده‌اند..... ۱۰۲
- شکل ۶-۳. پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم تزویجی توسط خازن تنها بر حسب نصف جمع  $x=(\phi_A+\phi_B)/2$  و نصف تفاضل  $y=(\phi_A-\phi_B)/2$  اختلاف فازهای کیوبیتهای A و B. (a) حالت سیستم در چاه پتانسیل محبوس است (قبل از اعمال جریانهای اندازه‌گیری) (b) جریان اندازه‌گیری کیوبیت B اعمال شده است اما جریان اندازه‌گیری کیوبیت A اعمال نشده است..... ۱۰۴
- شکل ۶-۴. پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم تزویجی پیشنهادی توسط مدار کمکی با پارامترهای  $\Phi_0/2\pi LI_0=0.1$  و  $\Phi_c=\Phi_0/\pi$ . (a) قبل از عملیات اندازه‌گیری (b) جریان اندازه‌گیری اعمال شده است.

فلش مسیر فرار حالت محبوس در چاه را نشان میدهد.....۱۰۵

شکل ۵-۶. نمای کانتور پتانسیل دو-بعدی قبل از عملیات اندازه‌گیری با پارامترهای

$\Phi_0/2\pi LI_0=0.025$  و  $\pi\Phi_e/\Phi_0=2$ . زاویه  $\theta$  تراژکتوری کمترین عمل را نشان میدهد.....۱۰۶

شکل ۶-۶. احتمالات تونل‌زنی برای حالت یک سیستم دوکیوبیتی بر حسب جریان اندازه‌گیری

نرمالیزه ( $I/I_0$ ) برای پارامترهای  $b=0.8$  و  $y_B=\phi_e/8=0.2$  خطوط آبی، سبز و قرمز به ترتیب متناظر با

احتمالات تونل‌زنی حالت‌های  $P_{esc}(|00\rangle)$ ،  $P_{esc}(|10\rangle)$  و  $P_{esc}(|11\rangle)$  میباشند. (a) با دو پالس جریان

اندازه‌گیری، (b) تک پالس جریان اندازه‌گیری در  $r=0.021$ .....۱۱۱

شکل ۷-۶. دو پیوند جوزفسون در این مدار به عنوان تک کیوبیت به هم تزویج شده‌اند. مقادیر خازن

پیوندها و خازن تزویجی به ترتیب برابر است با  $C_1=C_2=4.3pF$  و  $C=1000C_1$ . جریان اندازه‌گیری ( $I_z$ )

تنها به پیوند جوزفسون اصلی اعمال میشود.....۱۱۳

شکل ۸-۶. (a) نمای ۳-بعدی و (b) نمای کانتور؛ از پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم برای یک طراحی

تک کیوبیتی با دو پیوند جوزفسون تزویجی بر حسب اختلاف فاز های دو پیوند. در این شکل جریان

اندازه‌گیری به پیوند اصلی (A) اعمال شده است. فلش در (b) جهت تونل‌زنی احتمالی حالت را نشان

میدهد.....۱۱۵



## مقدمه

به دنبال پیشرفت‌های بسیاری که در زمینه علوم مختلف و تکنولوژی در زندگی بشر اتفاق افتاده است، تاکنون بشر توانسته است که ابزارهای بسیار مدرن برای رسیدن به اهداف لایتناهی خود تهیه کند. اما این نیازهای بشری که هیچ‌گاه خاتمه نمی‌یابد همواره در صدد بهبود و پیشرفت وسایل خود می‌باشد. یکی از مهم‌ترین و پیشرفته‌ترین آنها، ابزارها و وسایل محاسباتی همچون رایانه‌ها می‌باشند که سریع‌ترین آنها در چند سال اخیر با توجه به رشد و پیشرفت سریع تکنولوژی نیمه‌هادی ساخته شده‌اند.

اما هنوز مشکلات بزرگی پیش روی بشر می‌باشند که رایانه‌های امروزی پاسخ‌گوی این نیازها نیستند. دو مورد بسیار مهم که در رایانه‌های امروزی ضعف محسوب می‌شود؛ یکی مسئله سرعت انجام محاسبات است که با توجه به حد نهائی تکنولوژی ساخت ادوات نیمه‌هادی و رسیدن به ابعاد نزدیک اتم، با در نظر گرفتن محدودیت‌های علم الکترونیک، که مهمترین آنها تحرک (Mobility) بار در ابعاد تکنولوژیکی است، دیگر نمی‌توان به سرعت‌های بسیار بالاتر امیدوار بود، و دوم حل برخی مسایل بسیار

پیچیده موجود است که اگر بخواهیم با اینگونه رایانه‌ها انجام دهیم، سال‌ها و بلکه قرن‌ها طول خواهد کشید، درحالی‌که با توجه به اصول علم کوانتوم و برخی الگوریتم‌های معرفی شده مربوطه، این مسایل در مدت زمان بسیار کمتر به نتیجه خواهد رسید که این امر در حل برخی مسایل استراتژیک مانند شکستن رمزهای بسیار پیشرفته نیز کاربرد خواهند داشت.

این دو امر بسیار مهم باعث شده‌اند که بسیاری از دانشمندان به خصوص در زمینه فیزیک و الکترونیک به این موضوع پرداخته و با تمام نیرو در جهت ساخت یک رایانه کوانتومی تلاش بنمایند. با رشد و پیشرفت نسبی این شاخه که آن را با نام اطلاعات و یا محاسبات کوانتومی می‌شناسیم، دانشگاه‌ها، مؤسسات، شرکت‌ها و حتی کشورهای بزرگ حساسیت موضوع را درک نموده و درصدد می‌باشند تا هرچه سریع‌تر به دانش و تکنولوژی این امر دست یابند.

بدون تردید نقطه شروع طراحی هر رایانه تک عنصر حافظه یا به اصطلاح بیت (bit) می‌باشد که در رایانه‌های کلاسیک دو مقدار برای آن قابل تصور است و برای سادگی به صورت صفر (۰) و یک (۱) بیان می‌شود. اما در رایانه‌های کوانتومی به منظور بهره‌گیری از اصول کوانتوم به بیت کوانتومی نیاز است که این بیت از دو حالت (State) خالص (Pure)  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  تشکیل شده است ولی به طور کلی در یک زمان خاص به شکل برهم‌نهی (superposition) از این دو حالت  $(\frac{a|0\rangle + b|1\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2}})$  وجود خواهد داشت.

همان‌طوریکه می‌دانیم هر سیستمی (از دیدگاه کوانتومی) در ابعاد محدود، دارای طیف انرژی گسسته‌ای است که هر سطح (Level) انرژی متناظر با حالت خاصی است. بنابراین می‌توان گفت که بیت‌های کوانتومی همواره کنار ما در طبیعت وجود دارند. اما معمولاً در طبیعت (ابعاد بزرگ) تعداد زیادی از این طبقات انرژی و بسیار نزدیک به هم وجود خواهند داشت و هنگامی که انرژی موجود در

سیستم بسیار بزرگ باشد، حالت کل سیستم به شکل ترکیبی از تعداد زیادی از این حالت‌ها می‌باشد، در حالی‌که در بیت کوانتومی یک سیستم دوحالته قابل تفکیک مدنظر است. بر این اصل، تحقیقات و پیشنهادات مختلفی برای طراحی و ساخت بیت‌های کوانتومی در سال‌های اخیر از سوی دانشمندان و محققین ارایه شده‌است و همگی سعی کرده‌اند که بهترین بیت کوانتومی با خاصیت مذکور را معرفی نمایند.

توجه به این نکته مهم است که تنها معرفی و ساخت یک سیستم کوانتومی دو حالت با خاصیت فوق کافی نمی‌باشد، بلکه مهمتر از آن امکان ایجاد تغییر در حالت سیستم به شکل دلخواه و همچنین خواندن (استخراج) حالت (اطلاعات) سیستم نیز دو مسئله اساسی در طراحی بیت‌های کوانتومی می‌باشند. بنابراین بهترین بیت‌های کوانتومی آنهایی می‌باشند که این دو امر (نوشتن و خواندن) در آنها به ساده‌ترین و مؤثرترین شکل، ممکن باشد. مهمترین پارامترهای یک کیوبیت، سیستم کنترلی آسان، مدار اندازه‌گیری دقیق، امکان اعمال گیت‌های لازم و هماهنگی با سیستمهای انتقال اطلاعات می‌باشد.

تعالی در دانش، اغلب حاصل به کارگیری قوانین و تکنیک‌های بین رشته‌هایی است که در ظاهر کاملاً از هم جدا و منفک می‌باشند. معمولاً این تبادله‌ها، هر دو رشته را در مسیری جدید قرار می‌دهد. مدارهای کوانتومی الکترودینامیکی (مدارهای نداخلی نور و ماده) مثالی از این موضوع می‌باشد. در این پروژه پا را فراتر نهاده و به سراغ مدارهای کوانتومی الکترودینامیکی ابررسانا می‌رویم. در واقع کیوبیت-های ابررسانا برای تحقق بخشیدن سنگ‌بنای کامپیوترهای کوانتومی انتخاب شده‌اند. همانطور که از نام آن پیداست، پیچیدگی‌های بسیاری در این وادی وجود دارد که سعی شده است تا حد توان به ابعاد مختلف آن پرداخته شود.

چون رفتار این مدارها مشابه اتم‌های مطرح در اپتیک کوانتومی است، با استفاده از تکنیک‌های فیزیک اتمی، کارایی این گونه مدارها بهبود بخشیده شده و راه‌های نوین برای تزویج بیت‌های کوانتومی ارائه می‌شود. تفاوت این اتم‌های مصنوعی با اتم‌های ساده در خواص بهتر و قابلیت کنترل آنها می‌باشد، که امکان پیاده‌سازی موثرتر کیوبیت‌ها را فراهم می‌آورد.

اما چرا ابررسانا؟ پیوندهای جوزفسون در پدیده ابررسانایی مثال بارزی از خواص کوانتومی ماکروسکوپی هستند و همزمان کاربردهای بسیاری را در زمینه الکترونیک فراهم آورده‌اند. اکثر ادوات الکترونیک ابررسانا از این خاصیت کوانتومی ماکروسکوپی و یک پدیده بنیادین دیگر در ابررساناها یعنی کوانتش شار استفاده می‌کنند. ترکیب این دو پدیده به همراه رسانایی بی‌نهایت (مقاومت صفر) در حالت ابررسانایی بستری بسیار مناسب برای طراحی مدارهای نوین فراهم آورده است.

یکی از کاربردهای ابررسانایی که به این پروژه بسیار نزدیک است، گیت‌های منطقی کلاسیک ابررسانا هستند که تا کنون در پیکربندیهای گوناگون ساخته شده‌اند. منطق تک شاره کوانتومی سریع ( $RSFQL^1$ ) تا کنون در این حوزه پیشرو است. از ویژگیهای بارز مدارهای RSFQ میتوان به این نکته اشاره کرد که انرژی لازم برای نوشتن و یا ذخیره یک بیت داده، یا انجام یک عملیات منطقی چندین مرتبه از ادوات نیمه رسانا کوچکتر است. که این منجر به تولید گرمای بسیار کمی می‌شود و در نتیجه می‌توان سرعت عملکرد و چگالی پیوندها را در تراشه افزایش داد.

---

<sup>1</sup> Rapid Single Flux Quantum Logic

در ضمن توجه به این نکته ضروری است که با توجه به توضیحات فوق، تا حد بسیار خوبی امکان ساخت قطعات و مدارهای پیچیده ابررسانا با تکنولوژی در دسترس پژوهشگران ایرانی، فراهم است و این خود می تواند انگیزه مضاعفی برای تحقیق و تفحص در این زمینه باشد.

## ساختار پایان نامه

در فصل اول، به مطالعه مختصری از تئوری اطلاعات کوانتومی و در ادامه محاسبات کوانتومی می پردازیم و با اصول اولیه رایانه های کوانتومی به خصوص خواص مورد نیاز یک بیت کوانتومی ساده آشنا می شویم.

در فصل دوم به بررسی پدیده ابررسانایی پرداخته و در حد نیاز آن را معرفی می نماییم. خلاصه ای از مدل های ارائه شده برای توصیف خواص ابررساناها را بیان خواهیم کرد. همچنین به تشریح پدیده جوزفسون در اتصال ابررسانا-نرمال-ابررسانا خواهیم پرداخت و نتایج تحلیلی حاصل از مدل های بیان شده برای پیوند جوزفسون را ذکر می کنیم.

موضوع فصل سوم را بیت های کوانتومی ابررسانا قرار داده ایم. در این فصل از مطالبی که در دو فصل گذشته فرا گرفتیم استفاده نموده و ابتدا ساخت مفهومی بیت های کوانتومی در ابررسانا را بیان نموده و سپس انواع کیوبیت ها و طرز کار آنها را تا حد امکان شرح می دهیم. در نهایت به طور خاص راجع به کیوبیت فاز و خواص آن تمرکز بیشتری خواهیم داشت.

در فصل چهارم راه حل جدیدی برای بدست آوردن دقیق چگالی جریان الکتریکی در پیوندهای جوزفسون ارائه خواهیم کرد. به ازای پارامترهای مختلف آن را محاسبه کرده و بر روی تغییرات آن بحث

خواهیم نمود.

در فصل پنجم با توجه به نتایج دقیق بدست آمده در فصل قبلی، کیوبیت فاز ساخته شده توسط پیوند جوزفسون را به شکل دقیق تحلیل می‌کنیم. و با تعریف معیارهای مقایسه منطقی، اثر پارامترهای مختلف بر روی عملکرد کیوبیت به خصوص در مرحله اندازه‌گیری را بررسی می‌کنیم.

در فصل ششم از این نوشتار، سیستم‌های دوکیوبیتی فاز مورد بررسی قرار خواهند گرفت. درهم-تیدگی، کنترل و اندازه‌گیری حالت سیستم مطالعه شده و طرحی جدید برای اندازه‌گیری موثرتر حالت سیستم ارائه می‌شود. همچنین یک طراحی نوین از سیستم تک کیوبیتی توسط مفاهیم ارائه شده مطرح می‌شود که دارای خواص بهتری در مقایسه با کیوبیت‌های تک پیوندی از خود نشان می‌دهد.

فصل هفتم نیز شامل نتیجه‌گیری از مباحث این پایان‌نامه و پیشنهاداتی برای ادامه‌ی تحقیقات در این

زمینه می‌باشد.

## فصل ۱ مروری بر محاسبات کوانتومی<sup>۱</sup>

### ۱-۱ مقدمه

در این بخش ابتدا معرفی مختصری از محاسبات کوانتومی و مباحث مرتبط با آن خواهیم داشت و سپس مقدمات لازم برای رسیدن به یک مدار بیت کوانتومی مناسب بیان می‌گردد. مهمترین هدف این فصل آشنایی با کیوبیت‌ها می‌باشد که پس از معرفی آنها و طرز عملکردشان، به مقایسه آنها می‌پردازیم. در ادامه با محیطی مناسب برای مشاهده پدیده‌های کوانتومی آشنا می‌شویم و چگونگی کنترل خواص کوانتومی در داخل این محیط را فرا می‌گیریم.

---

<sup>1</sup> Quantum Computation

## ۲-۱ اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی

اطلاعات ذاتا یک کمیت فیزیکی است و قوانین فیزیکی حاکم بر اطلاعات، همان قوانین فیزیکی حاکم بر تمام مواد است [۱]. مفهوم کامپیوتر به عنوان پاسخی به سوال‌های پایه ای انسان در مورد اطلاعات معرفی شد. سوال‌هایی مانند اینکه کامپیوتر چه مسایلی می‌تواند حل کند و چه مسایلی را نمی‌تواند. ایده کامپیوتر کوانتومی از مطالعه ترمودینامیک محاسبات به وجود آمد و پرسیدن این سوال که اطلاعات، در دنیایی که با مکانیک کوانتومی توصیف می‌شود چیست [۲]. دنیایی که به وضوح در آن تصادفی بودن و ناموضعی بودن ذاتی وجود دارد. هدف یک کامپیوتر کوانتومی را می‌توان به عنوان راهی برای ارتقاء تکنولوژی کامپیوترهای کنونی، یا شبیه سازی مکانیک کوانتومی، یا به سادگی وسیله ای برای پل زدن بین رشته‌های جدا از هم تلقی کرد [۳].

در سال ۱۹۸۵، David Deutsch الگوریتم ساده‌ای را ارائه کرد که نشان می‌داد با استفاده از اطلاعات کوانتومی می‌توان ذاتا مسئله مدل شده را سریع تر از روش‌های کلاسیکی حل کرد [۴]. اگر چه مسئله مورد بررسی، بسیار خاص بود، اما این اولین مثال بود که نشان می‌داد که فیزیک غنی تری که در یک کامپیوتر کوانتومی وجود دارد، می‌تواند این امکان را به آن بدهد که از یک کامپیوتر کلاسیک سریع تر کار کند. سپس در سال ۱۹۹۴، Peter Shor الگوریتمی کوانتومی ارائه کرد که بر پایه آن می‌شود از اعداد بزرگ فاکتورگیری نمود یا از آنها لگاریتم گرفت با سرعتی به مقیاس محاسباتی  $n^2$  در مقایسه با  $\sqrt[3]{e^n}$  در روش‌های کلاسیک مرسوم کامپیوترهای کلاسیک که بسیار بیشتر است [۵]. این دو مسئله قدیمی محاسباتی به صورت خاص بسیار مهم بودند، چرا که به اصطلاح یک طرفه هستند، یعنی می‌توان چند عدد را در هم ضرب کرد و عدد بزرگی به وجود آورد و در عین حال فاکتورهای آن را دانست، اما در صورتی که عدد بزرگی داده شود و فاکتورهای آن خواسته شود، مسئله‌ای بسیار دشوار خواهد بود.



سرعت بهترین الگوریتم‌های کلاسیک به صورت نمایی به تعداد بیت‌های عدد وابسته است. در نتیجه به سادگی می‌توان اعداد با صدها رقم را در هم ضرب کرد و جواب را بلافاصله به دست آورد، اما فاکتور گرفتن از این اعداد به اندازه عمر تمام جهان خواهد برد. از آسانی ضرب کردن و دشواری فاکتور گرفتن استفاده شده تا روش <sup>1</sup>RSA در سیستم‌های رمزنگاری به وجود بیاید. این ایده که یک کامپیوتر کوانتومی می‌تواند حمله موفقی به سیستم‌های رمز شده بر مبنای RSA و دیگر روش‌های مشابه انجام دهد، توجه بسیاری را به تئوری و ساخت کامپیوترهای کوانتومی معطوف کرده است. از آن زمان تا کنون، الگوریتم‌های جدیدتری معرفی شده‌اند که از مهمترین آنها می‌توان به الگوریتم جستجوی Grover در سال ۱۹۹۶ اشاره کرد که زمان جستجوی یک ساختمان از داده‌های نامرتب را به جذر چهارم تقلیل می‌دهد [۶].

مبنای فیزیکی اطلاعات نه تنها باعث می‌شود که سیستم‌های کنونی رمزنگاری محکوم به شکست باشند، بلکه این توانایی را می‌دهد که سیستم‌های جدید رمزنگاری به وجود بیایند که بر پایه مسئله‌های یک طرفه نیستند، بلکه بر پایه محدودیت‌های اندازه‌گیری بیان شده توسط مکانیک کوانتومی هستند. چنانچه این سیستم‌ها پیاده‌سازی شوند، با دانش فیزیکی که در حال حاضر در اختیار ما هست، قابل شکستن نیستند. سیستم‌های رمزنگاری کوانتومی اکنون به وجود آمده‌اند و حتی به صورت تجاری به فروش می‌رسند [۷].

به غیر از رمزنگاری که به امنیت ملی مرتبط است و نقش کلیدی در مطالعه پیچیدگی‌های محاسباتی

---

<sup>1</sup> Rivest Shamir Adelman

دارد، کاربرد مهم دیگری برای محاسبات کوانتومی وجود دارد که اگر بخواهیم از بعضی از آنها نام ببریم، می‌توان به شبیه سازی فیزیک کوانتومی اشاره کرد. دست کامپیوترهای کلاسیکی برای شبیه سازی سیستم‌های کوانتومی بسته است و حتی زیر بار محاسبات سیستم‌هایی که درجات آزادی محدودی دارند خم می‌شوند. Richard Feynman در سال ۱۹۸۲ به این محدودیت اشاره کرد و اظهار کرد که ممکن است بتوان با کامپیوترهای کوانتومی بر این محدودیت فائق آمد [۸]. برای سیستم‌های کوانتومی بسیار کوچک که درجات آزادی محدودی دارند، توان محاسباتی بالا می‌تواند در شناخت کلیدی ترین مسایل فیزیکی آن سیستم به ما کمک کند.

برای سیستم‌های کوانتومی بزرگ با درجات آزادی زیاد که شامل میلیون‌ها ذره می‌شوند، به طور معمول می‌توان از نوسانات جزئی صرف نظر کرد. رفتار متوسط را می‌توان با عبارات‌های کلاسیکی و تعداد محدودی پارامتر که از در نظر گرفتن مکانیک کوانتومی به دست آمده توصیف کرد. اگر چه، رده بزرگی از مسایل فیزیکی وجود دارد که برای حل آنها نمی‌توان از این روش‌ها و ساده‌سازی‌ها یاری جست. این رده از مسایل در بعضی رشته‌ها مانند فیزیک اتمی، فیزیکی هسته ای و شیمی بسیار مهم اند. اگر کامپیوتری بتواند از قوانین اولیه رفتار بدنه اصلی سیستم را پیش بینی کند، می‌تواند انقلابی در هر جنبه از تکنولوژی به پا کند. به همین دلیل است که در دهه گذشته تلاش‌های فراوانی برای نیل به ابزارالات رایانه کوانتومی انجام گرفته و می‌توان گفت که گام‌های موثری در این مسیر برداشته شده است.

### ۳-۱ بیت کوانتومی (Qubit) و پیاده سازی آن

یک کامپیوتر کلاسیک همواره از بیت‌هایی تشکیل شده است که اطلاعات را ذخیره می‌کند و گیت‌هایی که بر روی آن بیت‌ها عمل می‌کنند در نهایت الگوریتم مورد نظر را پیاده‌سازی می‌کنند [۹]. برای ساخت کامپیوتر کوانتومی باید ابتدا این عناصر پایه ای را بسازیم. یک بیت کلاسیکی می‌تواند با استفاده از هر سیستمی با دو حالت ساخته شود، مثل یک سکه یا یک ترانزیستور MOSFET. واضحاً ترانزیستور انتخاب برتری برای بیشتر کاربردها است که به طور ساده این امر به دلیل قابلیت مجتمع‌سازی و سرعت مناسب آن می‌باشد. به صورت مشابه، یک بیت کوانتومی یا Qubit می‌تواند از هر سیستم کوانتومی دو حالتی ساخته شود.

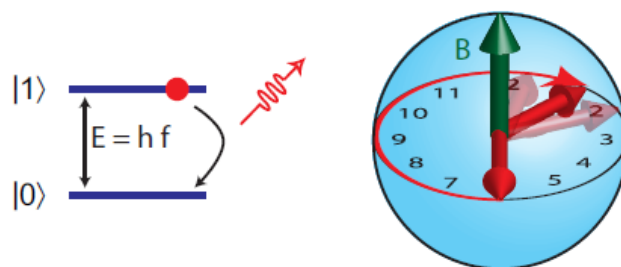
مهمترین پیش نیاز یک سیستم فیزیکی برای این که برای این منظور مورد مطالعه قرار بگیرد، کنترل پذیر بودن آن است. به این معنا که برای آزمایش‌گر آسان باشد که چندین بیت کوانتومی را با هم کوپل کند و اندازه‌گیری کند. چیزی که هنوز بسیار چالش برانگیز است این است که حالت کوانتومی سیستم هم‌دوس<sup>۱</sup> باشد به این معنا که از میرا<sup>۲</sup> شدن و فازگریزی<sup>۳</sup> برحذر باشد. یعنی مشابه حالت کلاسیک که وقتی حالت بیت به صورت ۱ قرار داده می‌شود و سپس به حال خود رها می‌گردد، در طول زمان تغییر نکند که در آن صورت حالت بیت یا بی‌معنی خواهد بود و یا به حالت ۰ تبدیل شده است. برای توصیف یک بیت کوانتومی، می‌توان مثال یک ساعت را مطرح کرد. فرض کنید که اسپین یک ذره

<sup>۱</sup> Coherent

<sup>۲</sup> Decay

<sup>۳</sup> Dephasing

را که از لحاظ کوانتومی دارای دو سطح انرژی است، به عنوان بیت کوانتومی خود در نظر گرفته ایم. اسپین به تدریج و با توجه به قوانین مکانیک کوانتومی تغییر می کند. جهتی که اسپین به آن اشاره می کند، می تواند نشان دهنده زمان باشد و این جهت روی یک صفحه دایره ای در حال چرخش است. اگر نویزی به این بیت کوانتومی، چه از داخل و چه از خارج وارد شود، باعث از دست رفتن کنترل زمان می شود (شکل ۱-۱). به همین دلیل است که ارتباط زیادی بین مطالعه ساعت اتمی و بیت کوانتومی وجود دارد.



شکل ۱-۱ - هر دو سطحی از انرژی می تواند به عنوان یک بیت کوانتومی استفاده شود. سطح ۰ وقتی اتفاق می افتد که بیت کوانتومی میرا شده و پس از مدتی سقوط می کند. وقتی به صورت جمع آثار به بیت کوانتومی نگاه کنیم، فاز حالت در فرکانسی که با توجه به اختلاف انرژی دو سطح تعیین می شود، تغییر می کند. اگر این انرژی در طول زمان تغییر کند (به دلیل نویز یا اغتشاش در سیستم) سرعت ساعت تغییر خواهد کرد و باعث از دست رفتن حساب زمان خواهد شد [۱۰].

برای اینکه جلوی خارج شدن سیستم از همدوسی گرفته شود عناصر کامپیوتر کوانتومی باید از منابع نویز ایزوله شوند و در عین حال، به صورت قوی به هم دیگر کوپل شده باشند و همه اینها در حالتی است که توسط یک آزمایشگر کلاسیک اندازه گیری می شوند. این پیش نیازهای تقریباً متضاد، سبب می شود که چالش مشترکی در همه آزمایش های مربوط به محاسبات کوانتومی به وجود بیاید و انبوهی از ایده های مختلف از دیدگاه های مختلف به سمت این موضوع و راه حل های آن جاری ساخته است. با استفاده از مدارهای ابررسانایی، می توانیم به مطالعه حوزه هایی بپردازیم که دسترسی به آنها در سیستم های اتمی در ساختارهای دیگر سخت یا ناممکن است.

## ۴-۱ کاواک کوانتومی الکترودینامیکی (Cavity Quantum Electrodynamics)

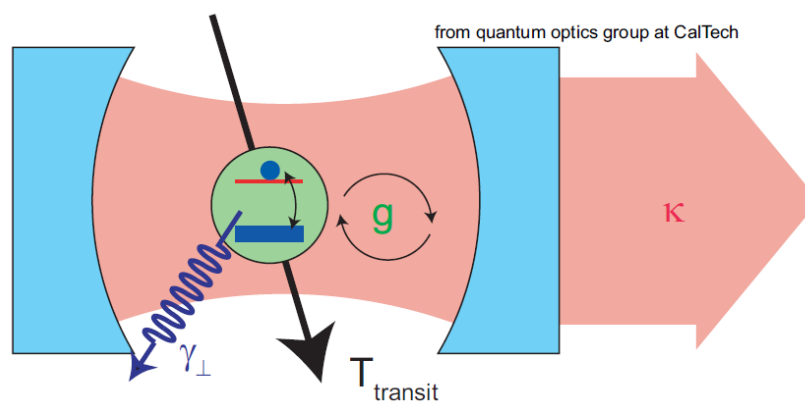
همانطور که می‌دانیم، میدان الکترومغناطیسی، اگر چه طبیعتی موج گونه دارد، از بسته‌های مجزایی به نام فوتون تشکیل شده است. این منبع توصیف بسیاری از خواص پدیده‌های کوانتومی است مانند توضیح رنگ یک جسم داغ مثل خورشید و اینکه در مواد کریستالی الکترون‌ها چگونه بین ترازها جابجا شده و تنها نوری در یک فرکانس معین از خود ساطع می‌کنند. توزیع انرژی هم در زمان و هم در مکان وابسته به شرایط مرزی است و همچنین توسط آن قابل کنترل است. چگونه ماده با نور در سطح یک فوتون تنها برهم کنش می‌کند؟ کوانتوم اپتیک که به مطالعه خواص کوانتومی نور می‌پردازد، در تلاش برای پاسخ به این گونه سوال‌ها است.

همان گونه که ممکن است که بیتی ساخته شود که ذاتا کوانتومی است، می‌توان حالت‌هایی از نور در نظر گرفت که توصیف کلاسیکی نداشته باشند. هر دوی حالت‌های کلاسیکی و کوانتومی، نویزی ذاتی را دارا می‌باشند. اما می‌توان با استفاده از کوانتوم اپتیک، این نویز را به گونه ای توزیع کرد که نویز در پارامتری کمتر شده باشد با این هزینه که در پارامتر دیگری بیشتر شده است. این حالت‌های فشرده شده را می‌توان برای اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق و همچنین کاربرد در انتقال اطلاعات کوانتومی استفاده کرد.

اولین راهی که ممکن است برای تولید تک فوتون به ذهن برسد، این است که یک منبع نور انتخاب شود و آن قدر تضعیف شود که به صورت میانگین تنها یک فوتون باقی بماند. اگرچه، به رغم داشتن یک فوتون به صورت متوسط، یک حالت کلاسیکی تضعیف شده کماکان بسیاری از طبیعت کلاسیکی خود را حفظ می‌کند و همچنین زمان تولید این تک فوتون مشخص نیست. برای داشتن یک فوتون تنها، نیاز به یک سیستم غیرخطی هست. به صورت ایده آل سیستمی با تنها دو حالت، مانند یک اتم تنها مورد

نیاز است. اگر این اتم برانگیخته شود، پس از مدتی به حالت پایه باز می‌گردد و دقیقاً یک فوتون ساطع خواهد شد. معمولاً، سطح مقطع (میزان تداخل) یک اتم و یک فوتون به شدت کوچک است و در نتیجه مشاهده برهم کنش آنها آسان نخواهد بود.

کاواک کوانتومی الکتروپوینامیکی ابزاری به دست می‌دهد که بر اساس آن می‌توان بر این دشواری-های تکنیکی فائق آمد [۱۱]. نمونه این سیستم، اتمی است دو حالتی که به یک نوسان‌ساز (کاواک) تزویج شده است (شکل ۲-۱). هنگامی که یک اتم به محیط الکترومغناطیسی پیرامون خود کوپل می‌شود، نویزی که حتی در محیط خلأ حاضر است، باعث می‌شود که اتم بدون این که بتوانیم کنترل کنیم برانگیخته شود و پس از آن فوتونی را ساطع کند. در کاواک کوانتومی الکتروپوینامیکی محیطی متفاوت به وجود آمده است که در آن کاواک مانند یک اتاق آینه عمل می‌کند و فوتون بارها و بارها، انعکاس پیدا می‌کند. در نتیجه کاواک این شانس را به فوتون می‌دهد که بارها از کنار اتم عبور کند و شانس برهم‌کنش با اتم را افزایش می‌دهد. همانطور که می‌دانیم تنها فوتون‌هایی با انرژی‌های (بسامدهای) خاص در رزوناتور باقی می‌مانند.



شکل ۲-۱. یک اتم دوحالتی که با موج داخل کاواک برهم‌کنش دارد. نرخ برهم‌کنش هم‌دوس  $g$ ، نرخ خروج فوتون  $K$ ، نرخ میرایی ناخواسته اتم برابر  $\gamma_{\perp}$  و نرخ تغییر حالت اتم برابر  $1/T$  می‌باشد [۱۲].

چنانچه فرکانس مربوط به اتم و کاواک یکسان نباشند (محدوده پاشندگی<sup>۱</sup>)، فوتون آزاد شده درون کاواک مدت زیادی باقی نخواهد ماند؛ در عمل یا از کاواک خارج شده و یا در محیط میرا (جذب) می-شود. در این صورت، اتم برای زمان خیلی بیشتری نسبت به فضای آزاد همدوس باقی می ماند. نرخ خروج فوتون از سیستم را  $\kappa$  می نامیم که ارتباط معکوس با ضریب کیفیت رزوناتور ( $Q = \omega_r / \kappa$ ) دارد. مشخصا این ضریب توسط آینه های دو طرف کاواک قابل تنظیم می باشد و برای تشخیص اتفاقات داخلی، بایستی مقدار قابل قبولی از موج برای حسگرهای بیرونی، از کاواک خارج شود.

هنگامی که اتم و کاواک با هم در رزونانس باشند و کاواک به گونه ای طراحی شده باشد که نشت<sup>۲</sup> داشته باشد، اتم می تواند حتی سریع تر از حالت تنها (فضای آزاد) میرا شود. در این شرایط برهم کنش اتم و فوتون زیاد است و در اولین فرصت اطلاعات خود را به فوتون داده و یا بالعکس از فوتون تحویل می گیرد اما از آنجائیکه فوتون به سرعت از کاواک خارج می شود، اطلاعات نیز همراه آن خارج خواهد شد. پارامتر  $g$  نرخ برهم کنش بین اتم و فوتون می باشد.

پارامتر دیگری که در کنار  $\kappa$ ، باعث عدم همدوسی می شود،  $\gamma_{\perp}$  می باشد که بیانگر نرخ میرایی اتم به مدهای غیر تابشی و یا مدهای جانبی غیر رزونانسی است. در کنار تمامی این پارامترها نرخ تغییر حالت اتم و یا زمان خارج شدن از کاواک (طول عمر متوسط) برابر  $1/T_{\text{transit}}$  می باشد.

حال اگر این دو با هم رزونانس داشته باشند و نشت کاواک بسیار کم باشد

<sup>۱</sup> Dispersive limit

<sup>۲</sup> Leaky resonator

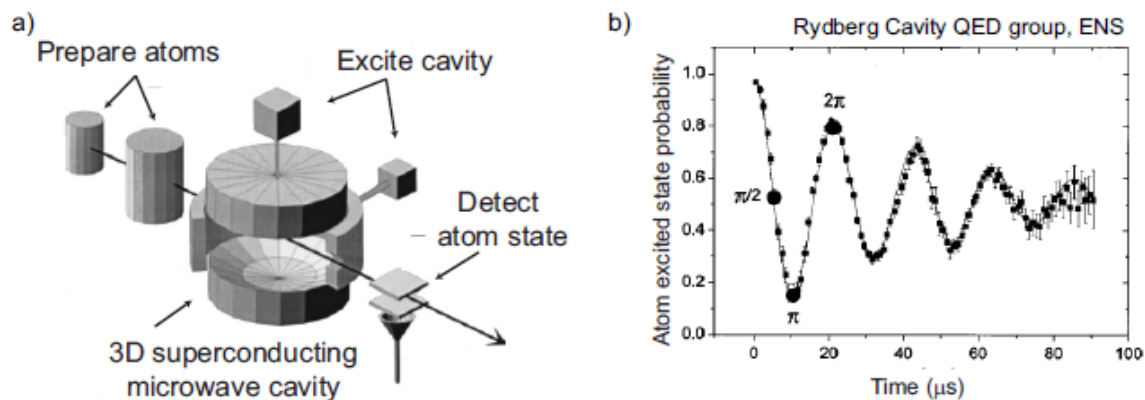
( $g > \kappa, \gamma_{\perp}, 1/T_{\text{transit}}$ )، به حد تزویج قوی<sup>۱</sup> می‌رسیم که یک اتم می‌تواند بارها و بارها یک تک فوتون را ساطع کند و دوباره آن را جذب کند قبل از اینکه اتم به طور کلی تغییر حالت دهد و یا فوتون فرصت آن را داشته باشد که بگریزد. کاواک کوانتومی الکترودینامیکی این امکان را به ما می‌دهد که با کاهش و یا افزایش پارامترهای مدار، این پدیده اسرارآمیز کوانتومی را مهندسی و مطالعه کنیم.

فرآیند فوق، که نوسانی است بین وجود فوتون و حالت اتمی برانگیخته، با نام نوسان رابی در خلأ<sup>۲</sup> شناخته می‌شود (شکل ۳-۱ را ببینید). نحوه دیگر نگرش به این پدیده شباهت آن به حالتی است که در آن دو اتم، الکترونی را در یک مولکول به اشتراک می‌گذارند، با این تفاوت که در اینجا یک اتم و کاواک هستند که یک کوانتوم از انرژی را به اشتراک می‌گذارند. مشابه یک مولکول دو اتمی، این سیستم دارای دو حالت شبیه به یک اربیتال پیوندی و یک اربیتال غیرپیوندی است که می‌توان از طریق طیف نگاری و مشاهده انرژی فوتون‌هایی که مجاز به بالا و پایین رفتن در این سطوح کاواک و اتم هستند، اندازه‌گیری کرد. (شکل ۴-۱ را ببینید).

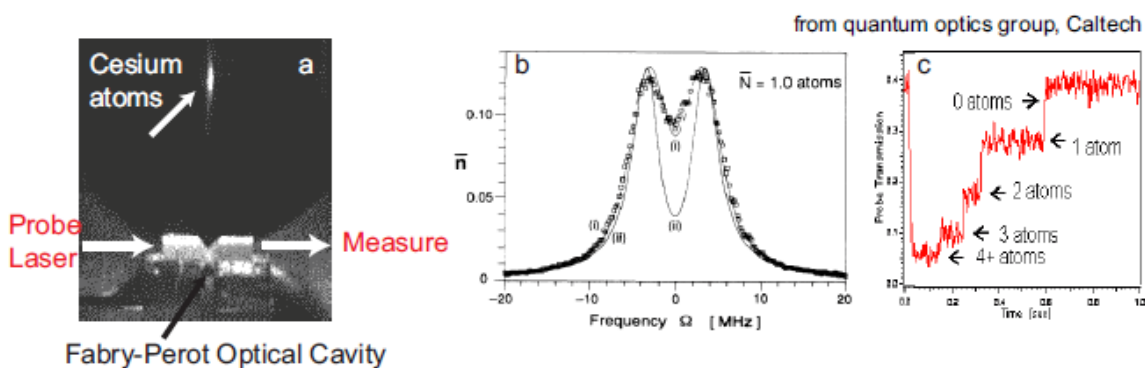
<sup>۱</sup> Strong coupling limit

<sup>۲</sup> Vacuum Rabi oscillation





شکل ۳-۱ (a) مدلی از سیستم کوانتومی الکتروپنایمیکی اتم‌های ریدبرگ<sup>۱</sup>. ابتدا اتم‌ها در حالت برانگیخته ریدبرگ قرار می‌گیرند. سپس در حالت اولیه قرار می‌گیرند و از فیلتر به سرعت می‌گذرند. وارد یک کاواک مایکروویو که تا نزدیکی یک درجه کلین سرد شده می‌شوند و با فوتون‌های درون آن برهم‌کنش انجام می‌دهند. در نهایت حالت اتم‌ها، با پلاریزاسیون انتخابی اندازه‌گیری می‌شود. (b) نوسان رابی در خلأ. یک اتم که در حالت برانگیخته قرار دارد به درون کاواک فرستاده شده و به صورت همدوس به جذب و آزاد کردن فوتون می‌پردازد. سپس تعداد حالت‌های برانگیخته اتم بر حسب زمان در کاواک محاسبه می‌شود [۱۰].



شکل ۴-۱ (a) تراش‌های از یک کاواک کوانتومی الکتروپنایمیکی که در حال پذیرفتن یک ابر از اتم‌های سزیم به درون خود می‌باشد. با تاباندن لیزر به درون کاواک حالت اتم تشخیص داده می‌شود. (b) گسسته شدن طیف در خلأ که مشابه پاسخ یک مولکول با دو جفت سطح انرژی است که این دو سطح بر اساس قدرت پیوند از هم فاصله گرفته‌اند. (c) نمودار زمانی تابش کاواک که برای شمردن تعداد اتم‌های درون آن مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰].

<sup>1</sup> Rydberg atoms

پس از اینکه اتم به درون کاواک افتاد، اندکی خصوصیات آن را تغییر می‌دهد که با تاباندن لیزر به درون کاواک قابل فهمیدن است. این موضوع، این قابلیت را به ما می‌دهد که تعداد اتم‌های درون کاواک را بتوانیم بشماریم و حتی حالت یک اتم تنها را متوجه بشویم. یک روش مشابه در این پژوهش استفاده شده است.

### ۱-۴-۱ معادلات کوانتومی برهم‌کنش موج (نور) و اتم (ماده)

هنگامی که موج به اتم تابانده می‌شود، می‌توان با توجه به انرژی‌های موجود هامیلتونی سیستم را که به هامیلتونی جینز-کامینگز<sup>۱</sup> معروف است، به صورت زیر بیان نمود:

$$H_{JC} = \hbar\omega_r \left( a^\dagger a + 1/2 \right) + \hbar \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g \left( a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+ \right) \quad (1-1)$$

که در آن بخش اول، انرژی موج الکترومغناطیسی کوانتیده بوزونی، بخش دوم انرژی یک ذره دو حالتی فرمیونی و بخش سوم انرژی برهم‌کنش این دو می‌باشد. بخش آخر به شکل اضافه و یا کم شدن فوتون از سیستم و متعاقباً پایین و یا بالا آمدن حالت اتم بیان شده است.

به طور کلی، حالت تعداد فوتون  $|n\rangle$  و همچنین حالت‌های پایه و برانگیخته اتم  $|g\rangle$  و  $|e\rangle$  دیگر حالت‌های ویژه سیستم (هامیلتونی جینز-کامینگز) نخواهند بود و در نتیجه انرژی‌ها نیز تغییر خواهند کرد. در شرایط تزویج قوی، فرکانس‌های اتم و رزوناتور تبهگن<sup>۲</sup> می‌باشند. حالت‌های سیستم به

<sup>۱</sup> Jaynes-Cummings Hamiltonian

<sup>۲</sup> Degenerate energies

شکل زیر قابل محاسبه‌اند:

$$|\psi_{\pm}\rangle = (|g\rangle|n\rangle \pm |e\rangle|n-1\rangle) / \sqrt{2} \quad (2-1)$$

و اگر از روش اختلال تبهگن [۱۳] استفاده کنیم، اختلاف تقریبی انرژی‌های گسسته حالت  $n$ -ام نسبت به قبل از برهم‌کنش به اندازه  $2g\sqrt{n}$  بدست می‌آید.

در بسیاری از موارد، ترجیح می‌دهیم از رژیم پاشندگی استفاده کنیم، چون در این رژیم احتمال جذب فوتون خارجی توسط اتم بسیار کم است و این امر تاثیر فوتون تابشی از خارج بر روی سیستم داخل کاواک را کم می‌کند (اندازه‌گیری غیر مخرب). برای این منظور فرکانس‌های اختلاف تراز اتم ( $\omega_a$ ) و رزونانس کاواک ( $\omega_r$ ) را یکسان انتخاب نمی‌کنیم. به اختلاف بین این دو ضریب ناموزونی<sup>۱</sup> می‌گوئیم. ( $\Delta = \omega_a - \omega_r$ )

مقادیر انرژی حالت‌ها در این سیستم مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{\pm,n} = \hbar n \omega_r \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{4ng^2 + \Delta^2} \quad (3-1)$$

در این رژیم مقدار نرخ برهم‌کنش بسیار کوچکتر از ضریب ناموزونی است ( $g \ll \Delta$ ) بر خلاف تزویج قوی که در عمل ضریب ناموزونی صفر نیست اما بسیار کوچک است ( $\Delta \ll g$ ). با این شرایط می‌توان هامیلتونی و انرژی‌های تقریبی سیستم را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$H \approx \hbar \omega_r \left( a^\dagger a + 1/2 \right) + \frac{\hbar}{2} \left( \omega_a + \frac{2g^2}{\Delta} a^\dagger a + \frac{g^2}{\Delta} \right) \sigma_z \quad (4-1)$$

$$E_{\pm,n} \approx \hbar n \omega_r \pm \frac{\hbar}{2} \left( \Delta + 2ng^2 / \Delta \right) \quad (5-1)$$

<sup>۱</sup> Detuning factor

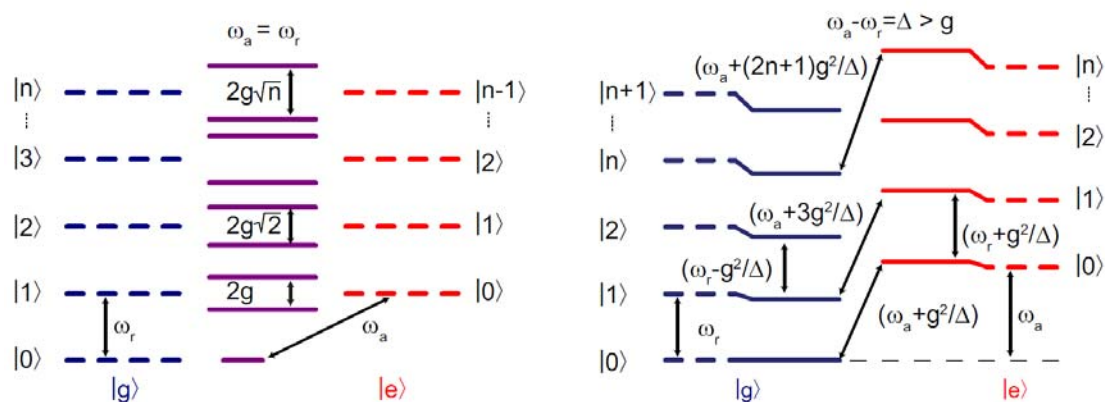
در هامیلتونی (۱-۴) می‌توان اثر برهم‌کنش بر روی اتم را مشاهده نمود. اگر خوب دقت کنیم، فرکانس اتم دچار دو جابجایی همزمان شده است:

اول) انتقال فرکانس استارک<sup>۱</sup> که به تعداد فوتون‌ها وابسته است ( $2ng^2/\Delta$ )

دوم) انتقال فرکانس لامب<sup>۲</sup> که حاصل القای خلأ می‌باشد ( $g^2/\Delta$ )

هردوی این اثرات در فیزیک کوانتوم شناخته شده می‌باشند و در عمل نیز مشاهده شده‌اند.

نمودارهای ترازهای انرژی برای شرایط تزویج قوی و رژیم پاشندگی در شکل ۵-۱ آورده شده‌اند.



شکل ۵-۱. نمودارهای ترازهای انرژی پس از برهم‌کنش موج و اتم. خطوط گسسته انرژی‌های هامیلتونی تزویج نشده و خطوط توپر انرژی‌های سیستم تزویج شده کامل می‌باشند؛

چپ: موج و اتم در تزویج قوی قرار دارند. راست: سیستم در رژیم پاشندگی قرار دارد [۱۰].

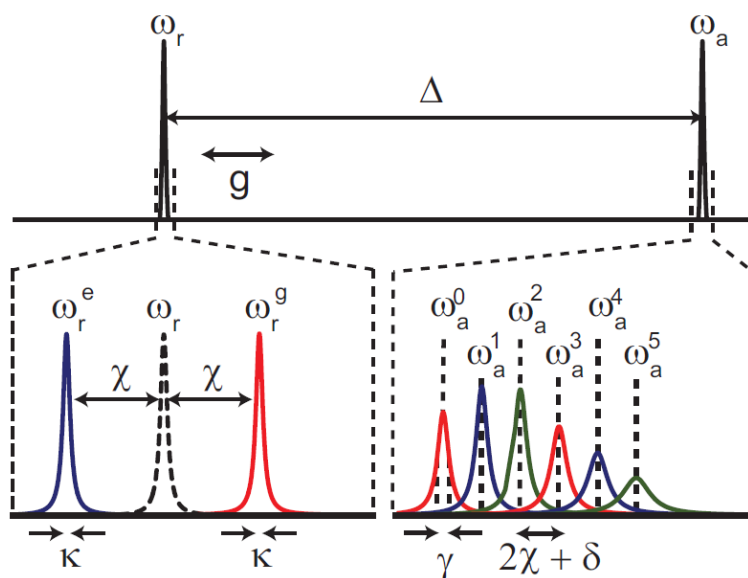
نکته جالب توجه در انرژی رژیم پاشندگی وابستگی مستقیم آنها به تعداد فوتون‌های داخل کاواک می‌باشد که این امر امکان تشخیص حالت داخل کاواک را فراهم می‌کند.

برای بالا بردن قابلیت تشخیص تعداد فوتون‌های داخل کاواک سیستم را در رژیم پاشندگی قوی

<sup>۱</sup> Stark light shift

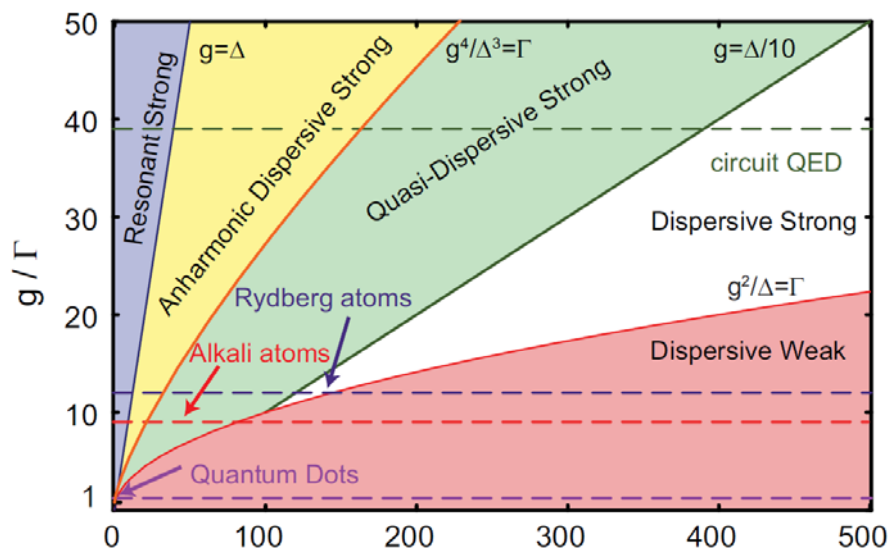
<sup>۲</sup> Vacuum Lamb shift

قرار می‌دهیم؛ در این شرایط  $\kappa, \gamma \gg g^2/\Delta$  می‌باشد. در این صورت طیف فرکانسی موج خروجی دارای قله‌های مجزا وابسته به تعداد فوتون‌های داخل کاواک خواهد داشت (شکل ۶-۱). از طرفی به دلیل اینکه در بیت‌های کوانتومی تنها یک فوتون و یک اتم در کاواک متصور است، این امر بسیار مهم خواهد بود چون کمترین اختلاف بین حالت پایه و برانگیخته اول وجود دارد.



شکل ۶-۱. طیف یک کاواک کوانتومی الکتروپویکی در رژیم پاشندگی قوی؛ راست: حول فرکانس اتم در تعداد فوتون‌های مختلف. چپ: حول فرکانس رزوناتور؛ آبی: اتم در حالت برانگیخته، قرمز: پایه و سیاه: بدون اتم [۱۰].

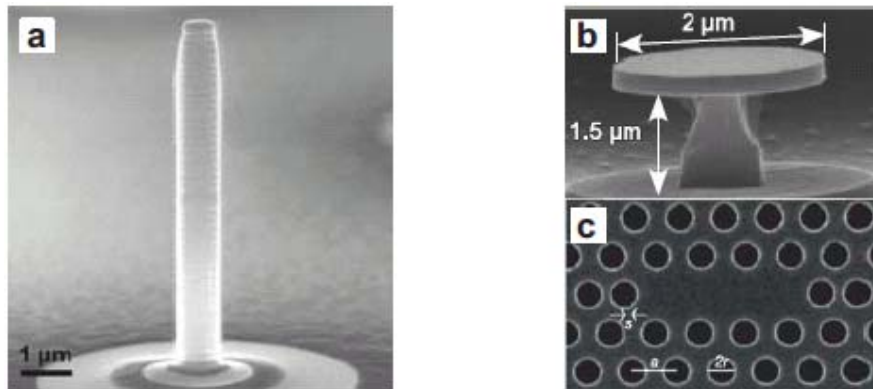
با توجه به توضیحات فوق می‌توان مشابه شکل ۷-۱ نواحی مختلف کاری برای یک سیستم تزویج شده موج و اتم را بر روی نموداری بر حسب پارامترهای میرایی و برهم‌کنش نشان داد. همانطوریکه دیده می‌شود، کاواک کوانتومی الکتروپویکی در تمامی نواحی قابل بکارگیری است.



شکل ۷-۱. نواحی مختلف کاری برای یک سیستم تزویج شده موج و اتم [۱۴].

البته لازم به ذکر است که علاوه بر پیشرفت سریع در سیستم‌های اتمی، پیشرفت‌های بسیار خوبی در زمینه سیستم‌های نیمه‌هادی مانند نقطه‌های کوانتومی<sup>۱</sup> که از آنها به عنوان اتم‌های مصنوعی [۱۵]-[۱۶] و یا ساخت کاواک استفاده می‌شود، به چشم می‌خورد. در تکنیک این گزارش [۱۷][۱۷]، از نقطه‌های کوانتومی خود ساخته و بازتاب دهنده‌های ساخته شده از دی الکتریک‌های متناوب برای ساخت کاواک استفاده می‌شود (شکل ۸-۱). در یک روش دیگر از یک کاواک فوتونی در ناخالصی یک بلور فوتونی دارای گاف انرژی دو بعدی استفاده شده است، که مانند یک چاه کوانتومی عمل می‌کند [۱۸]. این روش‌ها، مسیری طبیعی برای استفاده از تکنیک‌هایی که در رشته حالت جامد به وجود آمده در کوانتوم اپتیک است.

<sup>۱</sup> Quantum dot



شکل ۱-۸ (a) یک نقطه کوانتومی درون میکروپیلار از نیمه‌هادی‌ها (Al-As و Ga-As).  
 (b) یک بلور فوتونی دو بعدی که به یک میکروپیلار تکیه داده شده است. (c) نمای بالا از یک بلور فوتونی.  
 مکان کوانتوم دات پایین این سطح و درون ناخالصی‌ها است [۱۷]–[۱۸].

## ۵-۱ مدارهای کوانتومی ابررسانا

به دلیل خواص منحصر به فرد مواد ابررسانا، از مدارهای ابررسانایی در کاواک به عنوان ذرات کوانتومی دو حالتی استفاده شده است. این مدارهای ابررسانا می‌توانند به گونه‌ای طراحی شوند که طیفی غیر خطی و گسسته و همچنین زمان هم‌دوسی بالایی داشته باشند. در نتیجه این قابلیت را دارند که به عنوان اتم‌های مصنوعی در نظر گرفته شوند. پیوند جوزفسون مانند یک سلف غیر خطی عمل می‌کند که مانند یک ترانزیستور نیمه‌هادی، می‌تواند مبنای بهره و منطق غیر بدیهی را به وجود بیاورد.

در فصل آتی (فصل سوم) اصول پدیده ابررسانایی و دانش مورد نیاز این پروژه در زمینه ابررسانایی آورده شده است. با استفاده از مفاهیم ابررسانایی خواهیم توانست بیت‌های کوانتومی ابررسانا را تحلیل نماییم (فصول بعدی).

## فصل ۲ اصول ابررسانایی و مقدمه‌ای بر پدیده جوزفسون

### ۱-۲ مقدمه

مقاومت الکتریکی بسیاری از فلزات و آلیاژها (مانند Al ، Nb ، Hg ، Zn و ... ) هنگامی که به اندازه کافی سرد شوند (معمولاً در درجه حرارت‌های در محدوده هلیوم مایع و کمتر از آن) به طور ناگهانی صفر خواهد شد. این پدیده به عنوان مهمترین خاصیت ابررساناها شناخته می‌شود.

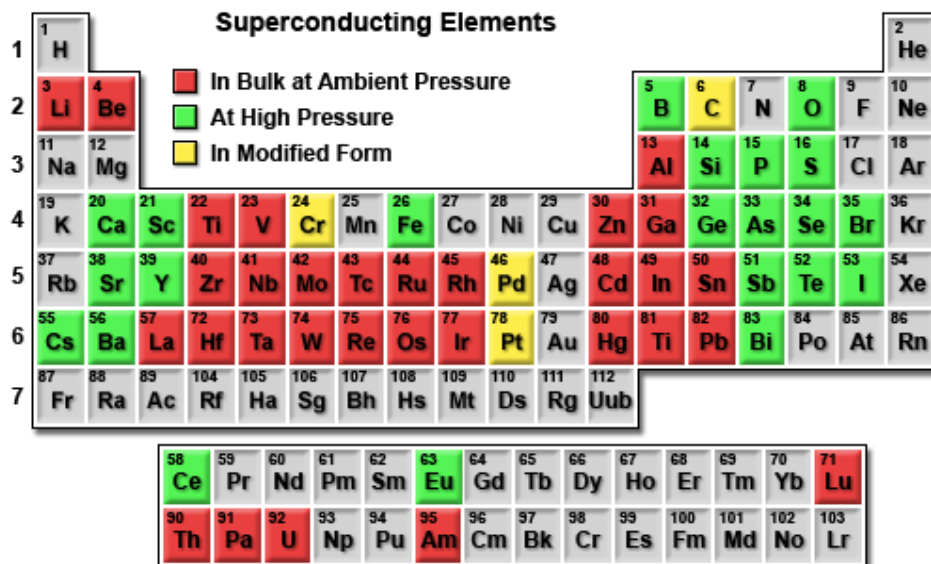
برای اولین بار این پدیده در سال ۱۹۱۱ توسط فیزیکدان هلندی به نام Heike Kamerlingh Onnes در دانشگاه Leiden<sup>۱</sup> در عنصر جیوه (اولین ابررسانای کشف شده) و در دمای هلیوم مایع ( 4 K ) کشف

---

۱ - <http://www.leiden.edu>



پس از آن ابررساناهای دیگری نیز کشف شدند که از انواع فلزات، سرامیک‌ها، آلیاژها و عناصر ترکیبی و تغییر شکل یافته بدست آمده بودند. البته برخی از عناصر، فقط تحت فشارهای بسیار زیاد و دماهای بسیار کم، ابررسانا می‌شوند (شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲ شرایط بروز خاصیت ابررسانایی در عناصر جدول تناوبی [۱۹]

اما همه‌ی عناصر، با فرض ابررسانا شدن، دارای دمای گذار ابررسانایی بسیار کمی می‌باشند و این مسئله، طیف کاربردهای آن‌ها را در ابتدای اکتشاف، محدودتر می‌کرد (اگرچه امروز رسیدن به دماهای بسیار اندک با سادگی بیشتری امکان‌پذیر شده است). سپس خاصیت ابررسانایی در برخی آلیاژهای فلزی و ترکیبات این عناصر، مانند ترکیب‌های فلز Nb شامل NbTi, Nb<sub>3</sub>Sn, Nb<sub>3</sub>Ge و ... که دمای گذار

ابرسانایی نسبتاً بیشتری دارند، کشف شد. مثلاً  $Nb_3Sn$  دارای دمای گذار ابرسانایی  $18^\circ K$  و  $Nb_3Ge$  دارای دمای گذار ابرسانایی  $23^\circ K$  می‌باشد [۱۹].

اما در این مواد نیز دمای ابرسانایی هنوز اندک می‌باشد و سرد کردن این مواد تا این دما، نیاز به تجهیزات سرمایشی پیچیده‌ای دارد. به همین دلیل، تا مدتی، ابرساناها برای استفاده در مدارات علمی و سیستم‌های کاربردی، چندان مورد توجه، قرار نگرفت. اما در سال ۱۹۸۶، انقلاب بزرگی در علم ابرسانایی صورت پذیرفت. محققین آزمایشگاه تحقیقاتی IBM در زوریخ، خاصیت ابرسانایی را در ترکیبات غیرفلزی خاصی به نام سرامیک‌ها کشف کردند. این محققین مشاهده کردند که انواع خاصی از سرامیک‌ها با وجود اینکه در دماهای عادی رسانای خوبی نمی‌باشند، اما پس از سرد شدن و کاهش دما، در دماهای اندک، خاصیت ابرسانایی پیدا می‌کنند. ماده‌ی سرامیکی که این محققین موفق به ساخت آن شدند،  $LaBaCuO$  بود که دمای ابرسانایی در حدود  $32^\circ K$  داشت و بیشترین دمای ابرسانایی تا آن زمان بود. این امر توجه آزمایشگاه‌های مختلفی را در سراسر جهان به خود جلب کرد، تا اینکه در فوریه سال ۱۹۸۷، گروه تحقیقات ابرسانایی دانشگاه آلاباما موفق به تولید سرامیکی شدند که در دمای  $92^\circ K$  ابرسانا می‌شد. این ماده که فورمول شیمیایی آن  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  می‌باشد، بسیار مورد توجه دانشمندان و به خصوص مهندسان قرار گرفت، زیرا دمای ابرسانایی آن بالاتر از دمای جوش نیتروژن بوده و لذا با استفاده از نیتروژن مایع که بسیار ارزان و فراوان است، قابل سرد شدن می‌باشد. از آن پس، ابرساناهایی با دمای گذار بالاتر تا حدود  $138^\circ K$  نیز کشف گردید. اما با رسیدن به این دمای گذار خاص ( $138^\circ K$ )، از سرعت رشد رکورد بیشینه‌ی دمای گذار کاسته شد. با این حال، تحت فشارهای خیلی زیاد، پدیده‌ی

ابرسانایی در موادی مانند  $\text{InSnBa}_4\text{Tm}_4\text{Cu}_6\text{O}_{18+}$  در دمای  $150^\circ\text{K}$  نیز مشاهده شده است. این  
 سرامیک‌های ابرسانا که دمای ابرسانایی زیادی دارند، ابرساناهای دمای بالا (HTS)<sup>۱</sup> نام گرفتند و  
 توجه طیف وسیعی از مهندسان و محققان کاربردی را به خود جلب کردند. علت این امر، خواص بسیار  
 جالب توجه این نوع از ابرساناها بوده که برای استفاده در مدارات میکروویوی، نوری، مغناطیسی و ...  
 بسیار مفید و کاربردی می‌باشد. در جدول ۱-۲، لیست برخی از مهمترین ابرساناهای دمای بالا آورده  
 شده است.

جدول ۱-۲ دمای ابرسانایی برخی ابرساناهای دما بالا [۱۹]

HTS	$T_c$
$(\text{La}_{1.85}\text{Ba}_{0.15})\text{CuO}_4$	32 K
$(\text{La}_{1.85}\text{Sr}_{0.15})\text{CuO}_4$	40 K
$\text{Y}_1\text{Ba}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$	81 K
$\text{Y}_1\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$	92 K
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	91-92K
$\text{Sn}_4\text{Ba}_4\text{Y}_3\text{Cu}_7\text{O}_x$	~80 K
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{7+}$	105 K
$\text{TlBa}_2\text{Ca}_3\text{Cu}_4\text{O}_{11}$	112 K
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$	127-128 K
$\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$	133-135 K
$(\text{Hg}_{0.8}\text{Tl}_{0.2})\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8.33}$	138 K
$\text{InSnBa}_4\text{Tm}_4\text{Cu}_6\text{O}_{18+}$	~150 K

<sup>1</sup> High Temperature Superconductor

امروزه پس از پیشرفت‌های بسیار زیاد در علوم مهندسی، وسایل و ابزارالات خنک‌سازی<sup>۱</sup> دیگر مشکلی بر سر راه بهره‌برداری از ابررساناها نیستند و دماهای بسیار پائین به راحتی قابل دسترسی بوده و استفاده از مواد ابررسانا را آسان نموده‌اند.

## ۲-۲ تئوری‌های ابررسانایی

همانطور که گفته شد هنگامی که یک ابررسانا تا زیر دمای بحرانی سرد شود مقاومت آن به طور ناگهانی، صفر می‌شود. خاصیت مهم دیگر آنها عدم اجازه نفوذ میدان مغناطیسی به درون ماده و دفع آن به اطراف می‌باشد که این پدیده اثر مایزنر<sup>۲</sup> نامیده می‌شود [۲۰]. به دنبال کشف پدیده ابررسانایی تلاش‌های بسیاری برای توصیف این پدیده انجام شد. در سال ۱۹۳۴ یک مدل بسیار ساده توسط London برای توصیف آن معرفی شد. این مدل اثر مایزنر را توصیف کرده و وجود طول نفوذ  $\lambda$  را پیش‌بینی می‌کند ( $\lambda$  طولی است که در این طول میدان مغناطیسی در ابررسانا نفوذ کرده و به صورت نمایی افت می‌کند تا به صفر برسد). سپس در سال ۱۹۵۰ توسط Vitaly Ginzburg و Lev Landau یک تئوری معرفی شد که بعدها به تئوری Ginzburg-Landau معروف شد. این تئوری که بر پایه ویژگی‌های ماکروسکوپی است بسیاری از خواص ابررساناها را توصیف می‌کند. در سال ۱۹۵۷، Alexi Abrikosov با استفاده از تئوری Ginzburg-Landau به مطالعه ابررساناها تحت میدان مغناطیسی پرداخت و ابررساناهای نوع یک و نوع دو<sup>۳</sup> را کشف کرد که در ادامه به توضیح مختصری از آنها خواهیم پرداخت.

<sup>۱</sup> Cryogenics

<sup>۲</sup> Meissner effect

<sup>۳</sup> Type I and Type II superconductors

## ۱-۲-۲ تئوری BCS

کاملترین مدل تئوری ارائه شده برای توصیف پدیده ابرسانایی در سال ۱۹۵۷ توسط فیزیکدانان آمریکایی به نامهای آقایان John Schriffer ، Leon Cooper و John Bardeen ارائه شد. این تئوری که به نام تئوری BCS معروف است از نظر ریاضی بسیار پیچیده است و به خوبی پدیده ابرسانایی را در دماهای نزدیک به دمای صفر مطلق برای آلیاژها و عناصر توصیف می کند ولی برای توصیف پدیده ابرسانای دمای بالا تئوری جامعی نیست و نمی تواند این پدیده را در دماهای بالا توصیف کند.

ایده ی مدل نظری بس ذره ای BCS برای ابرساناها، بر این مبنا است که در حالت ابرسانایی، الکترون ها با وجود دافعه ی متقابل، توسط نیروی واسطه ی فونونی، به یکدیگر متصل شده و تشکیل زوج های کوپر را می دهند. اندرکنش جذبی بین زوج الکترون ها به کمک فونون ها و توسط یون های شبکه در ابرساناها معمولی انجام می شود.

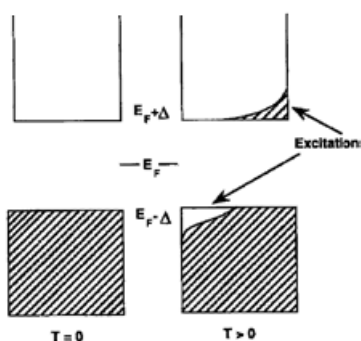
در یک تصویر کلی، تعامل با جذب یون ها در شبکه، توسط الکترون عبورکننده آغاز می شود. حرکت یون ها به سمت الکترون، ناحیه ای از بارهای مثبت ایجاد می کند که می تواند الکترون دوم را جذب نماید. بنابراین نتیجه ی حرکت یون ها، ساطع شدن یک فونون توسط الکترون اول است که این فونون توسط الکترون دوم، حس و جذب می شود. بنابراین زوج های کوپر در حالت ابرسانایی، از طریق تبادل فونون ها، به صورت یک مجموعه، رفتار می کنند. انرژی اتصال هر الکترون، گاف ابرسانایی نامیده شده و با  $\Delta$  بیان می شود. برای شکستن یک زوج کوپر، انرژی معادل  $2\Delta$  لازم است، زیرا یک الکترون به همراه زوج خود، وارد حالت تحریک شده می گردد. به بیان دیگر، امکان وجود الکترون جفت نشده در حالت ابرسانایی غیرمحمتمل است. تزویج بین دو الکترون و تشکیل زوج کوپر، منجر به خاصیت مقاومت صفر در ابرساناها می شود، زیرا زوج های کوپر تنها وقتی دچار پراکنش می شوند، که تحت تاثیر

انرژی بیشتر از  $2\Delta$  قرار گیرند.

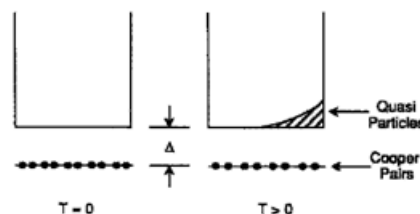
بنابراین، حالت ابرسانایی انرژی کافی بین الکترون‌های عادی و الکترون‌های زوج‌شده ابرسانا ایجاد می‌کند، که شبیه انرژی گاف بین باند ظرفیت و هدایت در مواد نیمه‌رسانا می‌باشد و ساختار باند آن در شکل ۲-۲، نشان داده شده است. در نیمه‌رساناها، انرژی گاف  $E_g$  از مرتبه  $1\text{eV}$  است، در حالی که تئوری BCS، برای ابرساناهای معمولی درجه‌ی حرارت پایین، انرژی گاف بسیار کوچکی را در محدوده‌ی  $1\text{meV}$  تا  $3\text{meV}$  پیش‌بینی می‌کند که این گاف برای ابرساناهای معمولی، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$2\Delta(0) = 3.52 K_B T_c \quad (1-2)$$

در رابطه‌ی فوق  $K_B$ ، ثابت بولتزمن بوده و  $\Delta$ ، گاف ابرسانایی در دما  $T=0$  می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۲ دیاگرام سطوح انرژی در دماهای صفر و غیر صفر الف) نیمه‌رسانا (الکترون‌ها همواره فرمیون)

ب) ابرسانا (الکترون‌ها در حالت بوزون و زوج کوپر در شکل اَبَرالکترون) [۲۰]

در نیمه‌رساناها، همان‌طور که در شکل ۲-۲، می‌بینیم، فونون‌های با انرژی  $h\omega \geq E_g$  می‌توانند الکترون‌ها را در طول گاف تحریک کنند و منجر به تشکیل زوج‌های الکترون-حفره شوند. وضعیت

مشابهی نیز در ابررساناها رخ می‌دهد، که این وضعیت، در شکل ۲-۲ دیده می‌شود. فوتون‌های با انرژی  $h\omega \geq 2\Delta$  می‌توانند زوج‌های کوپر را بشکنند و الکترون‌ها را به حالت نرمال تحریک کنند. از این تحریک‌ها، با عنوان تحریک‌های شبه‌ذره<sup>۱</sup> یاد می‌شود، زیرا الکترون‌ها در این حالت می‌توانند خواص هر دو شکل شبه‌حفره یا شبه‌الکترون را داشته باشند.

## ۲-۲-۲ مدل دوسیالی ابررسانا

مدل دوسیالی<sup>۲</sup>، مجموعه‌ی الکترون‌های نرمال و زوج‌شده‌ی ابررسانا را به فرم دو ماده سیال بدون برهم کنش، توصیف می‌کند: سیال ابررسانا که از حامل‌های بار در حالت ابررسانایی تشکیل شده، و سیال نرمال که متشکل از حامل‌های بار در حالت نرمال است. همانطور که اشاره شد، به حامل‌های بار در حالت نرمال، تحریک‌های شبه‌ذره نیز می‌گویند.

نقطه شروع مدل دو سیالی، ارائه‌ی رابطه‌ی وابستگی دمایی چگالی حامل‌های بار به صورت زیر می‌باشد [۲۰].

$$n_s(T) = n_0 \begin{cases} 0 & T \geq T_c \\ 1 - (T/T_c)^\gamma & T \leq T_c \end{cases} \quad (2-2)$$

$$n_n(T) = n_0 \begin{cases} 1 & T \leq T_c \\ (T/T_c)^\gamma & T \geq T_c \end{cases} \quad (3-2)$$

در این روابط،  $T$  دما،  $T_c$  دمای بحرانی و  $n_0$  چگالی کل الکترون‌ها در ابررسانا است.

$n_s(T)$  نیز با یکی از پارامترهای پایه‌ی ابررسانایی به نام عمق نفوذ میدان مغناطیسی (عمق نفوذ

<sup>۱</sup> Quasi-particle excitation

<sup>۲</sup> Two Fluid Model

لانندن<sup>۱</sup>،  $\lambda_L(T)$ ، به صورت زیر رابطه دارد.

$$\frac{1}{\lambda_L(T)^2} = \frac{e^2 n_s(T) \mu_0}{m_s} \quad (۲-۴)$$

که  $e$  بار الکتریکی،  $m_s$  جرم موثر یک الکترون و  $\mu_0$  نفوذپذیری مغناطیسی فضای آزاد است.

$\lambda_L$  میزان نفوذ میدان مغناطیسی داخل ابررسانا را نشان می‌دهد. بنابراین به  $\lambda_L$  عمق نفوذ داخل ماده‌ی

ابررسانا گفته می‌شود. عمق نفوذ طبق رابطه‌ی زیر به دما، وابستگی دارد.

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)^4}} \quad (۲-۵)$$

$\lambda_L(0)$  عمق نفوذ در دمای صفر است.

خاصیت منحصر به فرد  $\lambda_L(T)$  در مقایسه با عمق پوستی رساناهای فلزی، عدم وابستگی آن به

فرکانس میکروویو است که این خاصیت منجر به ناچیز بودن واپاشی در ابررسانا می‌باشد.

وقتی ماده ابررسانا در یک میدان مغناطیسی ضعیف تا کمتر از دمای بحرانی،  $T_c$ ، سرد می‌شود،

اندوکتانس مغناطیسی داخل آن صفر می‌شود و شار مغناطیسی از داخل آن به بیرون دفع می‌شود. به این

خاصیت، اثر مایزنر<sup>۲</sup> گفته می‌شود که در سال ۱۹۳۳ کشف شد و یکی از خواص ویژه‌ی ابررساناها است.

اثر مایزنر با هیچ‌یک از مدل‌های متداول حالت جامد قابل توضیح نبود. در سال ۱۹۳۴، برادران لانندن یک

مدل دوسیالی ساده را برای توضیح اثر مایزنر ارائه کردند. مدل لانندن همچنین عمق نفوذ ابررسانایی را

به نحو مناسبی پیش‌بینی کرد. معادلات لانندن برحسب عمق نفوذ  $\lambda_L(T)$  به صورت زیر در می‌آید [۲۰].

<sup>۱</sup> London Penetration depth

<sup>۲</sup>Meissner effect



$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(T)} \mathbf{E} \quad (6-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{1}{\lambda_L^2(T)} \mathbf{H} \quad (7-2)$$

## ۳-۲ مقدمه‌ای بر ویژگی‌های پیوند جوزفسون در ابررسانا

### ۱-۳-۲ مدل گینزبرگ-لاندائو<sup>۱</sup> برای ابررسانایی

پیشتر اشاره کردیم که در فاز ابررسانایی، دو الکترون آزاد با هم جفت شده و تشکیل یک ذره واحد با بار معادل  $e^* = 2e$  و جرم  $m^* = 2m$  به نام زوج کوپر را می‌دهند. این زوج‌ها مانند بوزون‌ها رفتار می‌کنند. طبق قوانین مکانیک کوانتوم، در شرایط خاص، بوزون‌ها همگی دارای یک حالت کوانتومی می‌شوند که به این پدیده در اصطلاح چگالش بوز-اینشتین<sup>۲</sup> می‌گویند که خاصیت ابرشارگی در هلیوم نیز به این خاصیت مربوط می‌شود. این حالت کوانتومی ماکروسکوپی با تابع موج  $\psi$  نمایش داده می‌شود:

$$\psi = |\psi(\vec{r})| \exp^{i\theta(\vec{r})} \quad (8-2)$$

که در آن  $|\psi(r)|^2$  تعیین‌کننده چگالی وجود جفت الکترون‌ها در مکان  $r$  می‌باشد و فاز  $\theta(r)$  با جریان ابررسانایی<sup>۳</sup> در آن مکان رابطه دارد. با نزدیک شدن دو ابررسانا به هم، توابع موج آنها در سد

<sup>۱</sup> Ginzburg-Landau

<sup>۲</sup> Bose- Einstein Condensation (BEC)

<sup>۳</sup> Supercurrent

مابین نفوذ کرده و در یکدیگر ادغام می‌شوند تا سطح انرژی سیستم به مقدار حداقل برسد. در این شرایط جفت الکترون‌ها می‌توانند بدون اتلاف انرژی از سد بین دو ابررسانا عبور کرده و جابجا گردند. چگالی زوج‌های کوپر تابعی از دما بوده و مطابق مدل دوسیالی در ابررسانا، هم الکترون‌های عادی و هم زوج‌های کوپر (آبرالکترون‌ها)<sup>۱</sup> در کنار یکدیگر وجود دارند که چگالی آنها به صورت زیر با هم رابطه دارد:

$$\frac{n_s}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^\gamma \quad (9-2)$$

که در آن  $n_s$  چگالی آبرالکترون‌ها و  $n$  چگالی کل الکترون‌هاست و پارامتر  $\gamma$  برای ابررساناهای دمای پایین، حدود ۴، و برای ابررساناهای دمای بالا، تقریباً ۲ می‌باشد.

دو پارامتر مهم دیگر در ابررساناها، عمق نفوذ<sup>۲</sup> و طول همدوسی<sup>۳</sup> می‌باشند. همانطور که ذکر شد، میدان مغناطیسی در عمق ابررسانا نفوذ نمی‌کند. حال اگر یک ابررسانا را در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی قرار دهیم، این میدان به صورت نمایی داخل ابررسانا افت می‌کند تا به صفر برسد. نرخ افت نمایی میدان مغناطیسی در داخل ابررسانا، عمق نفوذ نامیده شده و با  $\lambda$  نشان داده می‌شود. بنابر معادلات لاندن عمق نفوذ میدان مغناطیسی فاصله‌ای از سطح ابررساناست که میدان مغناطیسی در داخل آن به مقدار  $1/e$  روی سطح آن می‌رسد.

طول همدوسی ( $\xi$ ) حداقل فاصله‌ای است که تابع موج ابررسانا ( $\psi$ ) می‌تواند در آن فاصله به صفر

<sup>1</sup> Super electrons

<sup>2</sup> Penetration depth

<sup>3</sup> Coherence length

برسد. تعبیر فیزیکی این پارامتر، فاصله بین دو الکترونی است که به هم تزویج شده‌اند (زوج کوپر) و برای شکستن پیوند بین این دو الکترون، مقداری انرژی لازم است که به اندازه همان گاف ابررسانایی می‌باشد. پس اگر در کمتر از این فاصله تابع موج در دو نقطه صفر باشد، پدیده ابررسانایی بین آن دو نقطه امکان‌پذیر نیست.

به همین دلیل است که اگر در ابررساناهای نوع دوم میدان مغناطیسی نفوذ کند، شعاع حلقه میدان عبوری در حدود عمق نفوذ و شعاع تخریب تابع موج در حدود طول هم‌دوسی می‌باشد.

## ۲-۳-۲ تونل‌زنی در پیوندهای ابررسانا

گام موثر دیگری در پیشرفت تئوری ابررسانایی در سال ۱۹۶۲ توسط Brian D. Josephson دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه کمبریج برداشته شد. او پیش‌بینی کرد که جریان الکتریکی بین دو ماده ابررسانا وجود دارد حتی اگر توسط یک ماده غیر ابررسانا و یا یک عایق از هم جدا شوند. در سال ۱۹۶۴ این اثر در آزمایشگاه توسط آندرسون و رول مشاهده شد و باعث شد تا Josephson در سال ۱۹۷۳ به صورت اشتراکی برنده جایزه نوبل شود. این پدیده امروزه به عنوان پدیده جوزفسون شناخته می‌شود. کاربردهای بسیاری در حوزه ادوات ابررسانا به علت خواص جالب پدیده جوزفسون بوجود آمده است. یکی از مهمترین ابزارهایی که تاکنون توسط آن ساخته شده، وسیله‌ای به نام SQUID<sup>۱</sup> است. SQUID حسگری برای اندازه‌گیری ضعیف‌ترین میدان‌های مغناطیسی موجود مانند میدان‌های مغناطیسی ناشی از فعالیت‌های مغز انسان است.

---

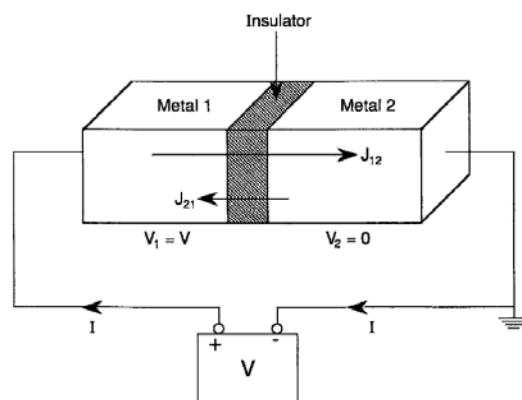
۱ - Superconducting Quantum Interference Device

پدیده‌ی تونل‌زنی یک پدیده‌ی کوانتومی است که مطابق آن، الکترون از سدّی که انرژی آن بیشتر از انرژی جنبشی ذره است، عبور می‌کند (بر خلاف پیش‌بینی فیزیک کلاسیک). رابطه‌ی تونل‌زنی و مثال آن در ادامه آمده است.

$$I = \frac{2\pi eA}{\hbar} |H_T|^2 \int D_1(E - eV) D_2(E) \times [f(E - eV) - f(E)] dE \quad (۱۰-۲)$$

که در این رابطه،  $D_1$  و  $D_2$  معرف چگالی حالت‌های پر و خالی در دو طرف پیوند،  $|H_T|^2$  احتمال تونل‌زنی، و تابع  $f$  احتمال پر یا خالی بودن حالت‌ها است.

سه نوع پیوند جوزفسون از همه معروف‌ترند: ابرسانا-عایق-رسانا <sup>۱</sup>SIN، ابرسانا-عایق-ابرسانا و پیوند ضعیف ابرسانا-ابرسانا (Weak link junction) <sup>۲</sup>SIS که در هر کدام تونل‌زنی کمی متفاوت است. مشخصاً ذراتی که در پیوند SIN تونل می‌زنند الکترونهای نرمال خواهند بود در حالی که در پیوندهای دو طرف ابرسانا، هم الکترون‌های عادی و هم زوجهای کوپر تونل می‌زنند.



شکل ۲-۳ پدیده تونل‌زنی [۲۰]

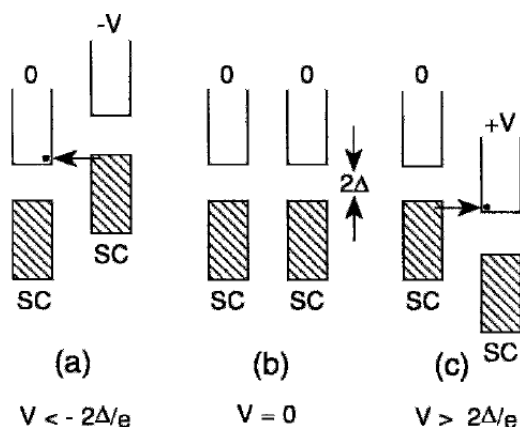
<sup>۱</sup> Superconductor-Insulator-Normal

<sup>۲</sup> Superconductor-Insulator-Superconductor

در یک پیوند ابررسانا-عایق-ابررسانا<sup>۱</sup>، اگر ضخامت سد به اندازه کافی کم باشد، الکترون‌های معمولی می‌توانند تونل بزنند (نوارهای پر و خالی انرژی روبروی هم قرار می‌گیرند). اگر فاصله از آن هم کمتر شود، به طوری که در حد طول همدوسی باشد، آنگاه توابع موج در دو طرف پیوند با یکدیگر هم-پوشانی داشته و در نتیجه، احتمال تونل‌زنی زوج‌های کوپر نیز فراهم می‌شود. به دلیل نیاز کیوبیت‌ها، در ادامه به بررسی دو نوع تونل‌زنی در پیوند SIS می‌پردازیم.

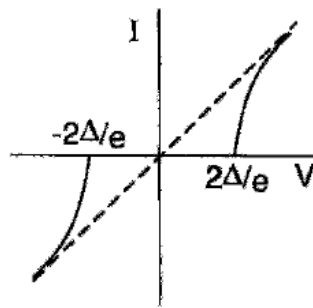
## ۲-۳-۳ تونل‌زنی الکترون‌های معمولی در پیوند SIS

یک پیوند SIS را در نظر گرفته و برای سادگی فرض می‌شود ابررسانای هر دو طرف پیوند، از یک نوع هستند و لذا انرژی گاف یکسان دارند. در شکل ۲-۴، نمودار انرژی برای این پیوند رسم شده است. هنگامی که ولتاژ در بازه  $2\Delta/e < V < 2\Delta/e$  باشد، نواحی الکترون‌دار روبروی نواحی مجاز قرار نمی‌گیرد و لذا جریانی وجود نخواهد داشت. اما خارج از این بازه، الکترون‌ها می‌توانند تونل بزنند.



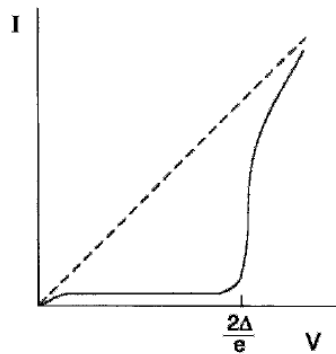
شکل ۲-۴ حالت‌های مختلف تونل‌زنی [۲۱]

<sup>1</sup> Superconductor-insulator-Superconductor (SIS)



شکل ۵-۲ تونل زنی تک الکترون ها در پیوند SIS [۲۱]

نمودار  $I-V$  نشان داده شده در شکل ۵-۲ برای دمای  $T=0$  رسم شده است، در دماهای غیر صفر تعدادی زوج کوپر شکسته می شوند و تولید الکترون های معمولی در بالای ناحیه گاف می کنند، که باعث تونل زنی در ولتاژهای کمتر می شود (شکل ۶-۲).



شکل ۶-۲ تونل زنی تک الکترون ها در پیوند SIS در دمای غیر صفر [۲۱]

## ۴-۳-۲ تونل زنی زوج الکترون ها: پدیده جوزفسون و روابط آن

در ابتدا با استفاده از قوانین مکانیک کوانتوم، روابط جوزفسون را بدست آورده، خواهیم دید که تونل زنی زوج الکترون ها به اختلاف فاز توابع موج در دو طرف پیوند بستگی دارد. بر خلاف تونل زنی تک الکترون ها، تونل زنی زوج الکترون ها احتیاجی به ولتاژ ندارد. بنابراین می توان

یک منبع جریان به پیوند وصل کرد و مادامی که جریان از یک حد بحرانی کمتر باشد ولتاژی تولید نمی - شود. در ادامه برای درک این پدیده به صورت کیفی تاثیر توابع موج بر روی دو ابررسانا که بسیار به هم نزدیک شده اند، بررسی می شود. هنگامی که دو ابررسانا از یکدیگر دور باشند زوج الکترون ها در هر کدام توسط یک تابع موج ماکروسکوپی توصیف می شوند که فاز این دو تابع موج از یکدیگر مستقل هستند (معادله (۸-۲)). اما هنگامی که فاصله دو ابررسانا کم شود توابع موج به اندازه کافی از سد نفوذ کرده و با یکدیگر ترویج می شوند. در این هنگام فازها قفل می شوند و زوج الکترون ها می توانند از سد بدون اتلاف انرژی عبور کنند. همچنین نشان داده خواهد شد که تونل زنی زوج الکترون ها در حالتی که ولتاژ اعمال می شود هم برقرار است اما در این حالت فازها دیگر قفل نیستند بلکه با یک نرخ وابسته به ولتاژ اعمالی نسبت به هم تغییر می کنند. می توان از روش ساده زیر معادلات جوزفسون را بدست آورد [۲۰].

تغییرات زمانی توابع موج در هر طرف پیوند از معادله شرودینگر زیر پیروی می کند.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= U_1 \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= U_2 \psi_2 + K \psi_1 \end{aligned} \quad (11-2)$$

که  $U$  ها انرژی توابع موج در دو ابررسانا و  $K$  ثابت ترویج نمایانگر میزان ترویج می باشد. با فرض اعمال یک ولتاژ به دو طرف پیوند، یک اختلاف انرژی به اندازه  $e^*(V_2 - V_1) = e^*V$  بین دو ابررسانا به وجود می آید، به طوری که  $U_2 - U_1 = e^*V$  می شود. برای راحتی سطح صفر انرژی مقدار متوسط  $U_2$  و  $U_1$  در نظر گرفته می شود، لذا داریم:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= -\frac{e^*V}{2} \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= \frac{e^*V}{2} \psi_2 + K \psi_1 \end{aligned} \quad (12-2)$$

با قرار دادن تابع موج به صورت  $\psi_k = \sqrt{n_{sk}^*} \exp^{i(\theta_k)}$  که در آن  $k$ ، ۱ یا ۲ است، جایگذاری  $\psi_k$

در معادلات، جدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی و معرفی  $\varphi = \theta_2 - \theta_1$  روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{s1}^*}{\partial t} &= \frac{2}{\hbar} K \sqrt{(n_{s1}^* n_{s2}^*)} \sin(\varphi) \\ \frac{\partial n_{s2}^*}{\partial t} &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{(n_{s1}^* n_{s2}^*)} \sin(\varphi)\end{aligned}\quad (13-2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\left(\frac{n_{s2}^*}{n_{s1}^*}\right)} \cos(\varphi) + \frac{e^* V}{2\hbar} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\left(\frac{n_{s1}^*}{n_{s2}^*}\right)} \cos(\varphi) - \frac{e^* V}{2\hbar}\end{aligned}\quad (14-2)$$

از معادله (۱۳-۲) دیده می شود که نرخ تغییرات چگالی زوج الکترون ها در یک ابررسانا مخالف دیگری است. این نرخ تغییرات، تنها نشان دهنده تمایل به تغییرات است. چون به علت بهم خوردن توازن بار الکتریکی نمی توان تغییرات چگالی زوج الکترون داشت بنابراین این عدم تعادل توسط جریانهایی که به پیوند می آیند جبران می شود. در نتیجه حاصل ضرب تمایل به تغییرات بار، در ضخامت پیوند برابر چگالی جریانی است که از پیوند می گذرد. این چگالی جریان در جهت مخالف تغییرات  $\theta$  می باشد. در پیوند جوزفسون  $\phi > 0$  نمایانگر کاهش فاز از ۱ به ۲ است، لذا هنگامی که  $\phi > 0$  است جریان از ۲ به ۱ است. پس معادلات فوق برای چگالی جریان از ۲ به ۱ به رابطه زیر منجر می شوند:

$$J = J_c \sin(\varphi) \quad (15-2)$$

این اثر، پدیده DC جوزفسون نامیده می شود. در رابطه فوق،  $J_c$  چگالی جریان بحرانی نامیده می شود و انتگرال چگالی جریان بحرانی روی سطح مقطع پیوند جریان بحرانی ( $I_c$ ) را بدست می دهد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که محاسبه  $J_c$  از معادلات فوق، به علت نداشتن اطلاعاتی در مورد مقدار عددی  $k$  امکان ندارد.

با تفاضل روابط و مساوی قرار دادن  $n_{s1}^*$  و  $n_{s2}^*$ ، تغییرات زمانی اختلاف فاز دو طرف پیوند به



صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (16-2)$$

که به این اثر، پدیده AC جوزفسون گفته می شود و در این رابطه  $V$  ولتاژ دو سر پیوند است.

معادلات (۱۵-۲) و (۱۶-۲)، روابط جوزفسون نامیده می شوند که رفتار ابرالکترون ها را توضیح می - دهند. در دمای غیر صفر و ولتاژ غیر صفر یک مؤلفه جریان دیگر ناشی از الکترون های معمولی نیز وجود دارد. رابطه (۱۵-۲) بیان می کند که جریان گذرنده از پیوند، تابعی است از چگالی جریان بحرانی  $J_c$  و اختلاف فاز دو تابع موج در دو سر پیوند و رابطه (۱۶-۲) نشان می دهد که آهنگ تغییر این اختلاف فاز، تابع ولتاژ دو سر پیوند می باشد. با اعمال یک ولتاژ DC به دو سر پیوند و انتگرال گیری از (۱۶-۲)، رابطه زیر بدست می آید:

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{2e}{\hbar}\right) V t \quad (17-2)$$

با جایگذاری این رابطه در (۱۵-۲) معادلات زیر بدست می آیند:

$$J = J_c \sin(\varphi_0 + \omega_j t) \quad (18-2)$$

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} = \left(\frac{2e}{h}\right) V \approx 483593.420 \frac{\text{GHz}}{\text{V}} \cdot V \quad (19-2)$$

بسیار جالب است که رابطه فوق ولتاژ را به فرکانس مربوط می کند و از آنجایی که اندازه گیری فرکانس با دقت بالایی مقدور می باشد، سازمان استاندارد آمریکا<sup>۱</sup> این روش را برای تعریف استاندارد ولتاژ پذیرفته است [۲۰].

<sup>1</sup> US National Bureau of Standards

## ۵-۳-۲ انرژی تزویج جوزفسون (Josephson coupling energy)

با استفاده از روابط جوزفسون می‌توان کار انجام شده توسط یک منبع جریان در تغییر اختلاف فاز توابع موج دو سر پیوند را بدست آورد و از آنجا نتیجه گرفت [۲۲] و [۲۳]:

$$E = E_0 - E_C = E_0 - \left(\frac{\hbar I_C}{2e}\right) \cos(\phi) \quad (2-20)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که تزویج بین دو تابع موج باعث کاهش سطح انرژی به اندازه  $E_C$  می‌شود. این انرژی تزویج هنگامی بیشینه است که  $\phi=0$  باشد، اما هنگامی که چگالی جریان افزایش پیدا می‌کند و به مقدار بیشینه خود ( $I_C$ ) می‌رسد آنگاه  $\phi \rightarrow \pi/2$  و انرژی تزویج به صفر میل می‌کند. به ازای  $J > J_C$  توابع موج دیگر تزویج ندارند و نسبت به هم شروع به لغزیدن می‌کنند. چگالی جریان بحرانی نشان-دهنده میزان تزویج دو تابع موج با یکدیگر است، که به نوع پیوند و ضخامت آن و ماده‌ای که به عنوان عایق بکار رفته بستگی دارد.

در بسیاری از کاربردها  $I_C$  در محدوده چند میکرو آمپر تا چند میلی آمپر قرار دارد. حد پایین از آنجا ریشه می‌گیرد که باید انرژی تزویج بر انرژی حرارتی ( $kT$ ) غلبه کند. در غیر این صورت نویز حرارتی اثر تزویج بین توابع موج را از بین می‌برد. و به همین ترتیب در دماهای بالا نوسانات دمایی بسیار حساس خواهد بود.

## ۶-۳-۲ مدار معادل پیوند جوزفسون

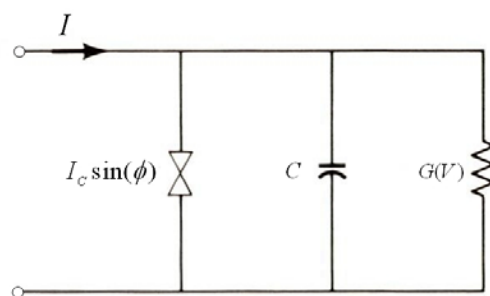
با توجه به مباحث مطرح شده تا به اینجا دو نتیجه کلی زیر قابل استنتاج است:

اول) جریان به اختلاف فاز دو طرف پیوند وابسته است.

دوم) نرخ تغییرات اختلاف فاز به ولتاژ وابسته است.

باید به خاطر داشت که روابط جوزفسون فقط برای ابرالکترون‌ها صادق است و علاوه بر آن در دمای غیر صفر الکترون‌های معمولی نیز می‌توانند جریان داشته باشند<sup>۱</sup>. لذا در ولتاژهای بسیار کم نیز جریان ناشی از تک‌الکترون‌ها وجود دارد که دیگر مکانیزم هدایت آنها تونل‌زنی نیست بلکه هدایت معمولی است. همچنین در بسیاری از کاربردها ناحیه سد پیوند، عایق نیست بلکه ممکن است یک فلز معمولی و یا یک ارتباط ضعیف بین دو ابررسانا باشد که در این صورت جریان نشتی به وجود خواهد آمد. برای در نظر گرفتن اثر جریان‌های اشاره شده در مدل پیوند، می‌توان یک مقاومت موازی در نظر گرفت.

یک پیوند همیشه دارای یک خازن موازی شده است که ناشی از ساختار خود پیوند است. در نتیجه برای یک پیوند جوزفسون واقعی مدل مداری نشان داده شده در شکل ۷-۲ پیشنهاد می‌شود [۲۰]. البته در حالت کلی  $G$  تابعی از ولتاژ است اما در بسیاری از موارد یک عدد ثابت فرض می‌شود. حل مسئله-های مداری با استفاده از این مدار معادل می‌تواند پیچیده باشد؛ به علت اینکه  $\phi$  باید از معادله (۲-۱۶) بدست آید و این خود به  $C$ ،  $G$  و همچنین به امپدانس مداری که به آن وصل شده است، وابسته می‌باشد.



شکل ۷-۲. مدل مداری پیوند جوزفسون

<sup>۱</sup> Quasi particle current

## ۷-۳-۲ عملگرهای کوانتومی در هامیلتونی پیوند جوزفسون

همانطور که می‌دانیم هر مدار الکتریکی LC از دیدگاه کوانتومی همانند یک نوسانگر هماهنگ<sup>۱</sup> عمل می‌کند. بنابراین با توجه به مدل مداری ارایه شده از یک پیوند جوزفسون، به آسانی می‌توان تشخیص داد که یک پیوند جوزفسون تنها نیز می‌تواند یک نوسانگر هماهنگ باشد.

در ابتدا سعی می‌کنیم هامیلتونی یک مدار نوسانی LC را توسط عملگرهای کوانتومی که از پارامترهای مدار ساخته شده‌اند، بیان کنیم. انرژی این سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{q^2}{2C} + \frac{\varphi^2}{2L} \quad (21-2)$$

که در آن  $q$  و  $\varphi$  به ترتیب بار و شار ذخیره شده در خازن و سلف می‌باشند. با توجه به انرژی بدست آمده، می‌توان مشتقات انرژی نسبت به دو پارامتر مستقل مدار بیان نمود:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q}{C} = -L \frac{\partial I}{\partial t} = -\dot{\varphi} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\varphi}{L} = I = \dot{q} \end{cases} \quad (22-2)$$

به راحتی می‌توان اثبات نمود که رابطه جابجایی عملگر کوانتومی<sup>۲</sup> در مورد پارامترهای فوق برقرار است:

$$[\hat{q}, \hat{\varphi}] = -i\hbar \quad (23-2)$$

با یک مقایسه ساده نسبت به عملگرهای کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ، می‌توان آنها را به شکل زیر با یکدیگر معادل نمود:

<sup>۱</sup> Harmonic oscillator

<sup>۲</sup> Quantum commutator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + m\omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{q} \Leftrightarrow \hat{p} \\ \hat{\phi} \Leftrightarrow \hat{x} \\ \omega \Leftrightarrow 1/\sqrt{LC} \end{cases} \quad (24-2)$$

در نهایت، عملگرهای خلق<sup>۱</sup> و نابودی<sup>۲</sup> برای هامیلتونی متناظر با روابط زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_c}}(\hat{\phi} + iZ_c\hat{q}) \\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_c}}(\hat{\phi} - iZ_c\hat{q}) \end{cases} \quad (25-2)$$

که در آن  $Z_c = \sqrt{L/C}$  امپدانس مشخصه مدار می‌باشد. در این صورت رابطه مشهور کوانتومی زیر برقرار خواهد بود:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) \quad (26-2)$$

## ۸-۳-۲ مشخصه ایستایی I-V<sup>۳</sup> پیوند جوزفسون

در این بخش مشخصه ولتاژ-جریان پیوند را تحت شرایطی که جریان ثابتی به آن داده شده است،

بررسی می‌کنیم. به این منظور معادله دیفرانسیل ولتاژ مدار معادل را بدست می‌آوریم:

$$I = I_c \sin(\phi) + GV + C \frac{dV}{dt} \quad (27-2)$$

اگر از روابط (۱۵-۲) و (۱۶-۲) استفاده کنیم، سمت راست معادله فوق تنها تابعی از  $\phi$  خواهد بود:

<sup>۱</sup> Creation operator

<sup>۲</sup> Annihilation operator

<sup>۳</sup> Static I-V Characteristics

$$I = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{\hbar G}{2e} \frac{d\phi}{dt} + I_c \sin(\phi) \quad (28-2)$$

حال اگر معادله بالا را بر  $I_c$  تقسیم کرده و از تغییر متغیر  $\theta \equiv \omega_c t \equiv \left(\frac{2e}{\hbar}\right) \left(\frac{I_c}{G}\right) t$  استفاده کنیم:

$$\frac{I}{I_c} = \beta_c \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + \frac{d\phi}{d\theta} + \sin(\phi) \quad (29-2)$$

در رابطه فوق  $\beta_c = \frac{\omega_c C}{G} = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) \left(\frac{I_c}{G}\right) \frac{C}{G}$  پارامتر اصلی پیوند جوزفسون است و ضریب

مک‌کامبر<sup>۱</sup> نامیده می‌شود [۲۳]. این ضریب به بیان دیگر، نسبت سوسپتانس خازنی (در فرکانس

جوزفسون) به رسانایی پیوند می‌باشد [۲۲].

برای یافتن مشخصه ولتاژ-جریان پیوند، ولتاژ متوسط  $V = \left\langle \left(\frac{\hbar}{2e}\right) \frac{d\phi}{dt} \right\rangle$  را به‌ازای جریان اعمالی

در  $\beta_c$  های مختلف می‌یابیم. در ساده‌ترین حالت که  $C=0$  و در نتیجه  $\beta_c = 0$ ، با انتگرال‌گیری مستقیم از

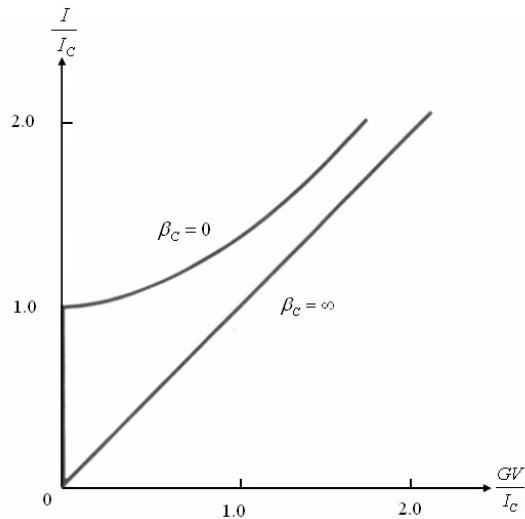
رابطه (۲۷-۲) داریم:

$$V = \begin{cases} 0 & I < I_c \\ \frac{I_c}{G} \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{G} & I > I_c \end{cases} \quad (30-2)$$

در شکل ۸-۲ جریان نرمالیزه  $I/I_c$  بر حسب ولتاژ نرمالیزه شده  $GV/I_c$  برای  $\beta_c = 0$  و  $\beta_c = \infty$  رسم شده

است.

<sup>۱</sup> Mc-Cumber

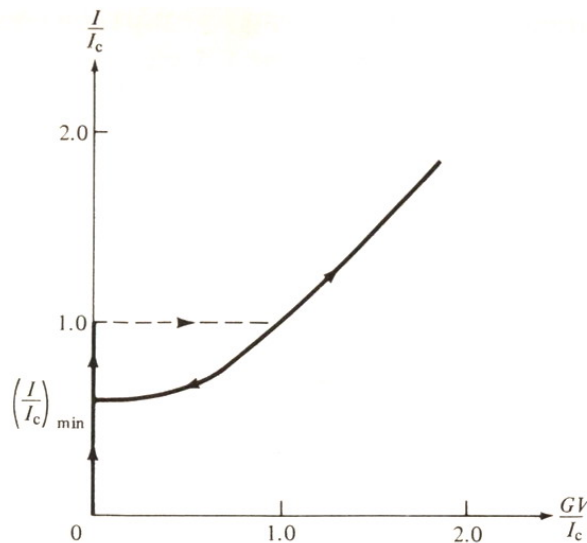


شکل ۸-۲. جریان نرمالیزه  $I/I_c$  بر حسب ولتاژ نرمالیزه شده  $GV/I_c$

واضح است که در حالت  $\beta_c = 0$ ، به ازای هر مقدار جریان، تنها یک مقدار ولتاژ خواهیم داشت. در ضمن ملاحظه می‌شود که در ولتاژ صفر، جریان قابل توجهی می‌تواند از پیوند عبور نماید.

برای بدست آوردن رابطه دقیق بین میانگین ولتاژ و جریان ثابت اعمالی، لازم است از معادله (۲)-

(۲۹) بصورت عددی انتگرال‌گیری شود. در شکل ۹-۲ نتیجه حل این معادله به ازای  $\beta_c = 4$  رسم شده است.



شکل ۹-۲. منحنی مشخصه پیوندی با  $\beta_c = 4$

اگر پیوندی با  $\beta_c = 4$  به یک منبع جریان DC متصل شود و جریان منبع از صفر شروع به افزایش کند، مشخصه I-V مطابق با پیکان‌های نشان داده شده در شکل فوق دنبال می‌شود. وقتی جریان به مقدار حدی  $I_c$  برسد، ولتاژ با یک پرش ناگهانی از صفر به مقداری غیرصفر جهش می‌کند. حال اگر جریان کاهش یابد، ولتاژ از مسیری دیگر کاهش یافته تا در  $I_{min}$  به صفر برسد. لازم به ذکر است که در بکارگیری پیوندهای جوزفسون در حلقه‌های SQUID، پیوندهایی با حداقل پسماند مغناطیسی<sup>۱</sup> (حداقل  $\beta_c$ ) مورد نظر می‌باشد [۲۲][۲۳].

---

<sup>۱</sup> Hysteresis



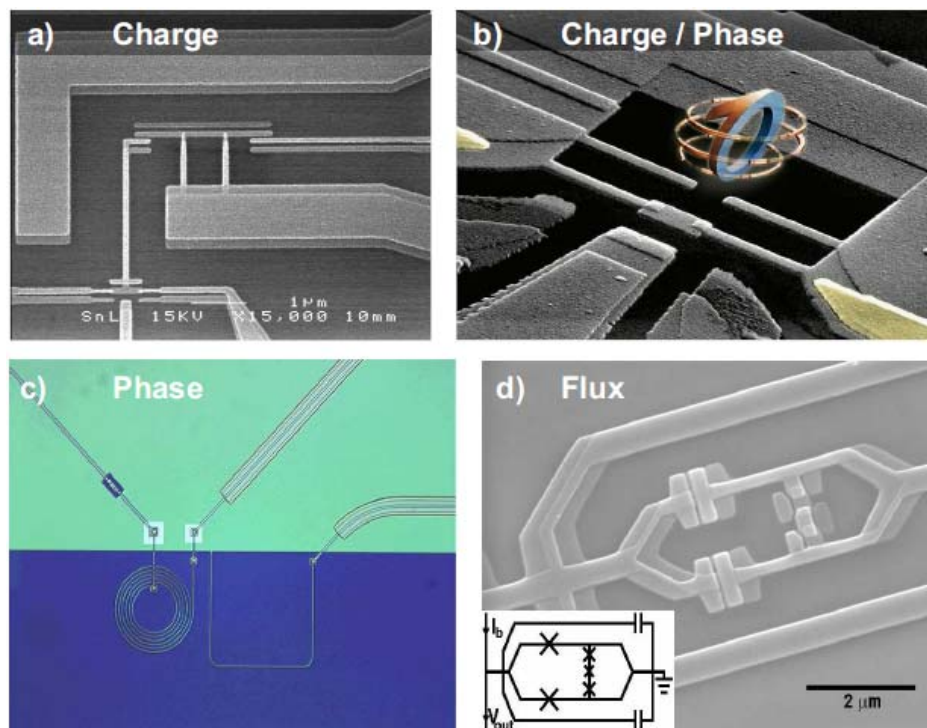
## فصل ۳ بیت‌های کوانتومی ابررسانا

### ۱-۳ مقدمه

در این فصل ابتدا با مفاهیم مشترک کوانتوم و ابررسانایی آشنا می‌شویم و پس از آن انواع بیت‌های کوانتومی ابررسانا معرفی شده و مختصراً در مورد طرز کار آنها شرح خواهیم داد. در ادامه به طور خاص کیوبیت‌های ابررسانا بر مبنای فاز را که تمرکز این پروژه بر روی این مدار می‌باشد، پرداخته و به شکل تحلیلی خواص آن را بررسی می‌کنیم.

### ۲-۳ مدارهای کوانتومی ابررسانا

با دادن نظم‌ها و توپولوژی‌های مختلف به این المان‌ها در یک مدار، زمینه ساخت مدارهایی که می‌توانند بر روی تعداد فوتون‌ها، بار، شار و فاز حالت‌های کوانتیزه شده عمل کنند، به وجود می‌آید (شکل ۱-۳).



شکل ۳-۱. یک مجموعه از بیت‌های کوانتومی مختلف. شکل اول، یک بیت کوانتومی بر پایه بار بر اساس جعبه زوج کوپر به همراه خواندن یک ترانزیستور تک الکترونی. شکل دوم، یک بیت کوانتومی بار/فاز که جعبه زوج کوپری است که از طریق بار تحریک می‌شود، ولی متغیر خواندنی آن شار است. شکل سوم، یک بیت کوانتومی بر پایه فاز که هم متغیر کنترل و هم متغیر خواندنی آن فاز است. شکل چهارم، یک بیت کوانتومی بر پایه شار که جهت جریان، حالت کوانتومی آن است و شار متغیر خواندنی آن است [۱۰] و [۲۴].

ساده ترین ترکیب، یک مدار LC ساده است که یک نوسانگر هارمونیک الکتریکی ساده را تولید می‌کند. این مدار، اگر در فرکانس‌های به حد کافی بالا (در حد گیگاهرتز) و در دماهای به حد کافی کم (در حد کمتر از صد میلی کلوین) عمل کند، دارای سطوح انرژی قابل تشخیص خواهد بود. در یک نوسانگر هارمونیک، سطوح انرژی فواصل یکسانی دارند و در نتیجه فوتون‌های ایجاد شده دارای انرژی یکسانی خواهند بود و قابل تفکیک نیستند. برای اینکه بتوانیم کوانتیزاسیون انرژی را بهتر ببینیم، نیاز به

یک المان غیر خطی داریم. چنانچه سلف با یک پیوند جوزفسون کوچک جایگزین شود، مداری بنام جعبه زوج کوپر<sup>۱</sup> به وجود می‌آید که نوعی بیت کوانتومی بر پایه بار است. پیوند این امکان را برای زوج کوپر فراهم می‌کند که بین دو طرف تونل بزنند. اما این تونل‌زنی به اندازه‌ای ضعیف است که بتوان حالت‌های بیت کوانتومی را با اختلاف بار بین جزیره‌ها (دو سمت پیوند) تعیین کرد.

از نظر فیزیک و ریاضیات این مدار، مزدوج متغیر کوانتومی بار، میزان شار گذرنده از حلقه ابررسانا می‌باشد. به این ترتیب که می‌توان حالت کوانتومی را با ذخیره کردن شار در یک حلقه که توسط پیوند جوزفسون کنترل می‌شود، ساخت. در این صورت، متغیر کوانتومی، تعداد کوانتای شار، یا معمولاً جهت شار (جریان حلقه) ایجاد شده است. همچنین راه دیگر این است که سلف را این بار با یک پیوند جوزفسون بزرگ جایگزین کنیم. این ترکیب نیز فی‌نفسه تقریباً هارمونیک است اما استفاده هوشمندانه از یک جریان بایاس، سبب تقویت اثر غیرخطی می‌شود.

یک اتم در سیستم‌های کوانتومی ذاتی، از ذراتی که به شدت به یکدیگر پیوند دارند ساخته شده است و می‌تواند در یک محیط خلأ خیلی ایده آل برای  $10^{14}$  نوسان، ذات کوانتومی خالص خود را به نمایش بگذارد. اتم‌های مصنوعی که توسط مدارهای کوانتومی ساخته می‌شود، از میلیاردها اتم تشکیل شده است و به طراح این امکان را می‌دهد که پارامترهای اتم (مصنوعی) را طوری تنظیم کند که با اتم‌های طبیعی سخت یا غیرممکن است. اگر چه این سیستم‌های ماکروسکوپی، درجات آزادی بسیاری دارند که به خودی خود می‌توانند منجر به عدم همدوسی بشوند. هر گونه نویز یا اغتشاش یا غیرایده آل

---

<sup>1</sup> Cooper Pair Box

بودن در سیستم می‌تواند یک منبع بالقوه حذف همدوسی باشد. نویزهایی که به متغیر مورد نظر و یا مزدوج فیزیکی آن کوپل می‌شوند، بسیار مضرند (جدول ۱-۳). به حداقل رساندن منابع نویز محیطی و تعیین و بهینه‌سازی طریقه کوپل شدن آنها به مدار، یکی از مهمترین مباحث تحقیقات در مورد مدارهای کوانتومی می‌باشند.

جدول ۱-۳. هر بیت کوانتومی به انواع مختلفی از نویز حساس‌تر است. بیت‌های کوانتومی ساده که متغیر کنترلی و خواندنی یکسانی را استفاده می‌کنند، حساسیت بیشتری را نسبت به نویز در آن پارامتر از خود نشان می‌دهند. در بیت‌های کوانتومی که متغیرهای خواندنی دیگری را استفاده می‌کنند، می‌توان اثرات نویز را با کار کردن در نقاط غیر حساس مرتبه اول و خواندن مشخصه‌های مرتبه دوم کاهش داد.

متغیر کنترل	متغیر خواندنی	نویز جریان بحرانی	نویز شار	نویز بار
بار	بار	متوسط	پایین	بالا
شار	شار	متوسط	بالا	پایین
فاز	فاز	بالا	پایین	پایین
شار	پذیرفتاری مغناطیسی <sup>۱</sup>	متوسط	متوسط	پایین
بار	پذیرفتاری الکتریکی <sup>۲</sup>	متوسط	پایین	متوسط

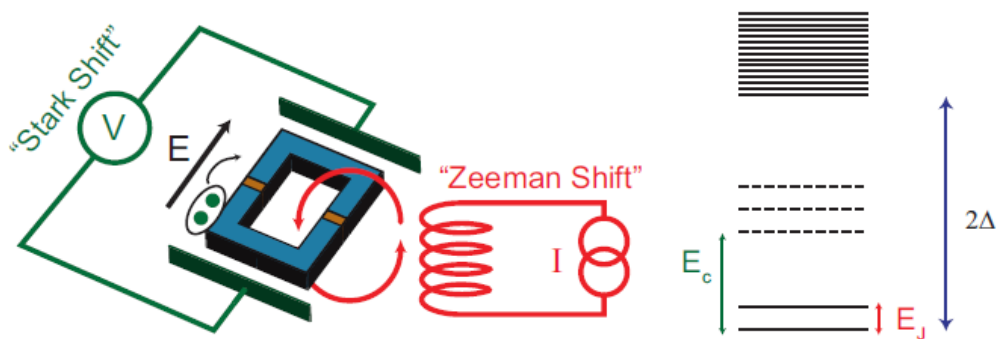
پس از کنترل بیت کوانتومی توسط متغیرهای کنترلی، حالت این بیت به عنوان خروجی مدار بایستی اندازه‌گیری شود تا نتیجه الگوریتم پیاده شده بر روی کیوبیت مشخص شود. این موضوع یک مسیر طبیعی برای نفوذ نویز ناخواسته به سیستم ایجاد می‌کند. برای حل این مسئله، تکنیک‌هایی معرفی شده‌اند

<sup>1</sup> Magnetic susceptibility

<sup>2</sup> Electric susceptibility

که در آنها به جای اینکه بار، شار یا فاز را مستقیماً اندازه بگیریم، یک پارامتر مرتبه دوم نظیر نفوذ پذیری مغناطیسی یا الکتریکی را اندازه می‌گیریم (دوقطبی‌ها). این تکنیک‌ها، این امکان را به ما می‌دهد که میزان نفوذ نویز از طریق اندازه‌گیری را کاهش دهیم. تلاش‌های بسیار زیادی درباره کاهش اثر منابع نویز از طریق تبادل ایده‌ها بین گروه‌های معتبر سرتاسر دنیا، انجام می‌شود.

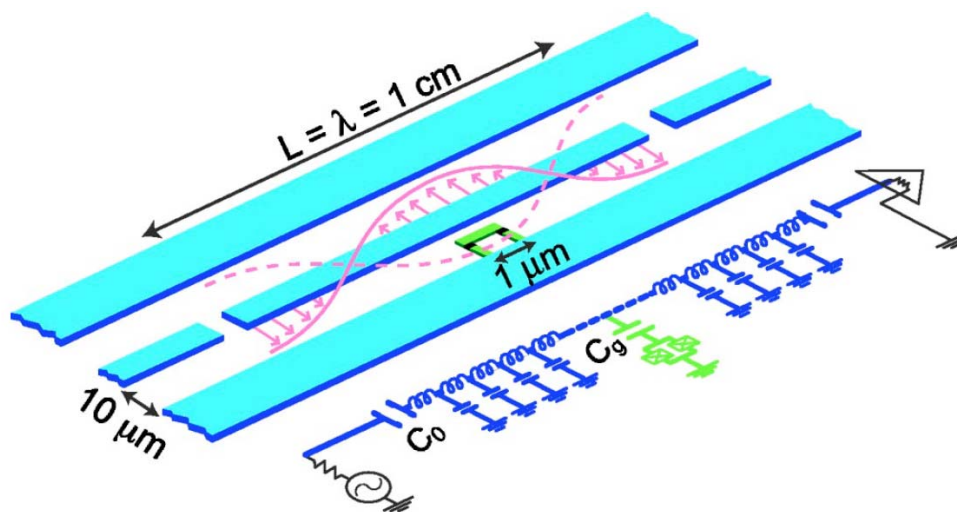
یک جعبه زوج کوپر از دو جزیره ابررسانای کوچک تشکیل شده است که از طریق یک کانال (یک عایق یک نانومتری مانع بین دو جزیره) پیوند جوزفسون به یکدیگر تزویج شده‌اند [۲۴]. در کیوبیت‌های ابررسانا، دو مقیاس انرژی تعریف می‌شود؛ انرژی بار الکتریکی ( $E_C$ ) که حاصل اضافه کردن الکترون به یکی از دو جزیره است و انرژی جوزفسون ( $E_J$ ) که حاصل تونل‌زنی یک زوج کوپر بین دو جزیره کانال می‌باشد. در این سیستم، هر دوی این انرژی‌ها معادل فرکانس‌هایی در حد گیگاهرتز است. بیشترین مقدار  $E_C$  و  $E_J$  بر اساس شکل هندسی مدار قابل تنظیم است و همچنین می‌تواند بر اساس اعمال ولتاژ گیت یا میدان مغناطیسی اعمالی، دقیق‌تر تنظیم شود (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳. جعبه زوج کوپر به عنوان یک اتم قابل تنظیم. Cooper pair (جفت‌های دایره ای شکل سبز رنگ) می‌توانند بین جزیره‌های آبی رنگی که توسط جوزفسون جانکشن به رنگ نارنجی از یکدیگر جدا شده‌اند، تحت تاثیر ولتاژ اعمالی به گیت (میدان الکتریکی  $E$ ) و جریان (شار جاری در حلقه) کانال بزنند. به جعبه زوج کوپر می‌توان به عنوان یک اتم نگاه کرد که سطوح انرژی آن قابل تنظیم است. انرژی الکترواستاتیکی ( $E_C$ ) می‌تواند با اعمال یک میدان الکتریکی تغییر کند (شیفت Stark) و انرژی کانال زدن جوزفسون ( $E_J$ ) می‌تواند توسط یک میدان مغناطیسی (شیفت Zeeman) تنظیم شود. این سطوح برانگیختگی که پایین تر قرار دارند، به وسیله  $2\Delta$  gap مربوط به ابر رسانا از سطوح طبیعی و پیوسته الکترون‌ها محافظت می‌شوند [۱۰].

### ۳-۳ مدار کوانتومی الکترودینامیکی (Circuit Quantum Electrodynamics)

مدارهای ابررسانا را می‌توان به گونه‌ای ساخت که مانند اتم‌های مصنوعی عمل کنند. این مدارها، معمولاً در فرکانس‌های میکروویو کار کرده و متغیرهای کوانتومی آنها با استفاده از متغیرهای ماکروسکوپی نظیر جریان و ولتاژ قابل کنترل هستند. اگر چه پارامترهای مدار، خود ذاتاً کوانتومی هستند، میدان مغناطیسی که تا کنون برای برهم کنش با مدار از آنها استفاده می‌شد، به گونه‌ای کلاسیکی مورد استفاده قرار می‌گرفتند.



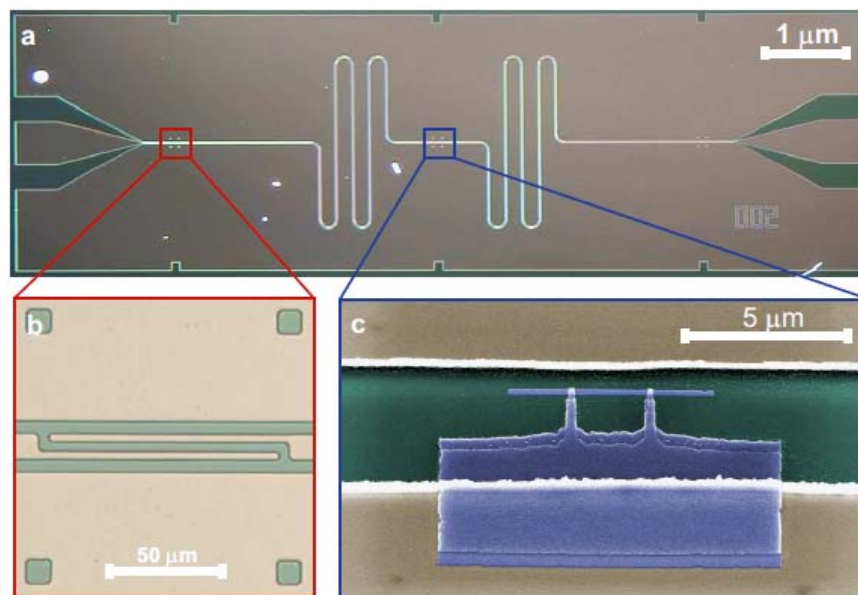
شکل ۳-۳. اولین طراحی از یک کاواک کوانتومی الکترودینامیکی ساخته شده از فیلم ابررسانا. جعبه زوج کوپر (سبز) در مرکز رزوناتور موج‌بر (آبی) قرار دارد. فرکانس رزونانس در حدود ۵ گیگاهرتز است. کاواک از یک سمت کنترل می‌شود و از سمت مقابل سیگنال انتقال یافته اندازه‌گیری می‌شود [۲۶].

با بهره‌گیری از طبیعت کوانتومی امواج میکروویو، می‌توان بسیاری از مشکلات مربوط به اندازه‌گیری در این مدارها را به گونه‌ای حل کرد که آنها در معرض منابع نویز قرار ندهیم. می‌توان آنها را از میرایی تابشی حفاظت کرد و همچنین از امواج میکروویو به عنوان وسیله‌ای برای کوپل شدن بیت‌های کوانتومی از فاصله دور استفاده نمود.

توسط معماری مدار کوانتومی الکترو دینامیکی، نوعی از بیت کوانتومی ابررسانایی به نام کیوبیت بار طراحی شده است [۲۶]. قلب این کیوبیت که آن را می‌توان به عنوان یک اتم مصنوعی تصور کرد، در داخل خط انتقال یک رزوناتور قرار داده می‌شود و به این صورت یک کاواک مایکروویو کوانتومی تشکیل می‌شود (شکل ۳-۳). سیگنال محبوس در رزوناتورهای غیر ابررسانا پس از بازتاب از دو سر انتهایی تنها چند بار می‌تواند طول مسیر را قبل از اینکه به صورت گرما جذب شود، طی کند. اما در رزوناتور ابررسانا، تقریباً هیچ اتلافی وجود ندارد و گپ (فاصله خالی بین خطوط انتقال) را می‌توان به طوری تنظیم کرد که فوتون از صدها تا نزدیک به یک میلیون بار قبل از آنکه بتواند فرار کند یا جذب شود، بازتاب داشته باشد. پس یک فوتون می‌تواند درون رزوناتور تا دهها کیلومتر مسافت کند قبل از آنکه جذب شود. از طرفی نوعی فیلتر مایکروویو می‌باشد و کمک می‌کند که بیت کوانتومی از نویز ناخواسته محیطی حفاظت شود. خط انتقال هندسه بسیار ساده ای دارد که آن را تبدیل به محیطی می‌کند که نسبتاً ساده قابل مدل کردن و کنترل است. ساده بودن این محیط، یکی از مهمترین جنبه‌های این معماری است. نمای یک طراحی پیاده‌سازی شده عملی این کیوبیت در شکل ۳-۴ نشان داده شده است.

ممان دو قطبی ایجاد شده در اتم‌های مصنوعی مدارهای کوانتومی می‌تواند ده هزار برابر بزرگتر از یک اتم قلیایی ساده و حتی ده برابر بزرگتر از یک اتم ریدبرگ باشد. این موضوع باعث تقویت تزویج آنها به کاواک می‌شود. به طور کلی، ابعاد کاواک بایستی حداقل به اندازه یک طول موج در جهت مورد نظر باشد. در کاواک خط انتقال تک بعدی معرفی شده (شکل ۳-۳ و شکل ۴-۳) دو بعد دیگر به مقداری بسیار کمتر از طول موج فشرده شده است و این سبب افزایش چگالی انرژی تا یک میلیون مرتبه بر روی کاواک مایکروویو سه بعدی می‌شود و همچنین ممان دو قطبی را تا هزار مرتبه افزایش می‌دهد. این تزویج شدید سبب می‌شود که مدار بتواند حتی در حضور منابع نویز همدوس باقی بماند. این مدارها با

توجه به نسبت بین قدرت تزویج و میزان همدوسی در رژیمهای مختلفی قرار می گیرند که در هر کدام کاربردهای خاصی قابل تصور است.



شکل ۳-۴. (a) تصویر نوری از رزوناتور خط انتقال ابرسانی نایوبوم است که بر روی سیلیکون نشاند شده است. (b) خازن تزویج. (c) تصویر میکروسکوپ الکترونی با رنگ آمیزی غیرواقعی؛ آبی: درون کاواک، بژ: روی سطح سیلیکونی و سبز: خط انتقال. جعبه زوج کوپر از دو جزیره آلومینیومی به رنگ آبی که توسط یک پیوند جوزفسون کوچک به یکدیگر متصل شده اند (قسمت هم پوشانی دو انگشت بر روی جزیره های باریک)، تشکیل شده است [۱۰] و [۲۴].

### ۳-۴ بیت های کوانتومی ابرسانا

تا به حال کیوبیت ها در ساختارهای متفاوتی از جمله یون های محبوس<sup>۱</sup> [۲۸] و [۲۹]، اتم های خنثی

<sup>۱</sup> Trapped Ions



[۳۰]، سیستمهای اپتیکی [۳۱] و [۳۲]، ابررساناها [۳۳]–[۳۷] و ... بررسی و ساخته شده‌اند. از بین ساختارهای متفاوت معرفی شده تا به امروز، انواع بیت‌های کوانتومی بر مبنای مواد ابررسانا [۳۸]–[۴۰] توجه و محبوبیت بیشتری را به خود اختصاص داده‌اند که این امر به دلیل قابلیت افزایش تعداد کیوبیت‌های یک سیستم و همچنین امکان افزایش شدت برهم‌کنش آنها با امواج الکترومغناطیسی است. این تمایل به این دلیل است که ابررساناها به واسطه نشان دادن مقاومت در حد صفر موجبات محیطی بدون تلفات را فراهم می‌آورند و در نتیجه جدا از محدود نمودن انرژی در کاواک موجود، می‌توانند شدت وابستگی بین اجزاء کوانتومی مجموعه را افزایش دهند. بدین ترتیب برهم‌کنش بین موج و ماده در این شرایط به حدی می‌رسد که توسط یکی از پارامترهای ساختار می‌توان از حالت کوانتومی داخل اطلاع پیدا نمود.

دلیل بسیار مهم دیگر خاصیت غیرخطی بودن المانی به نام پیوند جوزفسون در پدیده ابررسانایی است که تنها عنصر الکتریکی شناخته شده می‌باشد که از خود در شرایط مناسب هیچ تلفاتی نشان نمی‌دهد. این موضوع برای موارد حساس مانند مدارهای کوانتومی بسیار حائز اهمیت است.

در چنین مدارهایی ناگزیریم که دمای مدار را تا زیر ۱۰۰ میلی‌کلوین پائین ببریم. این امر صرفاً به دلیل ذات ابررسانا بودن قطعات مدار نیست بلکه به دلیل حساسیت مدار کوانتومی به انرژی محیط می‌باشد. به طور مثال اگر فرکانس متناظر با اختلاف انرژی دو حالت کوانتومی را برابر ۵ گیگاهرتز در نظر بگیریم، دمایی در حدود ۲۰ میلی‌کلوین مناسب خواهد بود.

در کیوبیت‌های ابررسانا، بسته به اینکه حالت کوانتومی بر حسب کدام پارامتر تعریف می‌شود تا اطلاعات در آن گنجانده شود، آن را نام‌گذاری می‌نمایند. از انواع مختلف بیت‌های ابررسانا می‌توان به بیت‌های کوانتومی بر اساس بار، فاز و شار اشاره نمود.

با توجه به جستجوهای به عمل آمده، دو نوع بیت‌های کوانتومی بر اساس بار و فاز توجه بیشتری را به خود جلب نموده‌اند. البته نوع فاز و نوع شار از لحاظ ساختاری بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشد ولی در عملکرد تفاوت‌هایی وجود دارد. بین این دو نوع هنوز به طور قطع نمی‌توان قضاوت نمود که کدام یک برتری دارند اما بر اساس تحقیقات و پیشنهادات موجود، می‌توان گفت که در مرحله ساخت، بیت‌های کوانتومی بر اساس بار به دلیل اینکه کاواک آن از نوع مایکرواستریپ<sup>۱</sup> (خط انتقال تخت) بوده و پیوندهای جوزفسون تنها برای خود حالت کوانتومی در نظر گرفته می‌شوند، ساده‌تر بوده و توانایی افزایش تعداد بیت‌های تزویجی در ساختار آن بیشتر است (Scalability). اما کنترل و اندازه‌گیری حالت کوانتومی در این ساختار به مراتب از سیستم کوانتومی بر اساس فاز پیچیده‌تر بوده و نیازمند لوازم پیشرفته و دقیق طیف‌نگاری است. در حالیکه در بیت‌های کوانتومی بر مبنای فاز بر خلاف ساختار نسبتاً پیچیده آن که چندین پیوند جوزفسون به شکل خاصی در کنار هم قرار گرفته‌اند، اندازه‌گیری و کنترل آن به مراتب ساده‌تر می‌باشد.

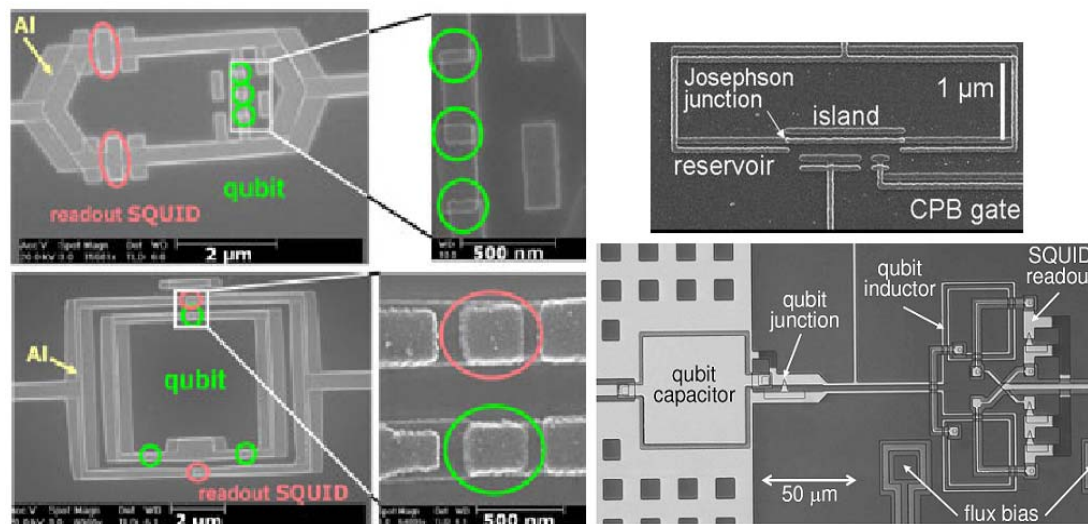
### ۳-۴-۱ انواع کیویت‌های ابررسانا

یک کیویت بار در ساده‌ترین شکل از یک جزیره بسیار کوچک ابررسانا تشکیل شده که توسط یک پیوند جوزفسون به سایر بخش‌های مدار متصل است و از طریق یک خازن، به آن ولتاژ گیت اعمال می‌شود (شکل ۳-۵ راست-بالا). در دماهای بسیار پایین، به دلیل گسستگی طیف انرژی مجاز در جزیره و همچنین اهمیت نیروی دافعه کوئی، تونل‌زنی زوج‌های کوپر به داخل جزیره و برعکس مجاز نمی‌باشد

---

<sup>۱</sup> Microstrip

مگر در ولتاژهای گیت خاص. در نتیجه تعداد زوجهای کوپر اضافه بر روی جزیره ابررسانا به طور دقیق قابل شمارش می‌باشد. معمولاً حالت جزیره، بدون هیچ زوج کوپر اضافه بر روی آن، حالت  $|0\rangle$  و با یک زوج کوپر بر روی آن حالت  $|1\rangle$  در نظر گرفته می‌شوند. در ولتاژهای گیت خاص دو حالت فوق تبهگن بوده و یک زوج کوپر میتواند متناوباً به درون جزیره تونل بزند یا از آن خارج شود و بدین ترتیب حالت کوانتومی کیوبیت به صورت ترکیبی از  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  خواهد بود.



شکل ۳-۵. انواع کیوبیت‌های ابررسانا؛ چپ: کیوبیت شار (flux qubit)،

راست-بالا: کیوبیت بار (charge qubit)، راست-پایین: کیوبیت فاز (phase qubit) [۲۴] و [۴۱].

یک کیوبیت شار از یک RF SQUID که توسط شار خارجی بایاس می‌شود تشکیل یافته است (شکل ۳-۵ چپ). زمانی که شار خارجی مضرب نیمه صحیحی از کوانتای شار  $\Phi_0$  باشد، پتانسیل این سیستم دارای دو کمینه هم‌انرژی می‌باشد که توسط یک سد پتانسیل از یکدیگر جدا شده‌اند. این دو کمینه انرژی متناظر با دو حالت ساعتگرد و پادساعتگرد برای جریان درون حلقه اسکوئید می‌باشند و به عنوان دو حالت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  کیوبیت در نظر گرفته می‌شوند. با تغییر شار خارجی یکی از این کمینه‌ها عمیق‌تر از دیگری شده و در نتیجه حالت پایه سیستم متناظر با جریان ساعتگرد و یا پادساعتگرد خواهد

بود. به دلیل پدیده تونل زنی ماکروسکوپیک<sup>۱</sup> همواره احتمال تونل زنی بین این دو حالت وجود دارد، مخصوصاً زمانی که شار خارجی دقیقاً مضرب نیمه صحیحی از کوانتای شار  $\Phi_0$  باشد. در نتیجه با تغییر شار خارجی می توان حالت کیوبیت را بصورت ترکیبات متفاوتی از دو حالت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  در آورد.

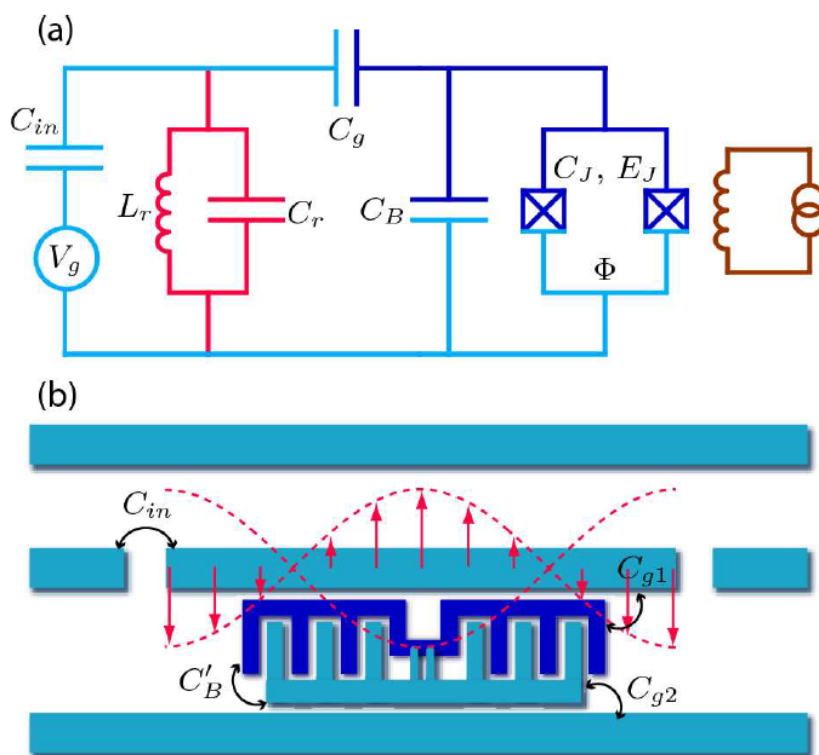
در یک کیوبیت ابررسانا بر مبنای فاز، سیستم کوآنتومی مورد نظر یک پیوند جوزفسون می باشد که توسط یک جریان DC بایاس شده است (شکل ۳-۵ راست-پایین). پتانسیل این سیستم، به صورت تابعی از اختلاف فاز ابررسانایی دو سر پیوند، دارای شکل سکوهایی متمایل<sup>۲</sup> می باشد. طرازهای انرژی در هر یک از چاههای این پتانسیل گسسته بوده و به دلیل هارمونیک نبودن پتانسیل، انرژی گذار بین این طرازها با یکدیگر متفاوت می باشند. با انتخاب مناسب جریان بایاس می توان تعداد طرازهای مجاز انرژی را در درون چاه پتانسیل تعیین کرد. بدین ترتیب با ایزوله کردن دو طراز کمینه درون چاه، حالت کوآنتومی متناظر با حالت پایه را  $|0\rangle$  و اولین حالت برانگیخته را  $|1\rangle$  در نظر می گیرند. انتقال بین این دو حالت نیز توسط یک جریان میکروویو با فرکانسی مساوی با فرکانس گذار بین این دو حالت ( $\omega_{01}$ ) صورت می گیرد.

اخیراً انواع پیچیده تری از کیوبیتها نیز ساخته شده اند که کارکردشان بر اساس ترکیبی از این پارامترها می باشد، مانند ترانسمنون ها که ترکیبی از کیوبیت های فاز و بار هستند [۲۷]. در شکل ۳-۶ مدل مداری یک کیوبیت ترانسمنون به همراه شماتیک ساده شده طراحی ساخت آن آورده شده است. مشابه طراحی

<sup>۱</sup> Macroscopic quantum tunneling

<sup>۲</sup> Tilted washboard

کیویتت بار، دو پیوند جوزفسون جعبه زوج کوپر (با پارامترهای  $C_J$ ,  $E_J$  یکسان) وجود دارند که در اینجا با یک خازن بزرگ ( $C_B$ ) شانت شده‌اند. برای هماهنگی<sup>۱</sup> بیشتر، این خازن برابر با خازن بزرگ گیت ( $C_G$ ) انتخاب شده است. در این ساختار پیوندها و خازن طوری انتخاب شده‌اند که انرژی جوزفسون بسیار بزرگتر از انرژی بار الکتریکی می‌باشد. توضیحات تکمیلی در فصول بعدی آورده شده‌اند. بایاس سیستم در این رژیم باعث شده است که حساسیت به نویز بار کاهش پیدا نموده و تزویج کیویتت و فوتون نیز قوی‌تر بشود.



شکل ۳-۶. (a) مدل مداری یک کیویتت ترانسمون. دو پیوند جوزفسون (با پارامترهای  $C_J$ ,  $E_J$  یکسان) با یک خازن بزرگ ( $C_B$ ) شانت شده‌اند. (b) شماتیک ساده شده طراحی کیویتت ترانسمون [۲۷].

<sup>۱</sup> Matching capacitances

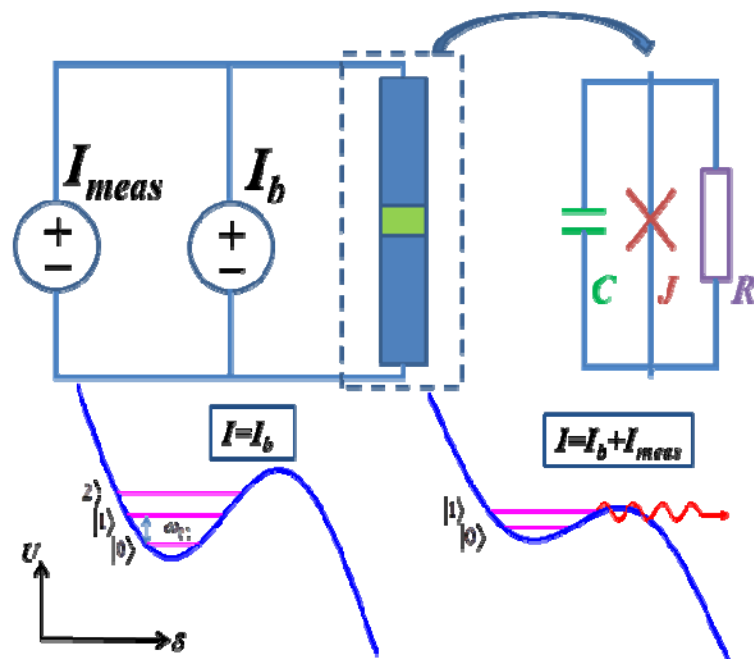
انواع مختلف این ساختارها توسط گروه‌های مجرب در دانشگاه‌های معتبر دنیا پس از طی چندین سال تحقیق و پیشرفت‌های قابل توجه، همچنان در دست بررسی بوده و از مباحث روز در مجلات معتبر می‌باشند.

### ۵-۳ کیوبیت ابررسانایی بر مبنای فاز

از آنجائیکه تمرکز اصلی این پایان‌نامه بر روی کیوبیت‌های فاز می‌باشد، در یک بخش جداگانه به توضیح آن می‌پردازیم. در ابتدا ساده‌ترین کیوبیت ابررسانایی از نوع فاز را در نظر گرفته و خواص آن را بررسی می‌نماییم.

#### ۱-۵-۳ ساختار کیوبیت فاز

دلیل متناسب نمودن این کیوبیت به فاز، در نظر گرفتن حالت‌های کوانتومی فازی است. در واقع حالت‌ها به جای قرار داشتن در چاه کوانتومی مکانی، در چاه کوانتومی فازی محبوس خواهند بود. ساده‌ترین ساختار شناخته شده، یک پیوند جوزفسون در یک مدار اعمال جریان می‌باشد که در شکل ۷-۳ مشاهده می‌شود [۲۴]. از مدل مداری پیوند جوزفسون برای تحلیل کیوبیت استفاده شده است. در فصل قبل گفته شد که این مدل از سه المان موازی مقاومت، خازن و سلف متغیر تشکیل می‌شود. در واقع مهم‌ترین بخش کیوبیت فاز طریقه به کارگیری جریانهای اعمالی به پیوند جوزفسون است که در دو مرحله انجام می‌شود؛ ابتدا جریان بایاس ثابت ( $I_b$ ) به منظور تعیین نمودن حالت‌های کیوبیت در پیوند جوزفسون و سپس پالس جریان ( $I_{meas}$ ) برای اندازه‌گیری حالت فاز پیوند.



شکل ۷-۳. نمائی از یک کیوبیت با پیوند جوزفسون و تغییرات پتانسیل ایجاد شده بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند.

### ۲-۵-۳ حالت های کیوبیت فاز

همانطوری که در ادامه توضیح داده خواهد شد، در این سیستم شکل پتانسیل بر حسب اختلاف فاز به صورت سکوهایی متمایل (Tilted Washboard) خواهد بود (مطابق شکل ۷-۳). در حالت دائمی درون چاههای پتانسیل متوالی تشکیل شده، مطابق نظریه کوانتوم، حالت‌هایی با انرژی گسسته می‌توانند وجود داشته باشند که می‌توان آنها را حالت‌های مقید<sup>۱</sup> نامید. کیوبیت بر مبنای دو حالت پائین این چاه تعریف می‌شود که آنها را  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  می‌نامیم. این در حالی است که حالت‌های بالاتر نیز ممکن است در چاه پتانسیل موجود باشند (مانند حالت  $|2\rangle$  مطابق شکل) که این حالت‌های زائد معمولاً مزاحم عملکرد

<sup>۱</sup> Bound States

کیوبیت می‌باشند. البته طول عمر این حالت‌های ناخواسته بسیار کم است و در عمل همواره تمهیداتی برای جلوگیری از تاثیر آنها خواهیم داشت (توضیحات مکفی در فصول بعدی).

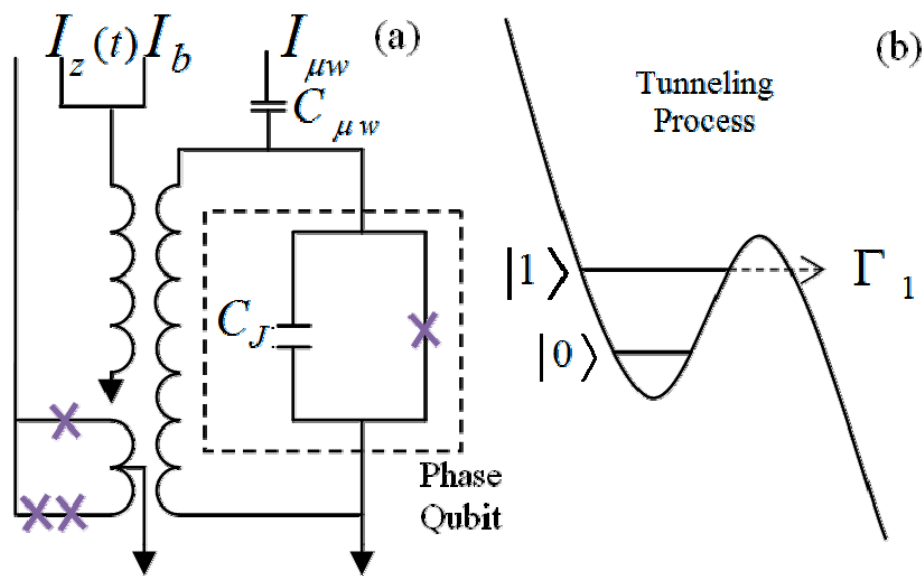
اندازه‌گیری حالت داخلی کیوبیت توسط یک پالس جریان ( $I_{\text{meas}}$ ) انجام می‌شود؛ به این ترتیب که پس از وارد شدن جریان به پیوند جوزفسون، سد پتانسیل کوتاه‌تر شده، و احتمال تونل‌زنی حالت‌های چاه افزایش می‌یابد، به خصوص در مورد حالت  $|1\rangle$ . در صورت تونل زدن حالت  $|1\rangle$  به دلیل ایجاد تغییر اختلاف فاز در دو سر پیوند، ولتاژی پدید می‌آید که توسط سنسورهای خارجی قابل خواندن می‌باشد و به این ترتیب، می‌توان حالت داخلی کیوبیت را پیدا نمود. اما باید به این مسئله دقت نمود که به دلایل کوانتومی تشابه میانگین ۱ بین حالت واقعی کیوبیت و حالت اندازه‌گیری شده هیچ‌گاه کامل نمی‌شود (به یک نمی‌رسد). تلاش‌های بسیاری برای بهبود این تشابه انجام شده است [۳۳] و [۴۰] و رقابت بر سر افزایش آن ادامه دارد.

در نهایت برای تغییر حالت کیوبیت، یک موج جریان مایکروویو مدوله شده با فرکانسی مطابق با فرکانس انتقال بین حالت‌های پایه کیوبیت ( $\omega_1$ ) در کنار جریان بایاس اعمال می‌گردد. این پالس همچون یک عملگر کوانتومی حالت کیوبیت را برمی‌گرداند (شکل ۳-۸).

---

<sup>1</sup> Fidelity of measurement





شکل ۳-۸ (a) یک کیوبیت فاز تک پیوندی ابرسانا: خازن‌ها، جریان‌های بایاس، تغییر حالت و اندازه‌گیری  
(b) تونل‌زنی از سد پتانسیل فازی و نمایی از حالت‌های کیوبیت پس از اعمال جریان اندازه‌گیری

### ۳-۵-۳ محاسبه پتانسیل فازی

در ادامه پتانسیل توصیف شده فوق را بدست می‌آوریم؛ با توجه به مدل مداری ارائه شده می‌توان

معادله دیفرانسیل حرکت بار (جریان) را به صورت

$$\frac{\hbar}{2e} C \ddot{\delta} + \frac{\hbar^2}{2eR} \dot{\delta} + I_J = I_e \quad (۱-۳)$$

بیان کرد [۴۲] که در آن  $I_J$  جریان داخلی پیوند،  $I_e$  جریان اعمالی خارجی،  $C$  خازن پیوند و  $R$

مقاومت پیوند می‌باشد. همانند ارتباط معادله حرکت در مکان که دارای پتانسیل مکانی است، می‌توانیم

برای این معادله دیفرانسیل نیز، یک پتانسیل بر حسب اختلاف فاز بیان نمائیم:

$$U(\delta) = \frac{\hbar}{2e} \left( A \int J_J d\delta - I_e \delta \right) \quad (۲-۳)$$

که در آن  $A$  سطح مقطع پیوند و  $J_r$  چگالی جریان عبوری از آن می‌باشند.

در واقع این شباهت است که به ما اجازه می‌دهد مفاهیمی همچون حالت‌های انرژی و تونل‌زنی را در مورد پتانسیل فازی نیز تعریف نمائیم. البته نتایج این محاسبات و پیش‌بینی‌های آن در عمل مشاهده شده و مورد تأیید قرار گرفته‌اند.

همان‌طوری که گفته شد، از یک جریان خارجی برای اندازه‌گیری حالت کیوبیت، استفاده می‌شود. بنابراین بایستی این جریان نیز در روابط فوق وارد شود. به طور کلی پتانسیل مورد بررسی به چهار پارامتر اصلی وابسته خواهد بود: چگالی جریان، جریان بایاس، جریان اندازه‌گیری و سطح مقطع:

$$U(\delta) = A \int J(\delta) d\delta - (I_b + I_{meas}) \delta \quad (3-3)$$

برای محاسبه تقریبی تغییرات پتانسیل بر حسب اختلاف فاز، وابستگی چگالی جریان الکتریکی به اختلاف فاز را با استفاده از معادله (۲-۱۵) جایگذاری می‌کنیم:

$$U(\delta) = A \{-\cos(\delta) + C_1\} - (I_b + I_{meas}) \delta \quad (3-4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات پتانسیل دارای یک بخش سینوسی ( $A\cos(\delta)$ ) و یک بخش خطی ( $(I_b + I_{meas})\delta$ ) دارد که بیانگر همان پتانسیل سکوها می‌باشند. دقت می‌کنیم که مقدار ثابت ( $A \times C_1$ ) نقشی در شکل تغییرات تابع پتانسیل ندارد و تنها به مرجع پتانسیل مربوط می‌شود.

## فصل ۴ تحلیل دقیق پیوند جوزفسون

### ۴-۱ مقدمه

همانطور که در انتهای فصل پیش دیدیم، ارتباط بین پتانسیل فازی و اختلاف فاز بین دو سر پیوند جوزفسون ارتباط تنگاتنگی با چگالی جریان الکتریکی گذرنده از پیوند دارد. در واقع در فصل ۲ که رابطه چگالی جریان الکتریکی و اختلاف فاز به شکل سینوسی خالص محاسبه شده است، در ابتدای راه-حل فرضیاتی وجود داشته که برای هر پیوندی برقرار نمی‌باشند. پس به این فکر افتادیم که رابطه بین جریان الکتریکی و اختلاف فاز ( $CPR^1$ ) در پیوند را به شکل کلی بدست آوریم.

برای بدست آوردن آن از معادله گینزبرگ-لاندائو کمک می‌گیریم.

---

<sup>1</sup> Current-Phase Relation

## ۲-۴ معادله گینزبرگ-لاندائو

محاسبات ما بر اساس خصوصیات تابع موج بدست آمده از حل معادله گینزبرگ-لاندائو بنا شده است که یک معادله پدیده‌شناسی<sup>۱</sup> است و با کمینه نمودن انرژی کل سیستم توسط پارامترهای اصلی بیان می‌شود. نتیجه این معادله یافتن کمترین انرژی ممکن در ماده ابررسانا است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود [۲۲]:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (۱-۴)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  پارامترهای ماده ابررسانا می‌باشند که مقادیر حقیقی بوده و به ترتیب منفی و مثبت می‌باشند.

به دلیل تقارن در راستای جریان، سیستم به صورت مؤثر، یک بعدی در نظر گرفته شده است و اگر میدان مغناطیسی در محیط موجود نباشد، معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad (۲-۴)$$

برای سادگی تابع موج نرمالیزه را به صورت  $f = \psi/\psi_\infty$  تعریف می‌کنیم که  $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$  چگالی الکترونهاى ابررسانا در نقطه بی‌نهایت می‌باشد. همچنین طول مشخصه ذاتی ماده ابررسانا را به

صورت  $\xi = \hbar/\sqrt{2m^*|\alpha|}$  تعریف می‌نمائیم. پس معادله (۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$f - |f|^2 f + \xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (۳-۴)$$

<sup>۱</sup> Phenomenological equation

### ۳-۴ رابطه تقریبی مرسوم چگالی جریان الکتریکی

معمولترین راه برای حل معادله فوق با در نظر گرفتن شرط  $L \ll \xi$  که در آن  $L$  عرض پیوند می باشد، این است که از دو بخش اول در مقابل بخش سوم صرف نظر کنیم [۲۲]:

$$f(x) = ax + b \quad (۴-۴)$$

پس از اعمال شرایط مرزی در دو سمت پیوند جوزفسون به صورت  $f(0) = 1$  و  $f(L) = e^{i\delta}$ ، پاسخ تقریبی بدست آمده به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{e^{i\delta} - 1}{L} x + 1 \quad (۵-۴)$$

و نهایتاً چگالی جریان الکتریکی با توجه به آن به شکل زیر محاسبه می شود:

$$J = \frac{e^* \hbar}{m^* L} |\psi_\infty|^2 \sin(\delta) \quad (۶-۴)$$

می توانیم برای بهبود تقریب، تنها از جمله غیر خطی دوم صرف نظر کرده و پاسخ را به بدست آوریم:

$$f(x) = a \sin\left(\frac{x}{\xi}\right) + b \cos\left(\frac{x}{\xi}\right) \quad (۷-۴)$$

که در آن ضرایب مستقل  $a$  و  $b$  پس از اعمال شرایط مرزی بدست می آیند:

$$f(x) = \frac{e^{i\delta} - \cos(L/\xi)}{\sin(L/\xi)} \sin\left(\frac{x}{\xi}\right) + \cos\left(\frac{x}{\xi}\right) \quad (۸-۴)$$

و در نتیجه چگالی عبوری محاسبه می شود:

$$J = \frac{1}{\text{sinc}(L/\xi)} \frac{e^* \hbar}{m^* L} |\psi_\infty|^2 \sin(\delta) \quad (۹-۴)$$

همان طور که می بینیم اگر چگالی جریان در معادله (۱۲) را با معادله (۹) مقایسه کنیم، پاسخ دقیق تر

تنها در ضریب  $\text{sinc}(L/\xi) = \sin(L/\xi)/(L/\xi)$  تفاوت می کند. بنابراین در حد  $L \ll \xi$  هر دو پاسخ یکسان خواهند بود.

#### ۴-۴ محاسبه دقیق چگالی جریان الکتریکی پیوند

در این بخش، راه حل دقیق معادله (۳-۴) ارائه می شود که در آن تمامی جملات در نظر گرفته شده اند. این معادله دیفرانسیل که مختلط و شدیداً غیرخطی می باشد، در شرایط مرزی صفر در بی نهایت  $f(\pm\infty)=0$ ، حل بسته دارد که همان سالیتون می باشد. اما هنگامی که شرایط مرزی به صورت مذکور در می آیند، دیگر نمی توان یک فرم بسته برای آن پیدا نمود. بنابراین به ناچار به سراغ حل عددی این معادله رفتیم تا پاسخ دقیق آن را بیابیم.

الگوریتم ارائه شده به شکل تغییر تدریجی از جواب تقریبی بدست آمده در (۸-۴) و افزایش شدت جمله غیرخطی است که نهایتاً پس از تکرارهای کافی به پاسخ دقیق می انجامد (میل می کند یا همگرا می شود). بنابر این ضریب بدون بعد  $k$  را در معادله (۳-۴) به صورت زیر وارد می نماییم:

$$f - k|f|^2 f + \xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (۱۰-۴)$$

پارامتر  $k$  در ابتدا صفر بوده و بیانگر عدم تأثیر جمله غیرخطی است که در نهایت پس از طی  $N$  مرحله به مقدار ۱ می رسد که معادله کامل است. حال سری تابعی  $\{f_n\}$  مرتبط با ضریب  $k=n\varepsilon$  را تعریف می کنیم که  $\varepsilon=1/N$  طول هر پله می باشد. به وضوح  $f_0$  همان معادله (۸-۴) می باشد و  $f_N$  همان پاسخ مورد نظر است. برای  $n>0$  توابع اختلال  $\delta f_n$  را به صورت زیر تعریف می نماییم:

$$f_n = f_{n-1} + \delta f_{n-1} \quad (۱۱-۴)$$

فرض شده که تمام توابع  $f_n$  در معادله

$$f_n - n\varepsilon|f_n|^2 f_n + \xi^2 \frac{d^2 f_n}{dx^2} = 0 \quad (۱۲-۴)$$

صدق می نمایند که با استفاده از این معادله می توانیم معادله دیفرانسیل حاکم بر توابع اختلال  $\delta f_n$  را بدست آوریم. کافی است معادله (۱۱-۴) را در (۱۲-۴) جایگزاری کنیم و از تئوری اختلال درجه اول

استفاده نمائیم:

$$(f_{n-1} + \delta f_{n-1}) + \xi^2 \frac{d^2(f_{n-1} + \delta f_{n-1})}{dx^2} - n\varepsilon(f_{n-1} + \delta f_{n-1}) \left( |f_{n-1}|^2 + f_{n-1} \delta f_{n-1}^* + f_{n-1}^* \delta f_{n-1} + |\delta f_{n-1}|^2 \right) = 0 \quad (13-4)$$

اگر تعداد کل پله‌ها ( $N$ ) به اندازه کافی بزرگ باشد، توابع اختلال  $\delta f_n$  بسیار کوچک خواهند بود و می‌توانیم به راحتی از توانهای بالاتر این توابع صرف‌نظر نمائیم. بنابراین معادله دیفرانسیل درجه دوم «خطی» برای توابع اختلال بدست خواهد آمد.

$$(f_{n-1} + \delta f_{n-1}) + \xi^2 \frac{d^2(f_{n-1} + \delta f_{n-1})}{dx^2} - n\varepsilon \left( |f_{n-1}|^2 f_{n-1} + 2|f_{n-1}|^2 \delta f_{n-1} + f_{n-1}^2 \delta f_{n-1}^* \right) = 0 \quad (14-4)$$

با مرتب نمودن معادله فوق به صورت

$$\delta f_{n-1} - \varepsilon |f_{n-1}|^2 f_{n-1} + \xi^2 \frac{d^2 \delta f_{n-1}}{dx^2} - n\varepsilon \left( 2|f_{n-1}|^2 \delta f_{n-1} + f_{n-1}^2 \delta f_{n-1}^* \right) + \left[ f_{n-1} - (n-1)\varepsilon |f_{n-1}|^2 f_{n-1} + \xi^2 \frac{d^2 f_{n-1}}{dx^2} \right] = 0 \quad (15-4)$$

در می‌یابیم که عبارت داخل براکت، مطابق رابطه (12-4) برابر مقدار صفر می‌باشد. مابقی جملات معادله دیفرانسیل مورد نظر را تشکیل می‌دهند که البته این معادله هنوز مختلط می‌باشد و مستقیماً قابل حل نیست. برای رفع این مانع، بخش‌های حقیقی و موهومی معادله (15-4) را از یکدیگر جدا می‌نمائیم. نتیجه این کار بدست آمدن یک زوج معادله دیفرانسیل خطی تزویج شده بر اساس بخش‌های حقیقی و موهومی توابع اختلال خواهد بود. برای سادگی در بیان، اندیس‌های تکراری  $n-1$  در معادله (15-4) را حذف نموده و از اندیس‌های  $r$  و  $i$  به ترتیب برای نشان دادن بخش‌های حقیقی و موهومی متناظر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \delta f_r - \varepsilon |f|^2 f_r + \xi^2 \frac{d^2 \delta f_r}{dx^2} - n\varepsilon \left( 2|f|^2 \delta f_r + \operatorname{Re}\{f^2\} \delta f_r + \operatorname{Im}\{f^2\} \delta f_i \right) &\approx 0 \\ \delta f_i - \varepsilon |f|^2 f_i + \xi^2 \frac{d^2 \delta f_i}{dx^2} - n\varepsilon \left( 2|f|^2 \delta f_i - \operatorname{Re}\{f^2\} \delta f_i + \operatorname{Im}\{f^2\} \delta f_r \right) &\approx 0 \end{aligned} \quad (16-4)$$

از آنجائی که  $f_0$  شرایط مرزی  $f_0(0)=1$  و  $f_0(L)=e^{i\delta}$  را ارضاء می نماید، شرایط مرزی جدید

برای توابع اختلال  $\delta f = \delta f_r + i\delta f_i$  بسیار ساده می باشند:

$$\begin{aligned} \delta f_r(0) &= \delta f_i(0) = 0 \\ \delta f_r(L) &= \delta f_i(L) = 0 \end{aligned} \quad (17-4)$$

با بدست آوردن تابع اختلال و جایگزاری مجدد در (11-4) و (16-4) می توان با تکرار این

عملیات تا وقتی که  $k=1$  (یا  $n=N$ ) پاسخ نهائی را برای یک پیوند جوزفسون دلخواه بدست آورد. می-

توان دقت پاسخ نهائی را به اندازه دلخواه توسط افزایش تعداد پله ها بالا برد.

همچنین می توانیم تأثیر میدان مغناطیسی را مطابق رابطه (1-4) در نظر بگیریم. در صورت اعمال

میدان مغناطیسی خارجی، معادله (1-4) را می توان به شکل زیر بازنویسی نمود.

$$\left( \alpha + \frac{e^* |\mathbf{A}|^2}{2m^* c^2} \right) \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{i\hbar e^* A_x}{m^* c} \frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0 \quad (18-4)$$

در شرایطی که این میدان مغناطیسی موازی سطح مقطع (عمود بر فیلم ابررسانا) پیوند جوزفسون

باشد ( $A_x=0$ )، و پس از نرمالیزه نمودن تابع موج خواهیم داشت:

$$f - \frac{1}{1 - \chi |\mathbf{A}|^2} |f|^2 f - \frac{\hbar^2}{2m^* \alpha (1 - \chi |\mathbf{A}|^2)} \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (19-4)$$

که در آن  $\chi = -e^{*2}/2m^* c^2 \alpha$ . از آنجائیکه  $\alpha$  مقداری منفی است، طول مشخصه مؤثر ابررسانا

$$\xi_{eff} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m^* |\alpha| (1 - \chi |\mathbf{A}|^2)}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \chi |\mathbf{A}|^2}} \quad (20-4)$$



با اعمال میدان، افزایش می‌یابد و تا هنگامی که طول مشخصه مؤثر ماده ابررسانا مقداری محدود باشد، ماده در فاز ابررسانا باقی می‌ماند.

#### ۵-۴ نتایج محاسبات

بدون از بین بردن کلیت مسئله، می‌توان با الهام گرفتن از رابطه (۴-۸) تمامی ابعاد فیزیکی مسئله را توسط طول مشخصه ابررسانا<sup>۱</sup> ( $\xi$ ) بسنجیم. بنابراین در ادامه تمامی ابعاد فیزیکی به صورت نسبی (نرمالیزه) با طول مشخصه سنجیده خواهند شد ( $\xi=1$ ).

#### ۱-۵-۴ مقادیر دقیق چگالی جریان الکتریکی پیوند

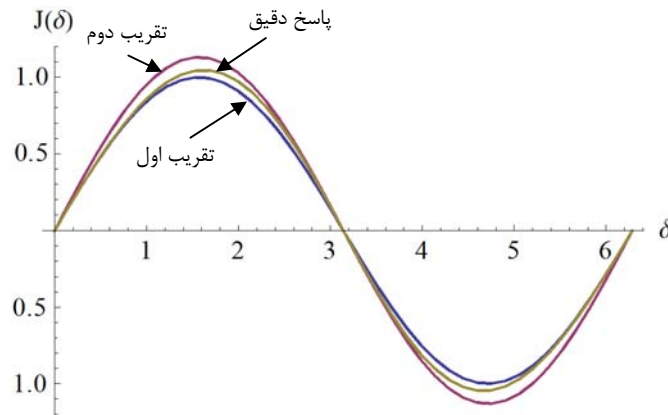
با حل دسته معادلات دیفرانسیل (۴-۱۶) چگالی جریان عبوری از پیوند جوزفسون محاسبه شده و در این بخش آورده شده است.

همانطور که در شکل ۴-۱ دیده می‌شود، بر خلاف نتایج تقریبی معادلات (۴-۶) و (۴-۹)، پاسخ دقیق بدست آمده دیگر سینوسی خالص نمی‌باشد و نامتقارن است؛ به‌طوری که

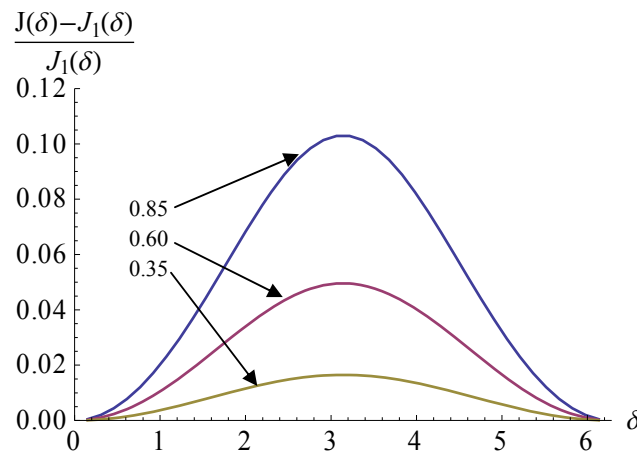
$$J\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\delta\right] \neq J\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\delta\right]$$

این امر بر روی احتمال تونل‌زنی حالت‌های محصور در چاه پتانسیل اثر خواهد گذاشت که در ادامه توضیح خواهیم داد.

<sup>۱</sup> Superconductor characteristic length



شکل ۴-۱. چگالی جریان محاسبه شده از سه روش. معادلات (۶-۴)، (۹-۴) و پاسخ دقیق (۱۶-۴) بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  و جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$



شکل ۴-۲. نسبت تفاضل چگالی جریان دقیق و تقریبی معادلات (۶-۴) و (۱۶-۴) بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$  و عرض‌های پیوند  $L/\xi=0.85$ ، 0.60 و 0.35.

برای بهتر نشان دادن اختلاف نتایج بدست آمده، نسبت اختلاف محاسبات دقیق و تقریبی را در

شکل ۴-۲ آورده‌ایم. این امر برای سه عرض متفاوت آورده شده است. همانطور که دیده می‌شود، این

نسبت تغییرات در حدود  $L \ll \xi$  کوچک بوده ولی در عرض‌های بزرگ‌تر، این نسبت در نزدیکی نقطه

$\delta=\pi$  از ۱۰ درصد نیز تجاوز می‌کند که قابل توجه است.

## فصل ۵ بهینه‌سازی دقیق کیوبیت ابررسانا

### ۱-۵ مقدمه

از آنجایی که شکل پتانسیل عامل مهمی در قدرت تمییز بین دو حالت کوانتومی در اندازه‌گیری حالت می‌باشد و از سوی دیگر وابستگی جریان جوزفسون به فاز ابررسانایی دو سر پیوند، که در پیوندهای معمول یک تابع سینوسی است، مهمترین عامل تعیین کننده شکل تابع پتانسیل می باشد؛ تلاش ما بر این بوده که با در نظر گرفتن یک پیوند جوزفسون با لایه عایق ضخیم و محاسبه وابستگی جریان به فاز ابررسانایی در این سیستم (که دیگر انتظار نمی رود سینوسی باشد) تغییرات در شکل پتانسیل و در نتیجه خروجی اندازه‌گیری حالت نهایی بیت کوانتومی را بررسی نمائیم.

پس از محاسبه دقیق ارتباط بین چگالی جریان الکتریکی و اختلاف فاز دو سر پیوند (CPR)، در این فصل تغییرات پتانسیل فازی دقیق پیوند (کیوبیت) را محاسبه نموده و با توجه به آن ویژگی‌های تعیین

کننده کیوبیت را بدست می‌آوریم. در این صورت خواهیم توانست در مورد بهینه‌سازی پارامترهای کیوبیت و یا سیستم تصمیم‌گیری نمائیم.

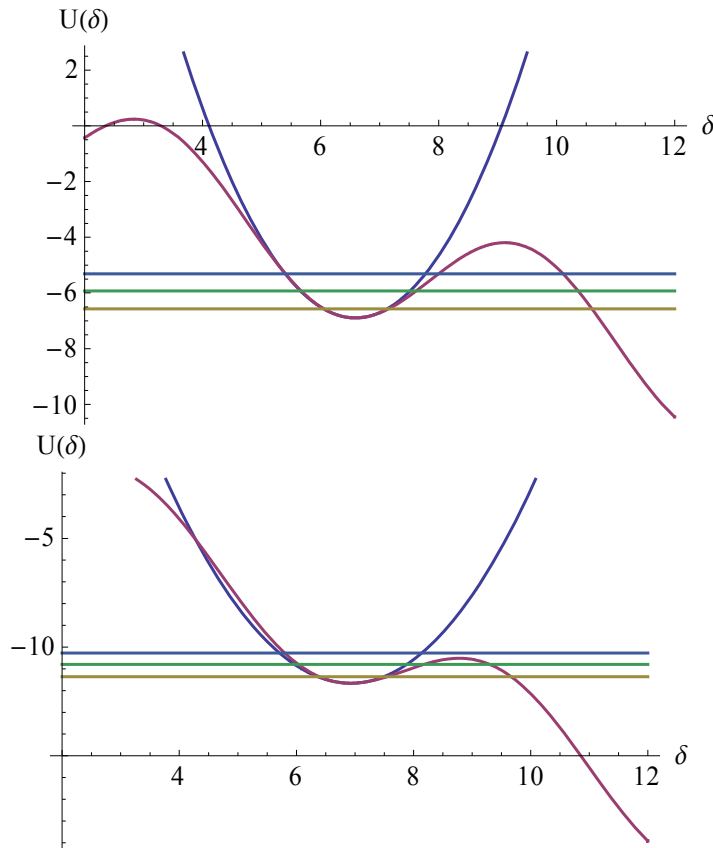
ابتدا مسئله تونل‌زنی را در کیوبیت بررسی نموده و احتمالات تونل‌زنی حالات کیوبیت در شرایط مختلف را بدست می‌آوریم؛ سپس با تعریف معیارهای مقایسه، شرایط بهینه کاری را معرفی نموده و نتایج را با گزارشات موجود مقایسه می‌کنیم.

## ۲-۵ محاسبه احتمالات تونل‌زنی حالات کیوبیت

پس از محاسبه مقدار دقیق چگالی جریان بر حسب اختلاف فاز، می‌توانیم تغییرات پتانسیل بر حسب اختلاف فاز را با استفاده از رابطه (۲-۳) یافته و سپس انرژی حالت‌های درون چاه پتانسیل را بدست آوریم.

به وضوح تعدادی حالت محبوس در چاه پتانسیل ایجاد شده وجود خواهند داشت ولی تعدادی از حالت‌ها غیرمحبوس (نشتی) خواهند بود. به دلیل محاسبات عددی چاه پتانسیل، عبارت بسته‌ای برای انرژی حالت‌های مذکور وجود ندارد؛ بنابراین از تئوری اختلال برای محاسبه آنها استفاده می‌کنیم و از نوسان‌گر هماهنگ (Harmonic Oscillator) به عنوان پتانسیل مختل نشده (حدس اولیه) که ویژگی‌های آن کاملاً بررسی شده بهره می‌گیریم. برای ایجاد بیشترین شباهت، نوسان‌گر هماهنگی در کف چاه پتانسیل با تقعر یکسان در نظر می‌گیریم. همچنین، انرژی را در محاسبات به مقدار  $E_c = 2e^2/C = 0.1$  نرمالیزه می‌نمائیم. ضمناً در محاسبات انجام شده، سطح مقطع پیوند جوزفسون به عنوان مثالی برای نشان دادن نتایج به جز در قسمتی که اثر آن بررسی شده،  $A/\xi^2 = 1$  در نظر گرفته شده است. برای محاسبه سه حالت پائین چاه پتانسیل از اختلال مرتبه دوم در محاسبات استفاده نمودیم. این سه، حالت پایه چاه  $|0\rangle$ ،

حالت برانگیخته اول  $|1\rangle$  برای تعریف کیوبیت و حالت ناخواسته برانگیخته دوم  $|2\rangle$  که برای بررسی نشت انرژی به خارج از فضای کیوبیت به این حالت نیاز خواهد بود.

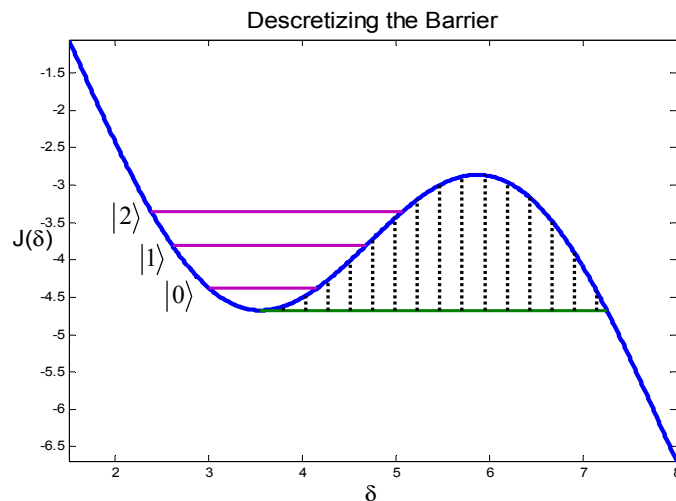


شکل ۱-۵. انرژی حالت‌های چاه پتانسیل تشکیل شده در پیوند جوزفسون برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$ ؛ بالا: هر سه حالت محبوس می‌باشند، پائین: حالت سوم نشتی است.

حالت‌های پایدار (دارای عمر طولانی) محبوس و همچنین بهینه نمودن پارامترهای اندازه‌گیری نیازمند مقدار جریان بایاس خاصی می‌باشند که در ادامه در مورد آنها بحث خواهد شد. در شکل ۱-۵ سه حالت پائین چاه پتانسیل برای یک پیوند جوزفسون نوعی، نشان داده شده‌اند. در شکل ۱-۵ (بالا) هر سه حالت مورد بحث در چاه پتانسیل محبوس هستند اما با افزایش جریان بایاس (یا اعمال جریان اندازه‌گیری) مطابق شکل ۱-۵ (پائین) سد پتانسیل کوتاه شده است که نتیجه این موضوع نشتی شدن حالت سوم و افزایش بسیار زیاد احتمال تونل‌زنی آن می‌باشد.

در محاسبات انجام شده، فرض شده است که اعمال جریان اندازه‌گیری به صورت آرام و پیوسته<sup>۱</sup> انجام گرفته است؛ به این معنی که حالت‌های اولیه سیستم متناظراً به حالت‌های سیستم جدید تبدیل شده‌اند. بنابراین حالت‌های جدید مجدداً محاسبه شده‌اند. این امر وابسته به ثابت زمانی کیوبیت می‌باشد که طبق آن سیستم به سمت فضای جدید حرکت می‌کند.

برای محاسبه نرخ تونل‌زنی حالت‌های سیستم، سد پتانسیل را مطابق شکل ۲-۵ در بازه اختلاف فاز گسسته نموده و از روش ماتریس انتقال<sup>۲</sup> [۴۳] برای این منظور استفاده کردیم.



شکل ۲-۵. گسسته‌سازی مانع پتانسیل برای محاسبه تونل‌زنی حالت‌ها با استفاده از روش ماتریس انتقال.

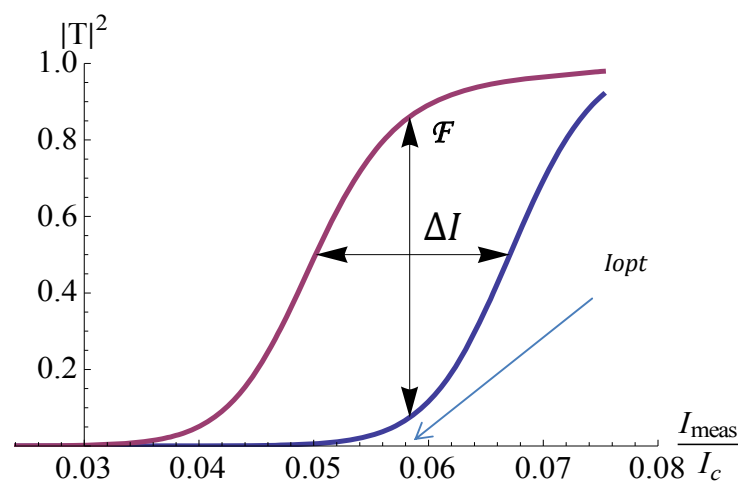
این بازه از کف چاه پتانسیل شروع شده و تا نقطه مقابل آن در سمت دیگر سد پتانسیل ادامه می‌یابد. این عملیات برای جریان‌های اندازه‌گیری بین صفر و  $I_c - I_b$  که اختلاف بین جریان بحرانی پیوند و جریان بایاس می‌باشد، انجام می‌شود.

<sup>۱</sup> Adiabatically movement

<sup>۲</sup> Transfer Matrix Method

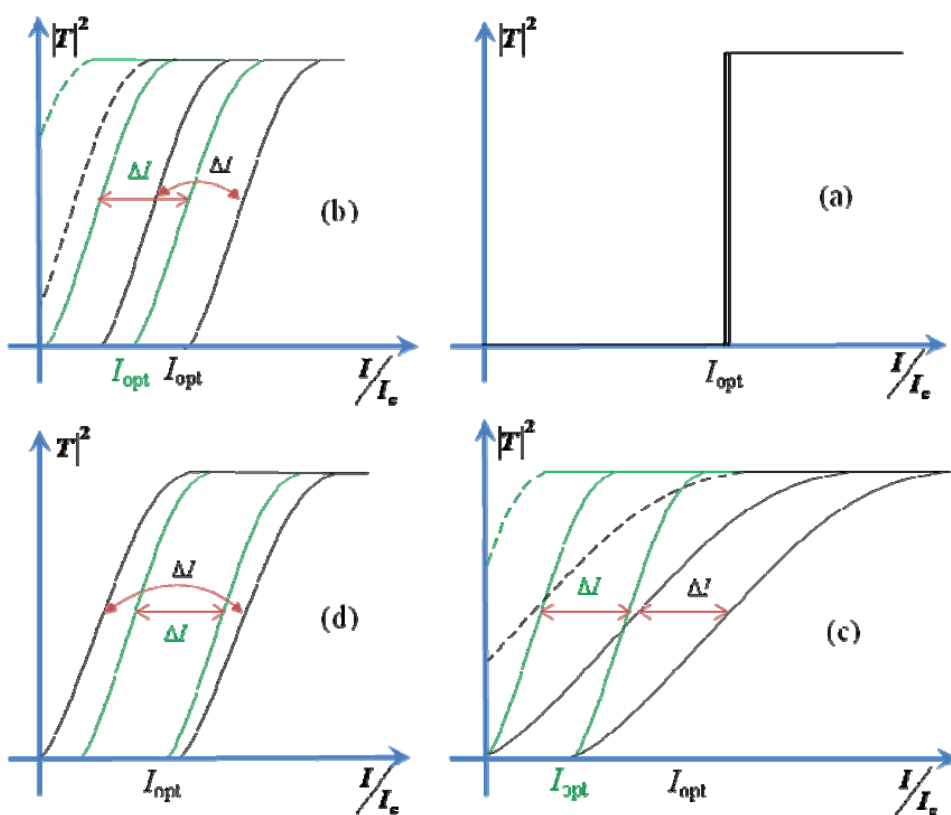
به دلیل اینکه برای محاسبه حالت‌ها از اختلال استفاده نمودیم، محاسبه دقیق مقادیر احتمال تونل-زنی در جریان‌های اندازه‌گیری نزدیک  $I_c - I_b$  امکان‌پذیر نیست. برای جلوگیری از اینگونه اشتباهات محاسباتی دو شرط را در الگوریتم مورد استفاده لحاظ نموده‌ایم: اول  $E_B < E_0 < E_1 < E_2$  و دوم  $E_2 - E_1 < E_1 - E_0$  که انرژی کف چاه پتانسیل است. این شروط نتایج بدیهی چاه پتانسیلی با تقریری بیش از تقعر کف چاه می‌باشند که در پیوندهای جوزفسون همواره این اتفاق رخ می‌دهد. شرط دوم در واقع متناظر با  $\omega_{12} > \omega_{01}$  می‌باشد که به معنی بزرگتر بودن فرکانس انتقال اصلی از فرکانس انتقال دوم است.

محاسبات فوق برای هر سه حالت پائین چاه پتانسیل انجام شده و نتایج آنها در شکل‌های بعدی آورده شده‌اند. به وضوح، در حالت‌های بالاتر احتمال تونل‌زنی و عبور از سد در جریان‌های اندازه‌گیری یکسان، بیشتر است؛ بنابراین ترتیب منحنی‌های تونل‌زنی همواره به صورت افزایش شماره حالت از راست به چپ می‌باشد.



شکل ۵-۳. معیارهای بهینه‌سازی

برای مقایسه بهتر بین نمودارهای مختلف چند معیار بهینه‌سازی تعریف می‌کنیم: تشابه (تفکیک-پذیری) در اندازه‌گیری که مقدار بیشینه اختلاف در مقادیر تونل‌زنی دو حالت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  در جریان اندازه‌گیری یکسان می‌باشد و آن را  $\mathcal{F}$  می‌نامیم؛ به جریان شرایط مذکور، جریان اندازه‌گیری بهینه ( $I_{opt}$ ) می‌گوئیم و در نهایت نسبت بین اختلاف جریان‌های اندازه‌گیری برای دو حالت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  در راستای انتقال ۵۰٪ و جریان اندازه‌گیری بهینه  $\Delta I/I_{opt}$  که آن را  $\mathcal{R}$  می‌نامیم (شکل ۳-۵).

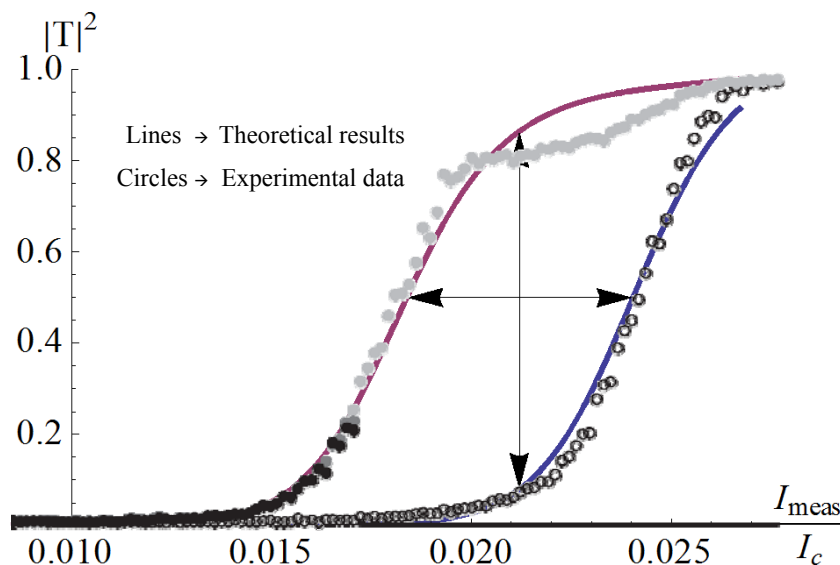


شکل ۳-۵. نمودارهای فرضی قابل تصور تغییرات نرخ تونل‌زنی حالت‌های کیوبیت برای بیان دلیل تعریف معیار  $\mathcal{R}$ .  
 (a): علی‌رغم اینکه مقدار تشابه اندازه‌گیری ( $\mathcal{F}$ ) واحد است، به دلیل حساسیت زیاد به تغییرات جریان اندازه‌گیری مناسب نیست.  
 (b): اختلاف جریان‌ها ( $\Delta I$ ) برابر است، منحنی سبز (کم‌رنگ) ارجح است چون حالت برانگیخته دوم طول عمر کمتری دارد.  
 (c): در منحنی سیاه (پررنگ) تشابه به شدت افت کرده است  
 (d): منحنی سیاه (پررنگ) تشابه بزرگتری دارد و همچنین حالت برانگیخته دوم نیز طول عمر کمتری دارد پس ارجح است.

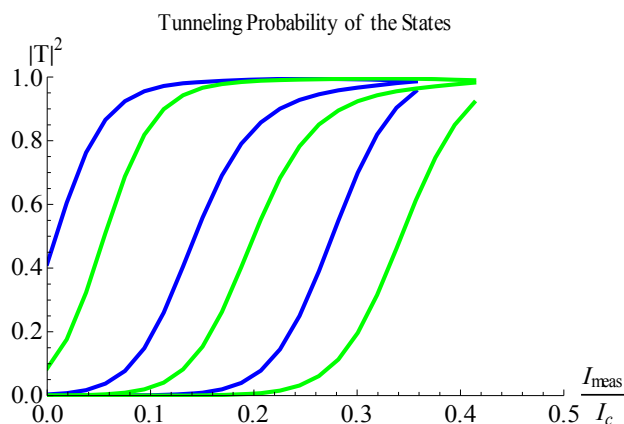


برای بیان اینکه معیار مقایسه  $R$  چرا بدین گونه تعریف شده است، در شکل ۵-۴ چندین نمودار قابل تصور برای اینگونه تغییرات را آورده‌ایم تا موضوع روشن‌تر شود. در نمودارهای (b) و (c) منحنی سبز رنگ ارجح است اما در نمودار (d) منحنی سیاه رنگ. همانطور که می‌بینیم معیار تعریف شده در همه موارد نتیجه درستی ارایه می‌کند.

مقادیر عددی استخراج شده از یک آزمایش تجربی [۳۳] به همراه نتایج محاسبات تئوری توسط روش ارائه شده، در شکل ۵-۵ آورده شده‌اند. با توجه به اینکه در یکی از مقالات ارائه شده توسط این گروه تحقیقاتی از ماده آلومینیوم به عنوان ابررسانا و از اکسید آلومینیوم آمورف (Amorphous) به عنوان لایه میانی استفاده نموده‌اند، برای هماهنگی نمودار از پارامترهای یکسانی استفاده نموده‌ایم. توده آلومینیوم دارای طول مشخصه بسیار بزرگ در حدود ۱۶۰۰ نانومتر می‌باشد اما فیلم آلومینیوم که در کیوبیت‌ها استفاده می‌شود به طور میانگین در حدود ۱۰۰ نانومتر در نظر گرفته شده است [۴۴]، [۴۵] و [۴۶]. همچنین عرض پیوند در حدود ۲ نانومتر و سطح مقطع در حدود  $1\mu m^2$  انتخاب شده‌اند [۴۷]. جریان بایاس پیوند در سیستم عملی گزارش نشده است و در اینجا ناچار شدیم با عملیات حدس و خطا بهترین تطابق را بدست آوریم که به طرز قابل قبولی به مقدار  $I_b/I_c=0.97$  رسیدیم. همانطوریکه می‌بینیم نمودار بدست آمده هماهنگی بسیار خوبی با نتایج عملی دارد. یکی از دلایل جابجایی این پیش‌بینی در جریان‌های بالا، همان مشکل روش اختلال در محاسبه انرژی حالت‌ها می‌باشد که در این شرایط اختلال مرتبه دوم استفاده شده نیز پاسخگو نمی‌باشد. جدا از هماهنگی ظاهری دو نمودار، مقادیر معیار تعریف شده نیز مشابه می‌باشند که این امر از اهمیت بسیاری برخوردار است.



شکل ۵-۵. احتمالات تونل زنی حالت های پایه کیوبیت بر حسب جریان اندازه گیری؛ خطوط پیوسته: نتایج عددی برای عرض پیوند  $L/\xi=0.02$ ، سطح مقطع  $A/\xi^2=100$  و جریان بایاس  $I_b/I_c=0.97$  دایره خالی: نتایج عملی برای حالت پایه، و دایره پر: نتایج عملی برای حالت برانگیخته.



شکل ۵-۶. احتمالات تونل زنی سه حالت اول بر حسب جریان اندازه گیری برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$  و عرض پیوند  $L/\xi=0.85$ ؛ خطوط تیره (آبی): محاسبات دقیق، و خطوط روشن (سبز): محاسبات تقریبی.

نتایج محاسبات دقیق انجام شده با نتایج تقریبی قبلی در شکل ۵-۶ با یکدیگر مقایسه شده اند. احتمالات تونل زنی به وضوح به سمت مقادیر کمتر جریان های اندازه گیری حرکت نموده اند. بنابراین اولین نکته که توجه را به خود جلب می کند، کم شدن جریان اندازه گیری بهینه است.  $\mathcal{R}$  افزایش قابل توجهی یافته (۳۳٪)، اما مقدار  $\mathcal{F}$  در حدود ۱٪ کاهش داشته است.

### ۳-۵ نتایج محاسبات

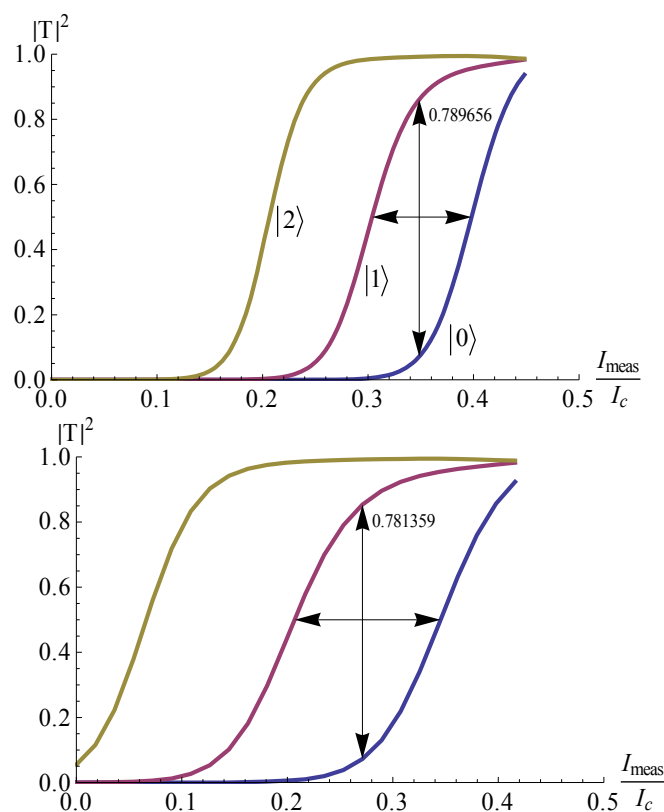
حال که معیارهای مقایسه را تعریف کرده‌ایم اثر هر کدام از پارامترهای کیوبیت را بر روی عملکرد

آن بررسی می‌کنیم

#### ۱-۳-۵ اثر عرض پیوند

احتمالات تونل‌زنی برای یک پیوند جوزفسون نوعی با عرض‌های کم و زیاد در شکل ۷-۵ نمایش

داده شده‌اند. نمودارهای بالا و پائین به ترتیب متعلق به عرض‌های  $L/\xi=0.25$  و  $0.75$  می‌باشند.



شکل ۷-۵. احتمالات تونل‌زنی بر حسب جریان اندازه‌گیری برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$ ؛

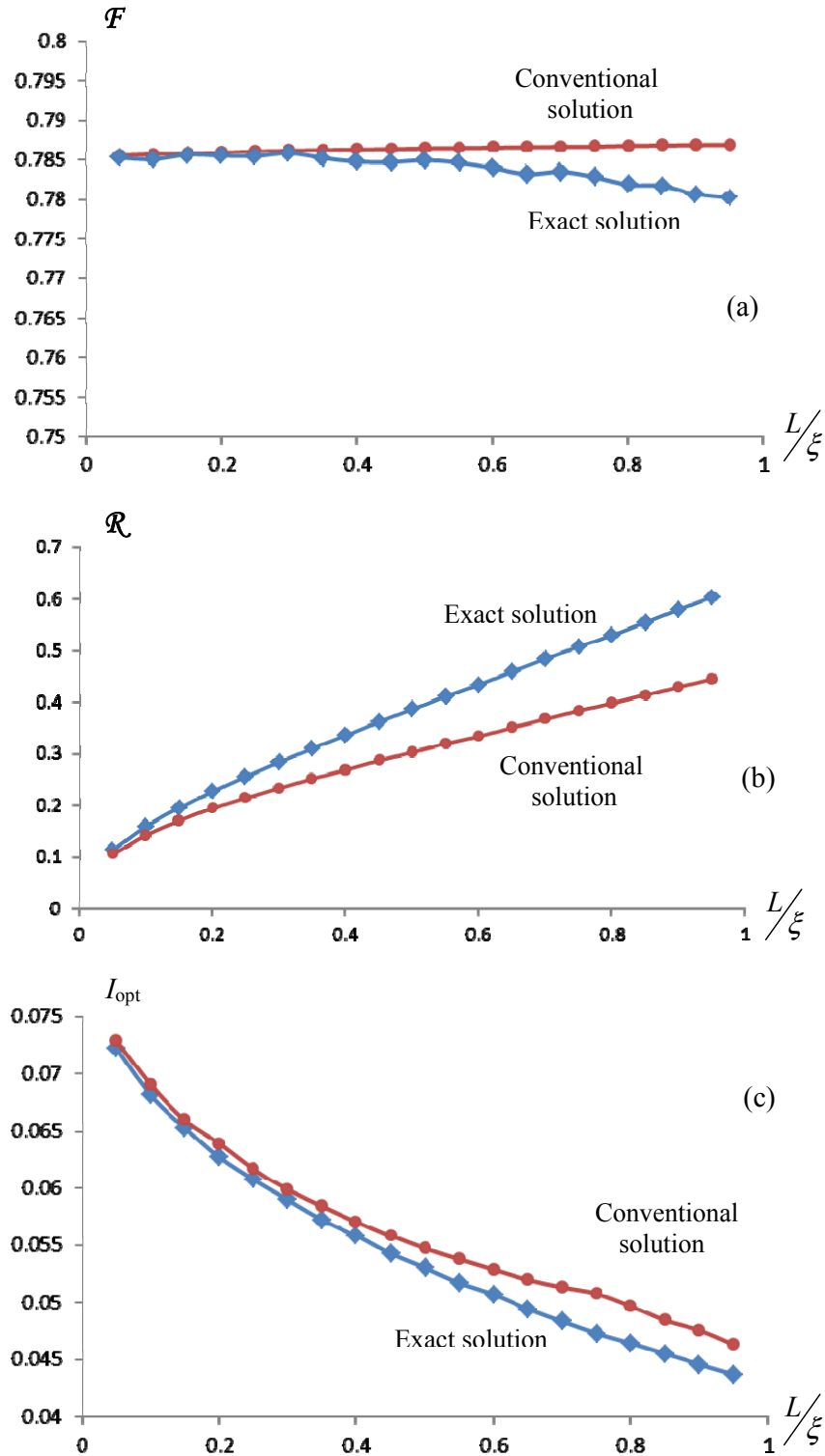
بالا: عرض پیوند  $L/\xi=0.25$ ، پائین: عرض پیوند  $L/\xi=0.85$ .

در عرض  $L/\xi=0.25$  مقدار  $F=0.790$  می‌باشد و در جریان اندازه‌گیری  $I_{meas}/I_c=0.349$  اتفاق می‌افتد که همان جریان اندازه‌گیری بهینه  $I_{opt}$  است. در حالی که برای  $L/\xi=0.75$  مقدار  $F=0.781$  است و در جریان اندازه‌گیری  $I_{meas}/I_c=0.271$  رخ می‌دهد.

همانطور که می‌بینیم، مقدار  $F$  حدود ۱٪ کاهش داشته است اما خوشبختانه جریان اندازه‌گیری بهینه به اندازه ۲۲٪ کاهش داشته است که این امر در دقت آزمایش و حذف اثرات نوفه‌های محیط بسیار مؤثر است و امنیت سیستم را بالا می‌برد. باید به این نکته دقت نمود که در پیوندهای جوزفسون با عرض زیاد، مقدار جریان بحرانی کاهش یافته است؛ در نتیجه اثر کاهش جریان اندازه‌گیری بهینه دوچندان خواهد بود.

مسئله بعدی بهبود قابل توجه معیار  $R$  است که از مقدار 1.310 برای عرض  $L/\xi=0.25$  به مقدار 1.669 در عرض  $L/\xi=0.75$  افزایش یافته است. افزایش  $R$  به معنی دقت و امنیت بیشتر سیستم نسبت به پارامترهای زائد و در نتیجه تشخیص بهتر حالت‌های داخلی کیوبیت می‌باشد. این معیار به اندازه ۲۷٪ بهبود یافته است.

تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به تغییرات عرض پیوند در شکل ۵-۸ نشان داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، در مقادیر بالای عرض پیوند  $R$  رشد بیشتری داشته است در حالیکه  $F$  ثابت باقی مانده است. واضح است که در این صورت  $I_{opt}$  کاهش بیشتری را تجربه کرده است. اگر بین پاسخ دقیق و تقریبی مقایسه کنیم، می‌بینیم که در مقادیر بزرگ عرض پیوند، اختلاف این دو زیاد می‌شود و نشان می‌دهد که در این محدوده پاسخ تقریبی دیگر جوابگو نمی‌باشد.



شکل ۸-۵ تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به عرض پیوند در جریان بایاس نرمالیزه  $I_b/I_c = 0.915$  دایره‌های قرمز: پاسخ مرسوم تقریبی، مربع‌های آبی: پاسخ دقیق بر اساس راه‌حل جدید.

یکی از دلایل این امر می‌تواند تضعیف تزویج بین توابع موج دو طرف پیوند در شرایط عریض بودن لایه میانی باشد. در این صورت بخش‌هایی که در معادله GL غیر مرسوم بوده‌اند، خود را نشان می‌دهند و تاثیر بیشتری بر نتیجه خواهند گذاشت.

بین دو عرض پیوند بزرگ ( $L/\xi=0.85$ ) و کوچک ( $L/\xi=0.25$ )، معیار  $I_{opt}$  حدود ۲۰٪ کاهش پیدا کرده است. بایستی دقت شود که این ارقام نرمالیزه می‌باشند و اگر به مقادیر واقعی بازگردیم، می‌بینیم که جریان بحرانی در پیوندهای عریض کوچکتر است پس در مثال مذکور جریان بسیار کوچکتری برای اندازه‌گیری بهینه مورد نیاز است و این امر باعث می‌شود که نویز جریان در این شرایط کاهش پیدا کند یا به بیان دیگر امنیت نوفه افزایش پیدا خواهد کرد. به بیان دیگر اگر به معیار  $R$  در این بازه دقت کنیم، افزایش حدود ۱۰۳٪ از خود نشان می‌دهد که با توضیحات فوق منطبق است.

### ۲-۳-۵ اثر جریان بایاس

مهمترین تأثیر جریان بایاس تعیین و کنترل تعداد حالت‌های موجود در چاه پتانسیل می‌باشد. یک کیوبیت تنها به دو حالت اصلی برای هدف خود نیاز دارد؛ بنابراین حالت‌های بالاتر زائد بوده و می‌توانند اثرات مخربی بر کارکرد کیوبیت داشته باشند.

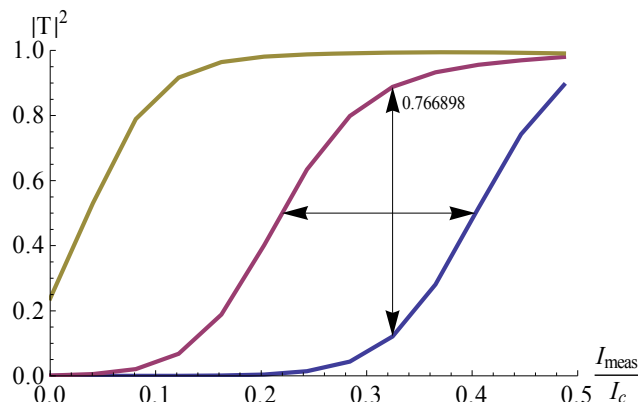
به عنوان مثال این احتمال وجود دارد که هنگام اعمال پالس میکروویو برای تغییر حالت از  $|0\rangle$  به  $|1\rangle$ ، سیستم به حالت  $|2\rangle$  برانگیخته شود که در این صورت نشت انرژی به خارج از فضای کیوبیت رخ داده است که در این شرایط حالت جدید در محاسبات کوانتومی تعریف نشده بوده و در عمل اطلاعات از بین رفته است. در حال حاضر تحقیقات بسیاری در این زمینه در حال انجام می‌باشد [۴۸] و [۴۹] تا از این رخداد تا حد امکان اجتناب شود. در هر صورت نمی‌توانیم به طور کامل این نشت را حذف نمائیم،

چون برای پایدار بودن کیوبیت و داشتن حالت‌هایی با عمر طولانی (مخصوصاً حالت برانگیخته) نیاز به در نظر گرفتن فاصله مناسب از قله مانع پتانسیل می‌باشد تا احتمال تونل‌زنی حالت‌ها در شرایط عادی به اندازه کافی کم باشد. در نتیجه وجود حالت برانگیخته دوم  $|2\rangle$  در کنار حالت‌های اصلی غیر قابل اجتناب است. به طور کلی تعادلی بین وجود حالت‌های نشتی زائد و پایداری کیوبیت وجود دارد.

برای نتیجه‌گیری مناسب و یافتن نقطه مناسب در این تعادل، شرط دیگری برای کیوبیت در نظر می‌گیریم. برای داشتن یک کیوبیت پایدار فرض می‌کنیم که بعد از بایاس سیستم، همواره احتمال تونل-زنی حالت  $|1\rangle$  از 0.001 کمتر باشد. به عنوان مثال برای کیوبیت با شرایط قبلی جریان بایاس را تا حد امکان افزایش می‌دهیم تا به مرز شرط فوق برسیم و آن را جریان بایاس بهینه می‌نامیم. همواره با تغییر جریان بایاس معیار  $F$  تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند، درحالی که معیار  $R$  به شکل موافق تغییر خواهد کرد چون با افزایش جریان بایاس، منحنی به سمت چپ حرکت می‌کند و مقدار  $I_{opt}$  کم می‌شود.

### ۳-۳-۵ اثر سطح مقطع

جریان بحرانی پیوند جوزفسون شدیداً تحت تأثیر سطح مقطع آن می‌باشد. در شکل ۹-۵ نمودار احتمالات تونل‌زنی برای یک پیوند با عرض  $L/\xi=0.85$  و سطح مقطع کوچکتر  $A/\xi^2=0.5$  نشان داده شده‌اند. مجدداً شرط  $|T|^2 < 0.001$  برای حالت  $|1\rangle$  در نظر گرفته شده تا بتوانیم با نتایج قبلی مقایسه نمائیم. با رساندن جریان بایاس به بیشترین مقدار ممکن  $I_{opt}/I_c=0.385$  مشاهده می‌کنیم که معیار  $F$  کمی کاهش یافته و جریان اندازه‌گیری بهینه افزایش یافته اما اگر به دنبال داشتن امنیت نوفه باشیم باید متذکر شویم که به دلیل بازتر شدن نمودار، معیار  $R$  به مقدار 1.837 بهبود پیدا کرده است. اما بایستی دقت نمود که کوچک نمودن سطح مقطع به ابعاد ساخت محدود می‌شود و دارای حد نهائی می‌باشد.

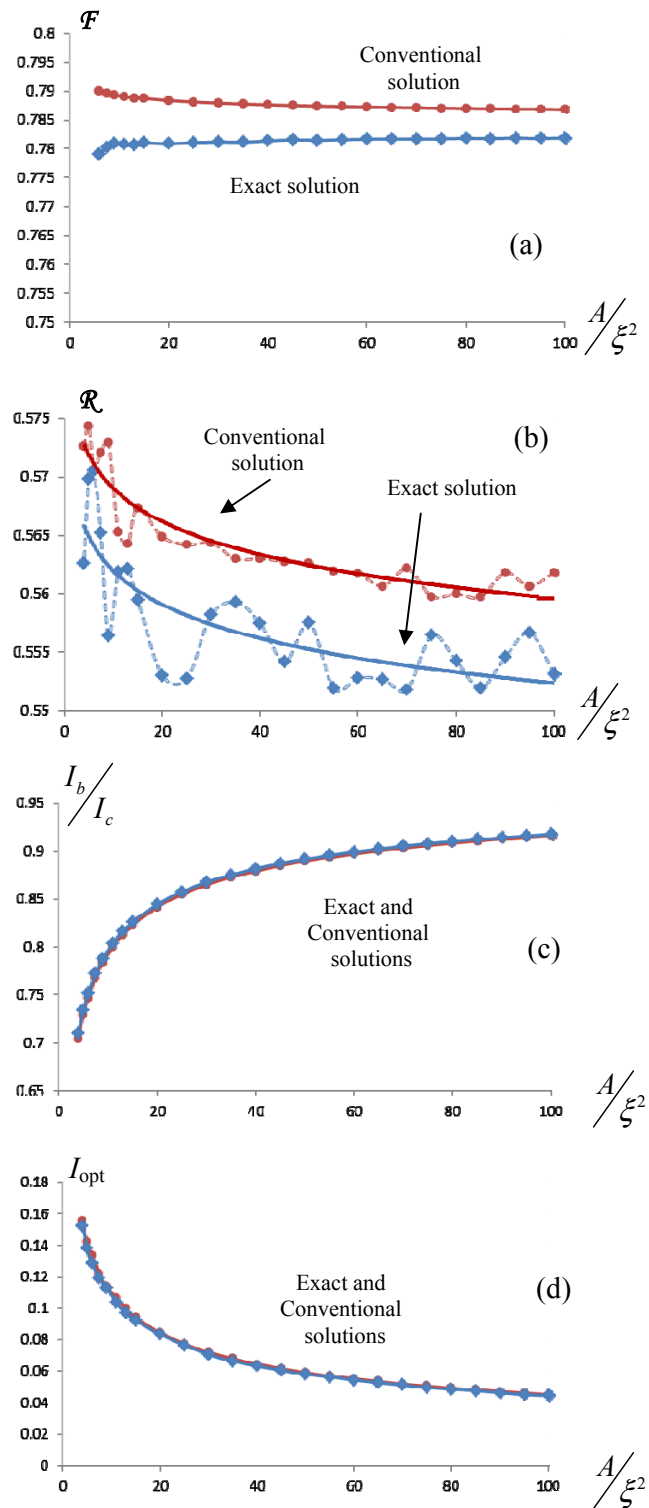


شکل ۵-۹. احتمالات تونل زنی بر حسب جریان اندازه گیری برای جریان بایاس  $I_b/I_c=0.385$  عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  و سطح مقطع  $A/\xi^2=0.5$ .

در شکل ۵-۱۰ تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی خارجی اعمالی در  $L/\xi=0.85$  رسم شده‌اند. این نمودارها پس از اصلاح جریان بایاس مطابق روش مذکور بدست آمده‌اند. اگر به پاسخ‌های دقیق و تقریبی دقت کنیم، می‌بینیم که در نمودار تغییرات  $F$  و در سطح مقطع‌های کوچک، پاسخ‌های دقیق و تقریبی رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهند. باز هم می‌توان حدس زد که این امر به دلیل ضعیف بودن پدیده جوزفسون در پیوندهایی با سطح مقطع کوچک باشد. در نمودار (b) تغییرات معیار  $R$  بسیار غیریکنواخت است که در بهترین انتخاب، با یک منحنی لگاریتمی تطابق داده شده است.

نمودار تغییرات جریان بهینه اندازه‌گیری و جریان بایاس اصلاح شده نیز در قسمت‌های (c) و (d) آورده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، در روش‌های حل دقیق و تقریبی تفاوت چندانی در مقادیر بدست آمده وجود ندارد.





شکل ۵-۱۰. تغییرات معیارهای مقایسه و جریان بایاس اصلاح شده نسبت به سطح مقطع برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$

دایره‌های قرمز: پاسخ مرسوم تقریبی، مربع‌های آبی: پاسخ دقیق بر اساس راه‌حل جدید.

خط تو پر در (b) منحنی تطبیقی لگاریتمی می‌باشد.

### ۴-۳-۵ اثر حضور میدان مغناطیسی خارجی

میدان مغناطیسی همواره باعث تضعیف تابع موج و تخریب پارامترهای ابرسانائی می‌شود. با این حال، چون به دنبال شکست تقارن در سیستم می‌باشیم، به دنبال اثرات غیر خطی میدان می‌رویم و اثر آن بر کیوبیت را بررسی می‌نمائیم.

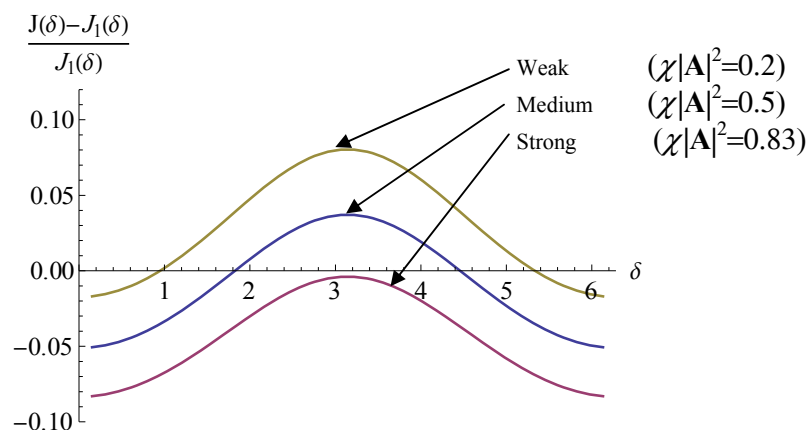
در زیر فصل ۴-۴، تأثیر میدان مغناطیسی عمود بر فیلم ابرسانا بر روی معادلات گینزبرگ-لاندائو بررسی شد و مطابق رابطه (۴-۲۰) طول مشخصه مؤثر ابرسانا  $\xi_{eff}$  تعریف شد. با اعمال میدان  $\xi_{eff}$  افزایش یافته و بر خلاف انتظار عملکرد کیوبیت به سمت نسبت عرض‌های  $(L/\xi)$  کوچکتر حرکت می‌کند که مطلوب نیست؛ اما باید دقت نمود که ضریب جمله غیرخطی نیز مطابق (۴-۱۹) با ضریب  $1/(1+\chi|A|^2/\alpha)$  افزایش یافته است. پس به سادگی نمی‌توان اثر میدان مغناطیسی را پیش‌بینی کرد.

تأثیر میدان مغناطیسی بر چگالی جریان پیوند جوزفسون به صورت نسبت تفاضل محاسبه دقیق با مقدار تقریبی در شکل ۵-۱۱ آورده شده است. اثرات غیر خطی میدان به خصوص در میدان‌های متوسط بر چگالی جریان به وضوح مشاهده می‌شود. این نمودار در میدان‌های ضعیف  $(|A|=\sqrt{|\alpha|/5\chi})$ ، متوسط  $(|A|=\sqrt{|\alpha|/2\chi})$  و قوی  $(|A|=\sqrt{|\alpha|/1.2\chi})$  برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  محاسبه شده‌اند.

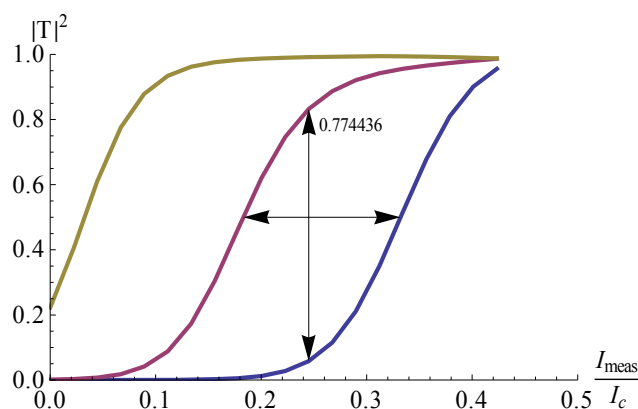
احتمالات تونل‌زنی در حضور میدان مغناطیسی قوی در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است. پس از اعمال شرط  $|T|^2 < 0.001$  برای بهینه سازی پارامترها، مشاهده می‌کنیم که متأسفانه معیارهای  $\mathcal{F}$  و  $\mathcal{R}$  هردو کاهش پیدا کرده‌اند. در نتیجه به طور کلی جدا از اثرات مخرب دیگر میدان بر ابرسانا، غیرخطی بودن آن نیز کمکی به عملکرد کیوبیت نمی‌نماید.

تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به اندازه میدان مغناطیسی اعمالی در جریان بایاس نرمالیزه  $I_b/I_c=0.915$  و  $L/\xi=0.85$  در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده‌اند. بسیار جالب است که معیارهای مقایسه  $\mathcal{F}$  و

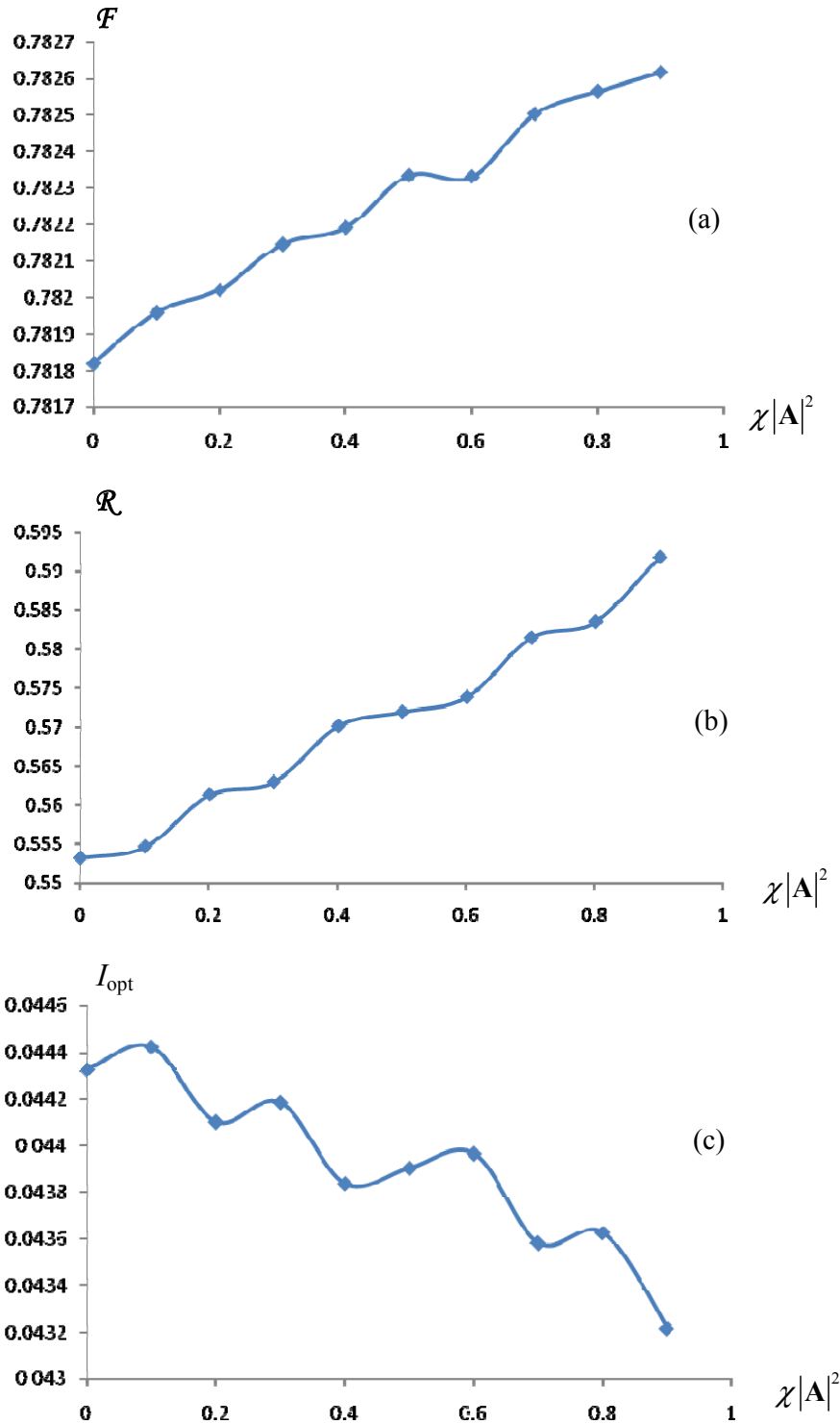
$\mathcal{R}$  هر دو بهبود یافته‌اند! تنها توجیجی که می‌توان برای این مسئله ارایه نمود، برهم‌کنش میدان مغناطیسی عمود خارجی با زوج‌های کوپر تزویجی است که به وضوح خود را در مقدار طول مشخصه موثر ابرسانا نشان داده‌است. به نظر می‌آید که میدان خارجی با ایجاد گرداب‌های مغناطیسی (Vortices) در عایق پیوند مشخصات چاه پتانسیل کیوبیت را بهبود داده است.



شکل ۵-۱۱. نسبت تفاضل مقدار دقیق و تقریبی چگالی جریان بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند دارای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  و جریان بایاس  $I_b/I_c=0.5$  برای میدان‌های مغناطیسی ضعیف، متوسط و قوی.



شکل ۵-۱۲. احتمالات تونل‌زنی بر حسب جریان اندازه‌گیری برای عرض پیوند  $L/\xi=0.85$  در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی.



شکل ۵-۱۳. تغییرات معیارهای مقایسه نسبت به اندازه میدان مغناطیسی اعمالی در جریان بایاس نرمالیزه  $I_b/I_c=0.915$  و  $L/\xi=0.85$ . دایره‌های قرمز: پاسخ مرسوم تقریبی، مربع‌های آبی: پاسخ دقیق بر اساس راه‌حل جدید.

اگر بخواهیم کمی قدم فراتر نهیم و اثر میدان مغناطیسی سه بعدی دلخواه را بر روی پیوند بیابیم،

بایستی در گنج کولومب معادله (۱۸-۴) را مشابه (۱۹-۴) به شکل زیر بازنویسی نمائیم:

$$f - \frac{1}{1-\chi|\mathbf{A}|^2} |f|^2 f + i\beta \cos(\varphi) \frac{df}{dx} - \frac{\hbar^2}{2m^* \alpha (1-\chi|\mathbf{A}|^2)} \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (1-5)$$

که در آن  $\beta = 2\xi|\mathbf{A}|\sqrt{\chi}/(1-\chi|\mathbf{A}|^2)$  و  $\varphi$  زاویه میدان مغناطیسی نسبت به سطح فیلم ابررسانا

می‌باشد. اگر روش ارایه شده در زیر فصل ۴-۴ را تکرار کنیم، به زوج معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \delta f_r - \frac{\varepsilon}{1-\chi|\mathbf{A}|^2} |f|^2 f_r - \beta \cos(\varphi) \frac{d\delta f_i}{dx} + \xi_{eff}^2 \frac{d^2 \delta f_r}{dx^2} \\ - n \frac{\varepsilon}{1-\chi|\mathbf{A}|^2} \left( 2|f|^2 \delta f_r + \text{Re}\{f^2\} \delta f_r + \text{Im}\{f^2\} \delta f_i \right) = 0 \\ \delta f_i - \frac{\varepsilon}{1-\chi|\mathbf{A}|^2} |f|^2 f_i + \beta \cos(\varphi) \frac{d\delta f_r}{dx} + \xi_{eff}^2 \frac{d^2 \delta f_i}{dx^2} \\ - n \frac{\varepsilon}{1-\chi|\mathbf{A}|^2} \left( 2|f|^2 \delta f_i - \text{Re}\{f^2\} \delta f_i + \text{Im}\{f^2\} \delta f_r \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-5)$$

پس از حل این معادلات دیفرانسیل خطی تزویج شده با شرایط مرزی صفر، می‌توانیم نتایج CPR

را بدست آوریم. نمودار تغییرات چگالی جریان الکتریکی بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند هنگامی که

میدان مغناطیسی خارجی با اندازه  $\chi|\mathbf{A}|^2 = 0.5$  در زوایای مختلف به پیوند اعمال شده است در شکل

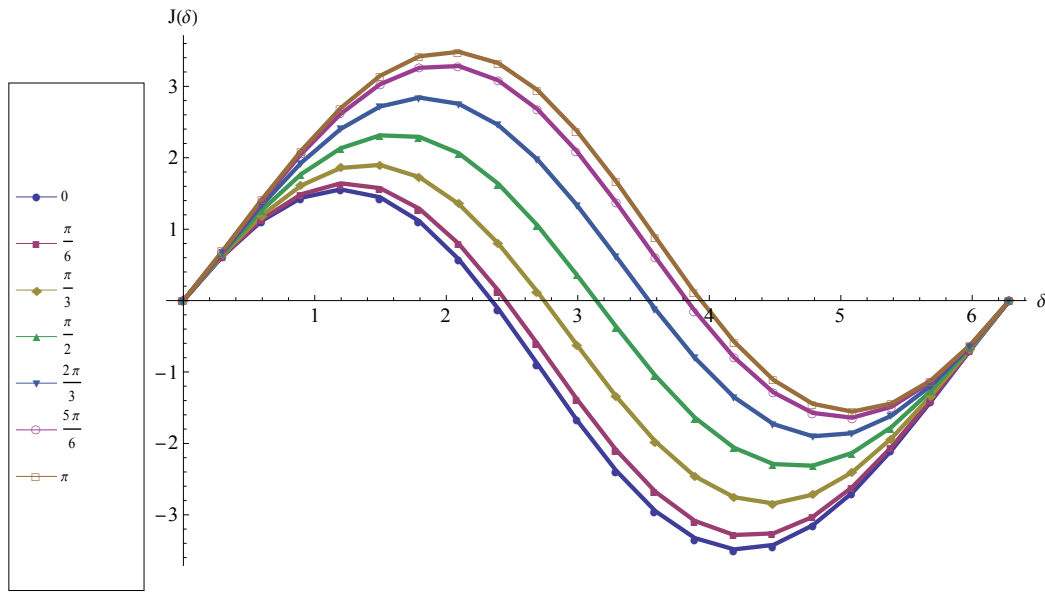
۱۴-۵ نشان داده شده است. مهمترین نکته‌ای که در شکل دیده می‌شود عدم تقارن شکل نسبت به نقطه

$\delta = \pi$  می‌باشد که نشان از تاثیرات غیر خطی شدید میدان مغناطیسی دارد. به همین ترتیب احتمالات

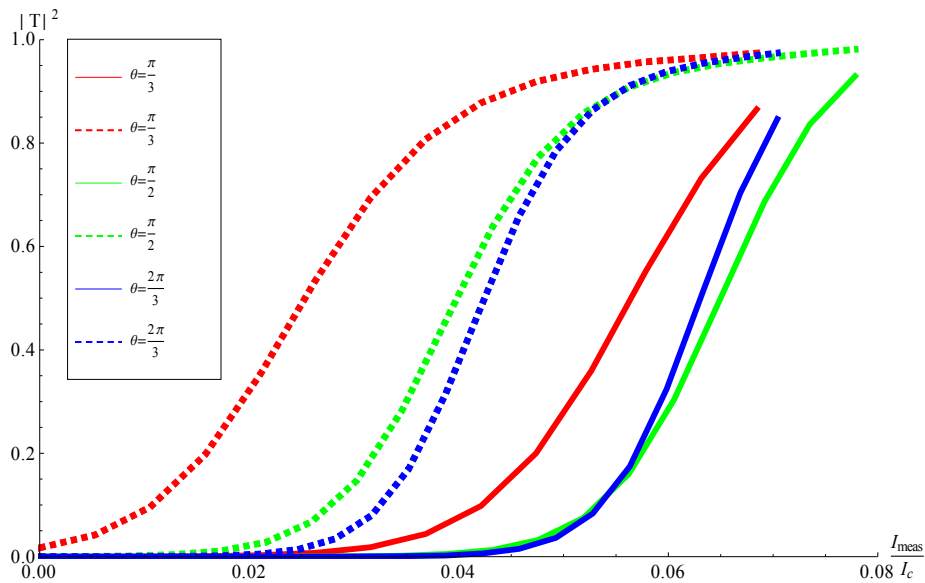
تونل‌زنی بر حسب جریان اندازه‌گیری هنگامی که میدان مغناطیسی با اندازه  $\chi|\mathbf{A}|^2 = 0.5$  در زوایای

مختلف  $(\varphi = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3)$  به پیوند اعمال شده است، در شکل ۱۵-۵ نشان داده شده‌اند. مشاهده

می‌شود که میدان حتی نسبت با راستای عمود نیز تقارن ندارد (جهت جریان پیوند اهمیت دارد).



شکل ۵-۱۴. نمودار تغییرات چگالی جریان الکتریکی بر حسب اختلاف فاز دو سر پیوند هنگامی که میدان مغناطیسی با اندازه  $\chi|\mathbf{A}|^2 = 0.5$  در زوایای مختلف به پیوند اعمال شده است.



شکل ۵-۱۵. احتمالات تونل زنی بر حسب جریان اندازه گیری هنگامی که میدان مغناطیسی با اندازه  $\chi|\mathbf{A}|^2 = 0.5$  در زوایای مختلف  $(\theta = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3)$  به پیوند اعمال شده است.

## فصل ۶ کیوبیت‌های تزویج شده

### ۶-۱ مقدمه

برهم‌نهی حالت‌ها<sup>۱</sup> در یک ذره کوانتومی تنها و درهم‌تنیدگی<sup>۲</sup> حالت‌های کوانتومی چندین ذره از مهمترین خواص تئوری اطلاعات کوانتومی می‌باشند [۳]. در واقع همین خواص منحصر به فرد کوانتومی هستند که پایه ایده‌های الگوریتم‌های کوانتومی و نهایتاً ساخت رایانه‌های کوانتومی برای حل مسائل پیچیده را شکل می‌دهند.

در مورد برهم‌نهی حالت‌ها در فصول قبلی صحبت نموده‌ایم؛ در این فصل به سراغ سیستمی می‌رویم که دارای دو ذره کوانتومی است و بالقوه می‌تواند حالت درهم‌تنیده کوانتومی ایجاد کند.

---

<sup>۱</sup> Superposition of states

<sup>۲</sup> Entanglement

درهم تنیدگی ذرات کوانتومی با روش‌های مختلفی انجام می‌پذیرد. به طور خاص برای کیوبیت‌های فاز درهم تنیدگی توسط روش‌های زیر انجام گرفته است: تزویج خازنی [۵۰]، تزویج قابل کنترل [۵۱] و [۵۲]، تزویج رزونانسی [۵۳] و همینطور توسط المان اسکوید [۵۴].

کار کردن با سیستم‌های دو کیوبیتی به وضوح به گیت‌های دو کیوبیتی نیز نیاز دارد. به طور مثال تحول زمانی آزاد بین حالت‌های  $|01\rangle$  و  $|10\rangle$  که به گیت  $i$ SWAP (imaginary-SWAP) مشهور است. گیت مذکور در هماهنگی کامل با کیوبیت‌های تزویجی از نوع خازنی می‌باشد [۵۰]. این گیت به همراه گیت‌های چرخشی تک کیوبیتی (گیت عملیاتی دو کیوبیتی است و عملگر واحد بر کیوبیت دوم اعمال می‌شود) یک مجموعه کامل از گیت‌های کوانتومی دو بعدی را تشکیل می‌دهد [۴۸].

ابتدا به توضیح چگونگی اندازه‌گیری حالت‌ها در سیستم‌های دو کیوبیتی می‌پردازیم، سپس در مورد هم‌شنوایی<sup>۱</sup> به عنوان یک عامل بروز خطا در اندازه‌گیری حالت‌ها می‌پردازیم و در نهایت روش تزویج جدیدی ارائه می‌کنیم تا بدین ترتیب در حد بسیار خوبی هم‌شنوایی را از بین ببریم.

## ۲-۶ اندازه‌گیری حالت سیستم‌های دو کیوبیتی

از آنجائیکه اندازه‌گیری در مورد سیستم‌های دو کیوبیتی که حالت‌های آنها کاملاً از هم مستقل‌اند، هیچ تفاوتی با حالت تک کیوبیتی نمی‌کند، به سراغ سیستم‌هایی می‌رویم که در آنها نیاز به درهم تنیده شدن حالت‌ها (کیوبیت‌ها) وجود دارد. مطابق مکانیک کوانتومی، اگر کیوبیت‌های A و B درهم تنیده‌اند،

<sup>۱</sup> Crosstalk



تا زمانی که عملیات اندازه‌گیری هنوز انجام نشده است، آنها یک حالت دو بعدی جدا نشدنی را تشکیل می‌دهند [۹]. در این شرایط روش اندازه‌گیری بسیار مهم است و نسبت به بسیاری از موارد دیگر کار با کیوبیت‌ها حساس‌تر می‌باشد.

در مورد حالت‌های درهم‌تنیده، همانطور که می‌دانیم خروجی اندازه‌گیری کیوبیت A یا B، حالت زوج کیوبیت را تعیین می‌کند. اگر چه در سیستم‌های عملی برای به دست آوردن تشابه اندازه‌گیری بهتر ناچاریم که هر دو را اندازه‌گیری کنیم. در کیوبیت‌های فاز که تمرکز این پایان‌نامه بر روی آنهاست، برای دو حالت درهم‌تنیده مثل  $\frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$ ، اندازه‌گیری دقیق خواهد بود اگر در نیمی از تلاش‌ها، کیوبیت A هیچ خروجی نداشته باشد در حالی که کیوبیت B به دلیل تونل‌زنی از حالت بر انگیزته ولتاژی نشان دهد و بالعکس.

یک روش معمول برای اندازه‌گیری حالت‌های دو کیوبیت اعمال دو جریان اندازه‌گیری مستقل می‌باشد. از آنجایی که پایه عملگرهای اندازه‌گیری همچنان در فضای  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  می‌باشند نتایج اندازه‌گیری نیز در همان فضا خواهند بود. در نتیجه اگر شخص به پایه‌های درهم‌تنیده علاقه‌مند باشد، خروجی اندازه‌گیری باید به فضای واقعی کیوبیت‌های درهم‌تنیده تصویر شود.

نکته بسیار مهم در این سیستم این است که اندازه‌گیری حالت هر کیوبیت می‌تواند در حالت کیوبیت دیگر اختلال ایجاد کند، که باعث تخریب اطلاعات کوانتومی ذخیره شده در سیستم خواهد شد. در عمل در صورت اندازه‌گیری ترتیبی این دو کیوبیت، اتفاق تونل‌زنی در هر کیوبیت یک پالس ولتاژ در کیوبیت دیگر القا می‌کند که در نهایت باعث تزریق مقداری جریان خواهد شد که دارای طیف فرکانسی وسیعی می‌باشد؛ در نتیجه این پالس می‌تواند باعث تحریک ناخواسته کیوبیت دوم (قبل از اندازه‌گیری) شود و در نهایت باعث ایجاد خطا در خروجی سیستم شود. این پدیده در ادبیات اطلاعات کوانتومی به عنوان

همشنوایی اندازه‌گیری<sup>۱</sup> [۵۵] شناخته می‌شود که انگیزه اصلی نویسنده برای تحقیق در این زمینه، حذف آن از سیستم کوانتومی می‌باشد.

وجود همشنوایی به شدت وابسته به زمان‌بندی دو پالس اندازه‌گیری است. در حقیقت ریشه همشنوایی در تحولات زمانی حالت‌ها می‌باشد. در مراحل اندازه‌گیری حالت‌های سیستم، دو بازه زمانی مهم برای همشنوایی وجود دارند. اول هنگام اعمال پالس‌های اندازه‌گیری و دوم پس از پایان یافتن آنها. تا به امروز مسئله همشنوایی بازه زمانی دوم به طور مفصل تحقیق شده است [۵۱] و [۵۲]. در این بازه زمانی، جریان تزریق شده ممکن است به طور ناخواسته کیوبیت دوم را تحریک کند و به تونل‌زنی ناخواسته پس از پایان پالس اندازه‌گیری منجر شود و متعاقباً مدار اندازه‌گیری ممکن است یک ولتاژ پسین (غلط) نشان دهد. منشأ این اتفاق زمان‌های پاسخ‌دهی بزرگ SQUID های مدار می‌باشد [۵۶]. برای حذف این اثر ناخواسته المان تزویج‌کننده به جای یک عنصر ثابت مثل خازن، بایستی قابل کنترل باشد. این امر می‌تواند توسط مداری تشکیل شده از سلف‌های تزویجی و یا پیوند جوزفسون بین دو کیوبیت میسر شود [۵۱] و [۵۶]. در این صورت امکان قطع و وصل نمودن تزویج بین دو کیوبیت توسط جریان اعمالی به مدار میانی، وجود دارد.

اگر چه ایجاد همشنوایی در حقیقت از همان ابتدای عملیات اندازه‌گیری آغاز می‌شود؛ هنگامی که شار انرژی حتی شدیدتر است (در بازه زمانی اول). دلیل این اتفاق مهم دامنه‌های بزرگ ابتدایی نوسانات رابی است که توسط تونل‌زنی احتمالی حالت (ها) ایجاد شده است. علاوه بر این هر دو کیوبیت به

---

<sup>1</sup> Measurement Crosstalk

صورت هم‌زمان با سد پتانسیل کوتاه شده مواجه می‌شوند که باعث می‌شود تونل‌زنی آسان‌تر شود و در نتیجه شدت هم‌شنوایی افزایش پیدا کند. برای کاهش این اثر می‌توان پالس‌های اندازه‌گیری را به صورت هم‌زمان به دو کیوبیت اعمال کرد (در بازه زمانی کوتاه‌تر از ایجاد مکانیزم هم‌شنوایی). متأسفانه آزمایش‌ها این حقیقت را نشان می‌دهد که در بهترین حالت حتی با دقیق‌ترین زمان‌بندی اعمال این پالس‌ها، تونل‌زنی در یک کیوبیت می‌تواند با احتمال خطای حدود ۱۵٪ باعث خروجی اندازه‌گیری اشتباه  $|1\rangle$  در کیوبیت دوم شود [۵۳]. بنابراین همگام‌سازی این دو جریان در عمل امکان‌پذیر نیست و تونل‌زنی در دو کیوبیت در یک زمان اتفاق نمی‌افتد. این امر نهایتاً به یک تبادل انرژی ناخواسته بین دو کیوبیت منجر می‌شود و هم‌شنوایی ایجاد شده همچنان می‌تواند خروجی را تغییر دهد. این نوع از خطا تمرکز اصلی این بخش می‌باشد. در کارهای گزارش شده تا به امروز در مورد هم‌شنوایی، از انواع تزویج کننده‌های قابل کنترل برای جدا سازی کیوبیت‌ها درست بعد از اعمال پالس‌های اندازه‌گیری برای کم کردن هم‌شنوایی استفاده شده و یا برخی برای محاسبه آن از تبدیل فوریه کمک گرفته‌اند (پاسخ داریم نه گذرا) که در عمل با صرف‌نظر کردن از انتقال انرژی در زمان‌های ابتدایی است. مهمترین برتری سیستم ارائه شده در این پایان‌نامه حذف تقریبی هم‌شنوایی به طور کلی از سیستم و در همه زمان‌ها می‌باشد.

اگر به شکل ۳-۸ بازگردیم، در کیوبیت فاز معرفی شده، جریان  $I_{\mu}$  برای اعمال گیت‌های چرخش حول صفحه  $x$ - $y$  استفاده شده است. عملیات تونل‌زنی کوانتومی از حالت برانگیخته در سمت (b) نشان داده شده است که در آن  $\Gamma_1$  مرتبط با نرخ تونل‌زنی کوانتومی می‌باشد [۳۹].

به طور مشابه تشابه اندازه‌گیری مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود [۵۷]:

$$F = \max\{P_{11} - P_{01}\} \quad (1-6)$$

که  $P_{01}$  احتمال اندازه‌گیری ناخواسته حالت برانگیخته  $|1\rangle$  می‌باشد، در حالی که حالت واقعی حالت

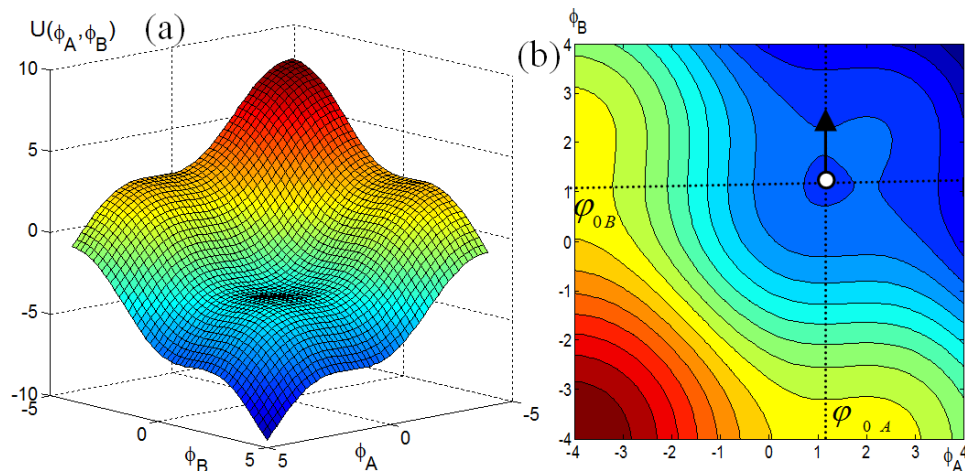
پایه  $|0\rangle$  بوده است. به همین ترتیب  $P_{11}$  احتمال اندازه‌گیری  $|1\rangle$  را نشان می‌دهد در حالی که حالت واقعی کیوبیت بوده است.

همانطور که قبلاً نیز اشاره شده است، بر اساس تئوری کوانتومی، تشابه اندازه‌گیری هیچ گاه به ۱ نمی‌رسد. تا به امروز بالاترین تشابه تئوری گزارش شده کمتر از ۹۹/۲٪ بوده است. ضمناً باید توجه کرد که در اندازه‌گیری‌های گزارش شده پالس‌های زمانی استفاده شده بسیار پهن بوده و می‌تواند به عدم همدوسی شدید در حالت کیوبیت‌ها منجر شود. علاوه بر این، پارامترهای پیوند جوزفسون فرض شده برای این اندازه‌گیری خارج از بازه عملی موجود برای پیوندهای جوزفسون در دسترس می‌باشد [۵۷]. گزارش‌هایی در زمینه بهینه‌سازی شکل پالس جریان برای گیت‌های پایه‌ای که منجر به تشابه اندازه‌گیری بالا می‌شود وجود دارد [۳۳] و [۵۸]. این در حالیست که تمامی این کارها در انتها به مرحله اندازه‌گیری رسیده و در نهایت تحت تاثیر اثرات تخریبی عملیات اندازه‌گیری قرار می‌گیرند.

### ۳-۶ طراحی مدار تزویج با استفاده از خازن و DC-SQUID

در این بخش یک سیستم دو کیوبیتی تزویجی طراحی شده است که به وسیله مفهوم تونل‌زنی کوانتومی دو-بعدی<sup>۱</sup> در فضای فاز بهینه شده است. در سیستمی که از دو کیوبیت فاز تزویج شده تشکیل شده است، پتانسیل هر کیوبیت به فاز کیوبیت دیگر نیز وابسته است. پتانسیل دو-بعدی که توسط تزویج خازنی تنها بین کیوبیت‌ها به دست آمده و نمای کانتور آن در شکل ۱-۶ نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> 2D quantum tunneling



شکل ۶-۱. (a) نمای ۳-بعدی و (b) نمای کانتور؛ از پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم برحسب اختلاف فازهای کیوبیت‌های A و B. خطوط نقطه‌چین دو راستایی را نشان می‌دهند که پتانسیل فازی بر اثر اعمال جریان‌های اندازه‌گیری در جهت آنها خم می‌شود. فلش جهت تونل‌زنی احتمالی حالت را نشان می‌دهد اگر حالت کیوبیت  $|01\rangle_{AB}$  بوده باشد.

تمام شکل‌های پتانسیل دو-بعدی در این پایان‌نامه توسط واحد انرژی  $I_0$  نرمالیزه شده اند که  $I_0$  جریان بحرانی پیوند جوزفسون میباشد.

در سیستم دو کیوبیتی پارامتری به نام زاویه فرار<sup>۱</sup> تعریف می‌کنیم که نشان دهنده اختلاف زاویه تونل‌زنی حالت کوانتومی از مسیر کمترین عمل<sup>۲</sup> می‌باشد. این مسیر فرار بر روی خمی قرار دارد که در آن پیچش<sup>۳</sup> تابع پتانسیل صفر است [۵۹] و [۶۰]. در حقیقت با اینکه مفهوم مسیر فرار بر روی تابع پتانسیل فازی یک مسیر معین است اما در حقیقت وجود خارجی ندارد و در هیچ آزمایشی نمی‌توان آن را نشان داد و به همین ترتیب نمی‌توان زاویه فرار را اندازه گرفت. این امر به این دلیل است که پایه فضای موجود از جنس فاز است نه از جنس مکان.

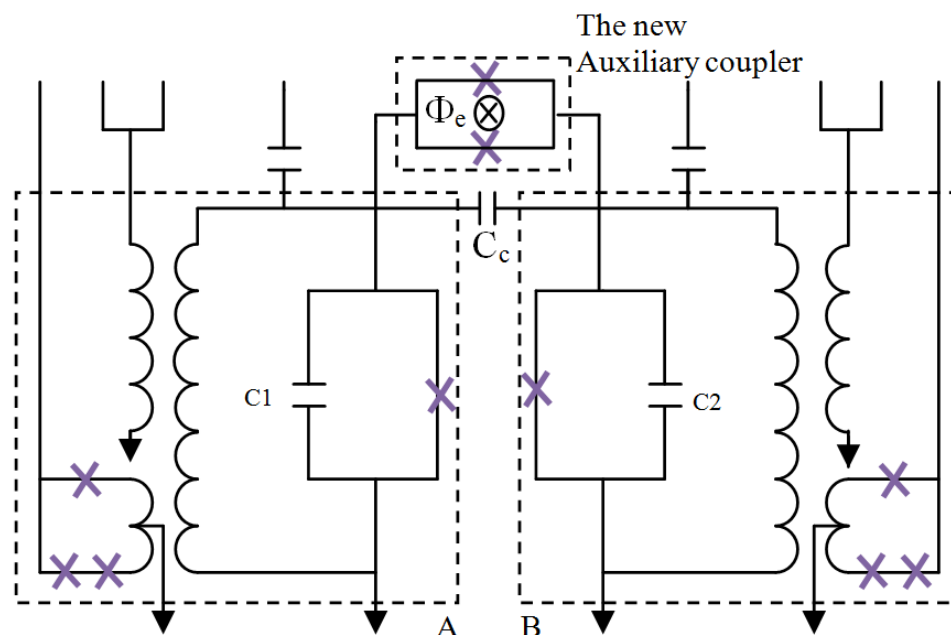
<sup>۱</sup> Escape angle

<sup>۲</sup> Least action trajectory

<sup>۳</sup> Curvature

برای مثال حالت  $|01\rangle_{AB}$  را در نظر می‌گیریم که دو پالس اندازه‌گیری دقیقاً در یک زمان به هر دو کیوبیت رسیده باشد. حالت  $|0\rangle_A$  کمترین ارتفاع را در مسیر  $\phi_B = \phi_{0B}$  مشاهده می‌کند. با این حال احتمال تونل‌زنی حالت پایه همچنان قابل صرف‌نظر است. از طرفی حالت  $|1\rangle_B$  به احتمال بسیار زیاد از سد پتانسیل مسیر  $\phi_A = \phi_{0A}$  تونل می‌زند. در نتیجه تغییرات فاز در این مسیر همراه است با ایجاد ولتاژی در دو سر پیوند کیوبیت که متعاقباً باعث تحریک اسکوئید مدار اندازه‌گیری می‌شود.

مدار طراحی شده این سیستم در شکل ۶-۲ نشان داده شده است. کیوبیت‌های A و B توسط کادرهای خط‌چین مربعی در چپ و راست شکل قرار دارند. مدار تزویج کننده شامل یک خازن ( $C_c$ ) و یک DC-SQUID می‌باشد. شار  $\Phi_e$  توسط میدان مغناطیسی خارجی به اسکوئید اعمال شده است. شار ایجاد شده در حلقه اسکوئید، کل پتانسیل کیوبیت‌ها را تغییر شکل می‌دهد که در ادامه خواهیم دید باعث حذف تقریبی هم‌نشوایی می‌شود.



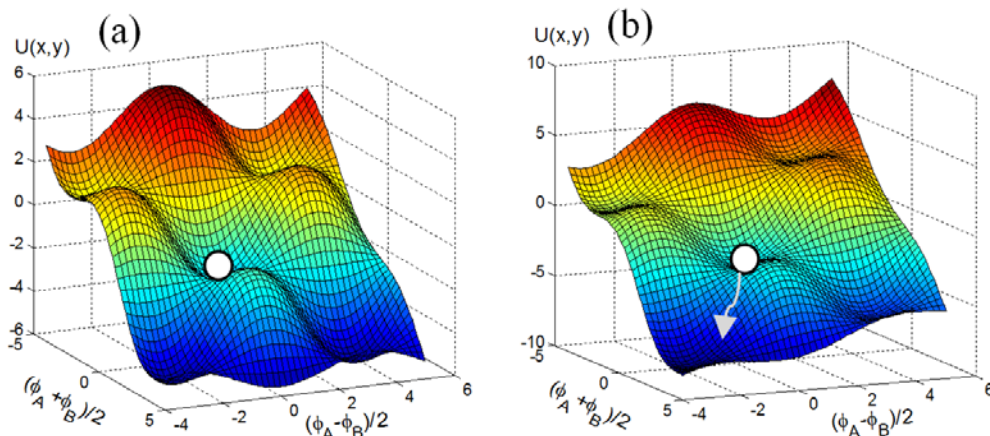
شکل ۶-۲. دو کیوبیت تک پیوندی که توسط مدار تزویج کننده شامل یک خازن و یک DC-SQUID به یکدیگر متصل شده‌اند.

همانطور که در مقدمه این فصل گفته شد، گیت iSWAP از نظر تئوری اطلاعات کوانتومی بسیار مهم و اساسی می‌باشد و به همین دلیل بهینه‌سازی عملکرد سیستم طراحی شده، به طور خاص برای این گیت انجام شده است.

دو روش برای اندازه‌گیری حالت در این سیستم قابل تصور است. روش اول مشابه توضیحات بخش پیشین می‌باشد که توسط دو پالس اندازه‌گیری تا حد امکان هم‌زمان که به هر کیوبیت اعمال شده- اند، اندازه‌گیری حالت صورت پذیرد. و یا می‌توان هر دو کیوبیت را فقط با تزریق یک پالس جریان، همراه میدان مغناطیسی خارجی مناسب که به اسکوئید تزویج کننده اعمال شده است اندازه‌گیری کنیم.

### ۱-۳-۶ اندازه‌گیری حالت سیستم تزویجی توسط دو پالس مجزا

پتانسیل فازی کلی دو-بعدی پیوندهای جوزفسون تزویج شده توسط خازن تنها برحسب نصف جمع  $x = (\phi_A + \phi_B)/2$  و نصف تفاضل  $y = (\phi_A - \phi_B)/2$  اختلاف فازهای کیوبیت‌های A و B قبل از اعمال جریان‌های اندازه‌گیری در شکل ۳-۶(a) نشان داده شده است. مشخص است که حالت‌های کوانتومی در مینیمم محلی این پتانسیل محبوس شده‌اند. در شکل (b) جریان اندازه‌گیری کیوبیت B اعمال شده است اما جریان اندازه‌گیری کیوبیت A اعمال نشده است. مشاهده می‌کنیم که حالت سیستم تمایل دارد در مسیر نشان داده شده تونل بزند.



شکل ۳-۶. پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم تزویجی توسط خازن تنها برحسب نصف جمع  $x = (\phi_A + \phi_B)/2$  و نصف تفاضل  $y = (\phi_A - \phi_B)/2$  اختلاف فازهای کیوبیت‌های A و B. (a) حالت سیستم در چاه پتانسیل محبوس است (قبل از اعمال جریان‌های اندازه‌گیری) (b) جریان اندازه‌گیری کیوبیت B اعمال شده است اما جریان اندازه‌گیری کیوبیت A اعمال نشده است.

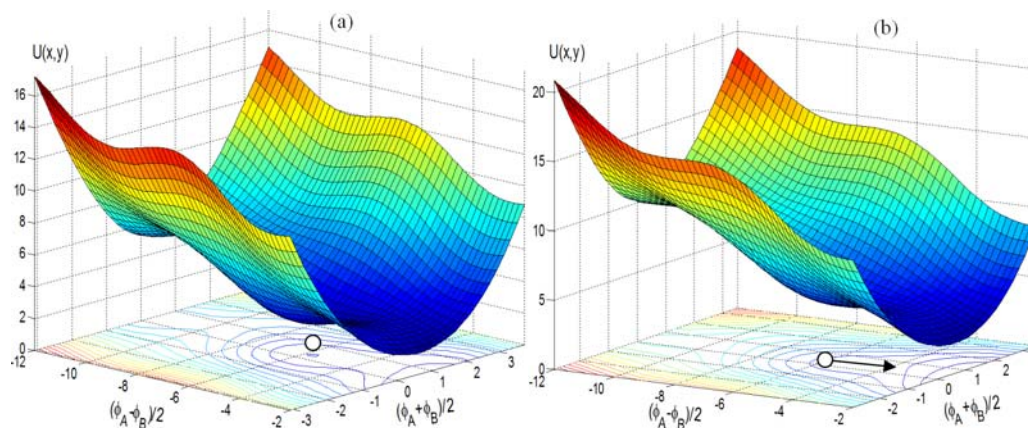
همان طور که قبلاً اشاره شد در عمل همزمانی این پالس‌ها امکان پذیر نمی‌باشد [۵۰]، [۵۳] و [۵۶]. در نتیجه درست بعد از رسیدن پالس اول برای مثال به کیوبیت B تونل زنی احتمالی از  $|1\rangle_B$  ممکن است  $|0\rangle_A$  را تحریک کند، قبل از اینکه پالس نهایی به کیوبیت A رسیده باشد.

مطابق بخش قبلی، برای فائق آمدن بر این موضوع، یک DC-SQUID کمکی به موازات خازن تزویجی اضافه کرده‌ایم که هدف از این امر وابسته ماندن کیوبیت‌های فاز حتی در طی عملیات اندازه‌گیری می‌باشد (شکل ۲-۶). اسکوئید مذکور در محلی از تراشه قرار داده شده است که بتوان یک میدان خارجی به آن اعمال کرد. این المان هندسه قله‌های پتانسیل دو بعدی را جابجا می‌کند. به این ترتیب می‌توانیم یک درجه آزادی (شار میدان خارجی) به سیستم اضافه کنیم و ابزاری برای شکستن سد پتانسیل در مسیر مشخص به طوری که نرخ تونل زنی هر دو کیوبیت یکسان شود، تهیه کنیم. به وضوح این



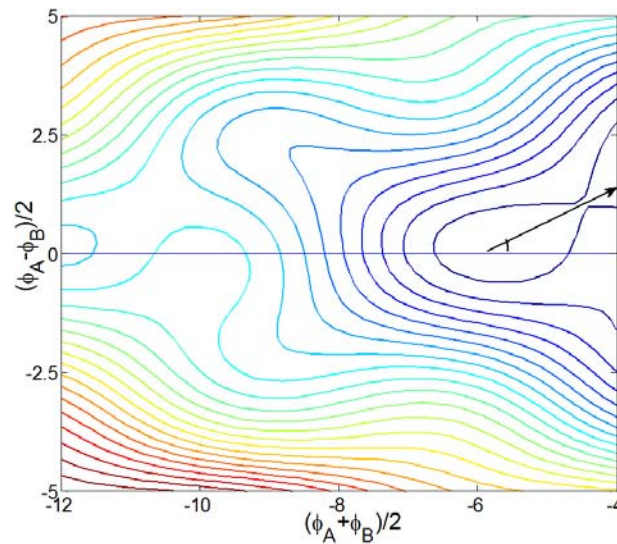
تراجکتوری<sup>۱</sup> در راستای نیم ساز محورهای اختلاف فاز  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_A + \hat{\phi}_B)$  می باشد که در آن راستا حالت ها به طور هم زمان تونل می زنند.

در شکل ۴-۶ پتانسیل دو-بعدی و چاه پتانسیل سیستم تزویجی با DC-SQUID کمکی نشان داده شده است. حالت کیوبیت در یک چاه محلی به تله می افتند تا جریان پالسی اعمال شود (a). پس از اینکه یک جریان اندازه گیری به یک کیوبیت برسد، برای مثال به B راستایی (فلش) نزدیک به نیمساز قطعا تراجکتوری تونل زنی خواهد بود (b). بنابر این، با اعمال یک جریان تنها به یک کیوبیت، تراجکتوری تونل زنی موثر همچنان همان مسیر قبلی خواهد بود، که هر دو کیوبیت در همان مسیر طول خواهند زد و در نهایت همشناوبی اندازه گیری در این کیوبیتها حذف خواهد شد. زاویه فرار ( $\theta$ ) در اینجا زاویه بین محور  $x$  و راستای کمترین عمل است (شکل ۵-۶ را ببینید).



شکل ۴-۶. پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم تزویجی پیشنهادی توسط مدار کمکی با پارامترهای  $\Phi_c = \Phi_0/\pi$  و  $\Phi_0/2\pi LI_0 = 0.1$ . (a) قبل از عملیات اندازه گیری (b) جریان اندازه گیری اعمال شده است. فلش مسیر فرار حالت محبوس در چاه را نشان می دهد.

<sup>1</sup> Trajectory



شکل ۶-۵. نمای کانتور پتانسیل دو-بعدی قبل از عملیات اندازه‌گیری با پارامترهای  $\Phi_0/2\pi LI_0=0.025$  و  $\pi\Phi_e/\Phi_0=2$ . زاویه  $\theta$  تراژکتوری کمترین عمل را نشان می‌دهد.

برای یافتن مقدار شار مناسب برای تونل‌زنی همزمان، بهتر است که شکل تحلیلی<sup>۱</sup> تابع پتانسیل را بدست آوریم. انرژی پتسیل اسکویید را می‌توان به شکل زیر بیان نمود [۵۹]:

$$U_S = 2E_{JS}[-I_{DC}(\theta_1 + \theta_2)/(4I_{0S}) - \frac{1}{2}\cos\theta_1 - \frac{1}{2}\cos\theta_2 + (\Phi_0/2\pi LI_{0S})(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) - \pi\Phi_e/\Phi_0)] \quad (۶-۲)$$

که در آن  $\theta_1 = \phi_A - \phi_B$  و  $\theta_2 = \phi_B - \phi_A$  فازهای اسکویید هستند،  $E_{JS}$  انرژی پیوندها است و  $I_{DC}$  جریانی است که در حلقه اسکویید می‌چرخد. فرض شده است که هر دو پیوند SQUID دارای سلف معادل یکسانی هستند.  $L$  مقدار اندوکتانس حلقه SQUID، و  $\Phi_e$  مقدار شار میدان خارجی است. با بازنویسی انرژی مذکور نسبت به اختلاف فازهای پیوندهای جوزفسون، به دلیل شرط  $\theta_1 + \theta_2 = 0$  اولین

<sup>۱</sup> Analytical form

بخش حذف می‌شود. با در نظر گرفتن اینکه جریان‌های یکسانی به پیوندها اعمال شده است ( $I_1 = I_2$ )

انرژی پتانسیل کل سیستم (کیوبیت‌های A و B همراه با SQUID تزویجی) برابر خواهد بود با:

$$U(\phi_A, \phi_B) = E_{Jq} \left( -\cos \phi_A - \cos \phi_B - \frac{I}{I_{0q}} \phi_A - \frac{I}{I_{0q}} \phi_B \right) + 2E_{JS} \left( -\cos \phi_A + \frac{\Phi_0}{2\pi LI_{0S}} \left[ 2(\phi_A - \phi_B) - \frac{\phi_e}{2} \right]^2 \right). \quad (3-6)$$

اگر فرض کنیم که پیوندها طوری ساخته شده‌اند که جریان بحرانی SQUID ( $I_{0S}$ ) از جریان

بحرانی کیوبیت‌ها ( $I_{0q}$ ) بسیار کوچکتر باشد ( $I_{0S} \ll I_{0q}$ )، می‌توان عبارت فوق را به شکل زیر

بازنویسی نمود:

$$U(\phi_A, \phi_B) = 2E_J \left[ -\cos x \cos y - \frac{I}{I_0} x + b \left( y - \frac{1}{8} \phi_e \right)^2 \right] \quad (4-6)$$

که در آن  $I_0 = I_{0q}$ ،  $b = 8/\pi \beta_L = 8\Phi_0/2\pi LI_0$ ،  $\phi_e = 2\pi \Phi_e/\Phi_0$  و  $E_J = E_{Jq}$  انرژی پیوند

جوزفسون هر کیوبیت می‌باشد. همچنین  $I = I_b + I_p$  که  $I_b$  جریان بایاس و  $I_p$  دامنه پالس اندازه‌گیری می‌باشند.

دو پارامتر کلیدی برای توصیف دقیق پدیده تونل‌زنی دو-بعدی لازم‌اند. احتمال فرار  $P_{esc}(|AB\rangle)$

که نشان دهنده احتمال تونل‌زنی از حالت  $|AB\rangle$  از میان سد دو-بعدی است و مقدار مناسب جریان

بایاس برای بدست آوردن تشابه اندازه‌گیری بالا را تعیین می‌کند. زاویه فرار  $\theta$  که با مقدار هم‌نشوایی

سیستم در ارتباط است. این دو پارامتر مستقیماً به جریان کیوبیت‌ها و مقدار شار خارجی اعمالی به

SQUID وابسته می‌باشند. باید توجه کرد که چون کیوبیت‌ها به هم تزویج شده‌اند نمی‌توان مقادیر

جریان بهینه را برای هر کیوبیت مستقلاً محاسبه نمود. بنابراین ناگزیریم که از روش پیشنهادی فوق

(تونل‌زنی دو بعدی) برای بهینه‌سازی عملکرد سیستم کمک بگیریم.

ارتفاع سد پتانسیل در راستای مسیر فرار از رابطه  $\Delta U = \Delta U_0 \sqrt{s_c \cos^3 \theta / 4}$  بدست می‌آید. فرکانس پلاسما نیز برای سیستم  $\omega_D = \omega_0 (u \cos \theta / s_c)^{1/4}$  می‌باشد. که  $u$  مشتق سوم تابع پتانسیل در راستای فرار و  $s_c$  نسبت جریانی است که در آن پیچش تابع پتانسیل به صفر می‌رسد (مسیر فرار). توجه شود که  $\Delta U_0$  و  $\omega_0$  مقادیر ارتفاع سد پتانسیل و فرکانس پلاسما در یک سیستم تک کیوبیتی می‌باشند [۵۹] و [۶۱].

جدول ۱-۶ (اعداد پر رنگ) مقادیر زاویه‌های فرار را به ازای مقادیر مختلف  $b$  و  $\pi\Phi_e/\Phi_0$ ، متناسب با قدرت تزویج و دامنه شار مغناطیسی اعمالی نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است افزایش  $b$  به مقادیر کوچکتر  $\theta$  می‌انجامد. این در نهایت باعث می‌شود که هم‌نشوایی حذف شود، چون تغییرات فاز در کیوبیت‌ها برابر خواهد بود  $\Delta\phi_A = \Delta\phi_B$ . بنا بر این نرخ‌های تونل‌زنی برای حالت‌های هر دو کیوبیت یکسان خواهد بود و اندازه‌گیری نیز زمان انجام می‌شود.

جدول ۱-۶. زاویه فرار  $\theta$  بر حسب قدرت تزویج  $b$  و شار مغناطیسی خارجی نرمالیزه  $\pi\Phi_e/\Phi_0$ . اعداد پررنگ: نتایج اعمال دو پالس جریان اندازه‌گیری هم‌زمان. اعداد کم‌رنگ: تک پالس جریان اعمال شده است.

		$b$				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0}$	0.8	20.1° 22.5°	12.4° 13.5°	8.7° 9.3°	6.7° 7.1°	5.4° 5.7°
	1.2	24.3° 25.8°	16.3° 17.2°	12.0° 12.5°	9.4° 9.7°	7.6° 7.9°
	1.6	27.0° 28.0°	19.2° 19.9°	14.6° 15.0°	11.6° 11.9°	9.5° 9.7°
	2	28.8° 29.6°	21.4° 21.9°	16.6° 16.9°	13.4° 13.6°	11.1° 11.3°

در دماهای پایین که نوسانات حرارتی قابل صرف‌نظراند نرخ فرار از سد پتانسیل بر نرخ تونل‌زنی ماکروسکوپی غالب خواهد بود و برابر است با [۵۹]، [۶۱] و [۶۲]:

$$\Gamma^{MQT} = \frac{\omega_{1D}}{2\pi} \sqrt{864\pi \frac{\Delta U}{\hbar \omega_{1D}}} \exp\left(-\frac{36}{5} \frac{\Delta U}{\hbar \omega_{1D}}\right) \quad (5-6)$$

به همین ترتیب احتمال فرار برابر خواهد بود با:

$$P_{esc} = 1 - e^{-\Gamma \Delta t} \quad (6-6)$$

معمولاً اختلاف زمانی در حدود  $\Delta t = 50 \mu s$  می‌باشد که با عرض پالس‌های جریان مورد استفاده متناظر است [۵۹].

در اینجا بیانی از پیوست A را می‌آوریم که در آن مقادیر ویژه انرژی برای کل کیوبیت‌های تزویجی به طور کامل محاسبه شده است. از آنجایی که کیوبیت‌های A و B متقارن می‌باشند (این امر برای عملکرد متناسب گیت‌ها لازم است [۵۰])، فرکانس‌های پلاسما برای این دو کیوبیت یکسان می‌باشند ( $\omega_A = \omega_B = \omega$ )، و بنابراین فرکانس انتقال متناظر با اختلاف انرژی بین حالت‌های  $|00\rangle$  و  $|11\rangle$  برابر است با  $2\omega$  که دو برابر اختلاف انرژی بین حالت‌های  $|00\rangle$  و  $|01\rangle$  می‌باشد.

حال مقادیر فرکانس پلاسما توابع پتانسیل یک بعدی و دو بعدی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega_{1D} = \frac{1}{2} \omega_{2D} (|11\rangle) - \frac{1}{2} \omega_{2D} (|00\rangle) \quad (7-6)$$

$$\omega_{1D} = \omega_{2D} (|10\rangle, |01\rangle) - \omega_{2D} (|00\rangle) \quad (8-6)$$

با استفاده از (۵-۶) و (۶-۶) می‌توان احتمال فرار را برای هر حالت محبوس با اسفاده از دو پارامتر کلیدی بدست آورد؛ فرکانس پلاسما چاه پتانسیل و ارتفاع سد پتانسیل. مهم است که متذکر شویم محاسبات احتمالات تونل‌زنی برای یافتن مقادیر بهینه جریان بایاس با هدف افزایش تشابه اندازه‌گیری انجام شده است، در حالی که عملیات اندازه‌گیری مطابق روش ارائه شده در بخش بعد پیاده می‌شود. به دلیل وابستگی ایجاد شده توسط مدار تزویج کننده کیوبیت‌ها جریان بهینه بایستی مستقیماً توسط پتانسیل کل مجموعه و مفهوم کمترین عمل محاسبه شود. به بیان دیگر هر کیوبیت نمی‌تواند مستقیماً برای به

دست آوردن بیشترین تشابه اندازه‌گیری مورد تحقیق قرار گیرد. حالت‌های متقارن  $|01\rangle$  و  $|10\rangle$  سیستم برای ساخت یک گیت ایده‌آل  $i\text{SWAP}$  کافی هستند. اگر چه در عملیات اندازه‌گیری همواره احتمال خطا وجود دارد که به نتایج اشتباه منجر می‌شود. برای مثال حالت پایه  $|0\rangle$  یک کیوبیت ممکن است از سد پتانسیل تونل بزند و خروجی اشتباه  $|11\rangle$  را ایجاد کند و مشابه خروجی ناخواسته‌ای ایجاد شود اگر حالت برانگیخته در چاه باقی بماند. بنابراین جریان‌های اندازه‌گیری برای داشتن مقدار بیشینه اختلاف بین احتمالات تونل‌زنی حالت‌های  $|00\rangle$  و  $|01\rangle$ ، بایستی به دقت انتخاب شوند که این امر عیناً با تعریف تشابه اندازه‌گیری در کیوبیت‌های ساده مرسوم متناظر است.

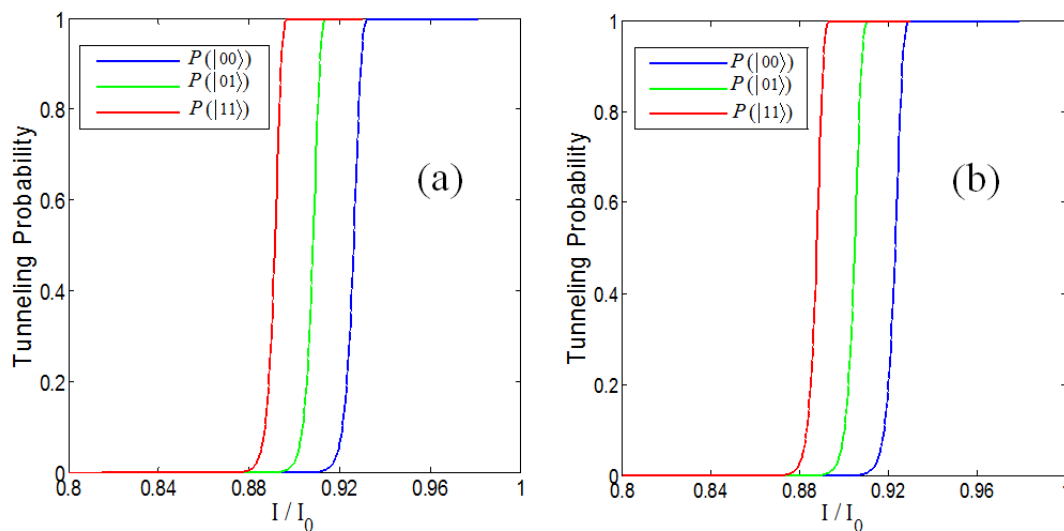
با فرض اینکه حالت دو بعدی در راستای کمترین عمل تونل بزند  $P_{esc}(|11\rangle)$  می‌تواند در یک چاه پتانسیل هم‌ارز با تک کیوبیت محاسبه شود که دارای فرکانس پلاسمایی برابر با مقدار محاسبه شده باشد. همچنین ارتفاع سد پتانسیل مطابق مقدار محاسبه شدی  $\Delta U - 2\hbar\omega_{1D}$  قرار داده می‌شود. عملیات یکسانی برای محاسبه احتمالات فرار  $P_{esc}(|10\rangle) = P_{esc}(|01\rangle)$  با قرار دادن مقدار سد پتانسیل

$$\Delta U - \hbar\omega_{2D}(|01\rangle \text{ or } |10\rangle) = \Delta U - \hbar\omega_{1D}$$

با کاهش شار مغناطیسی خارجی زاویه فرار  $\theta$  به صفر نزدیک می‌شود (جدول ۶-۱ را ببینید). این امر نشان می‌دهد که هم‌شنوایی کاهش پیدا کرده است در حالی که تشابه اندازه‌گیری نیز مقداری کم شده است. بنابراین بین تشابه اندازه‌گیری بالا و هم‌شنوایی کم یک تعادل نسبی<sup>۱</sup> برقرار است. در مقادیر بزرگ  $b$  هم‌شنوایی نیز کاهش پیدا می‌کند در حالی که در تشابه اندازه‌گیری تاثیر بسیار کمی مشاهده می‌شود.

<sup>۱</sup> Trade off

شکل ۶-۶ (a) احتمالات تونل زنی را هنگامی که دو پالس جریان هم زمان اعمال شده اند، نشان می دهد. مشاهده می شود که تشابه اندازه گیری در سیستم دو کیوبیتی تا ۹۹٪ افزایش پیدا کرده است. با دستکاری در پارامترهای دیگر مثل شار مغناطیسی خارجی و یا افزایش قدرت تزویج ( $b$ ) سیستم می تواند به مقادیر بسیار کوچک همشناوبی با هزینه از دست دادن تشابه به اندازه کمتر از ۱٪ برسد. از دیدگاه دیگر برای زوایای فرار کمتر از ۵ درجه، همشناوبی تقریباً صفر است (قابل صرف نظر). نگاهی به جدول ۶-۱ مشخص می کند که با افزایش شار میدان خارجی، زاویه فرار هم زمان افزایش پیدا می کند اما ارتباط زاویه فرار  $\theta$  نسبت به  $\Phi_e$  غیرخطی و غیرخطی است. در نهایت می توان گفت همشناوبی کم (زوایای فرار کوچک) در مقادیر مناسب شار میدان در دسترس می باشند



شکل ۶-۶. احتمالات تونل زنی برای حالت یک سیستم دو کیوبیتی بر حسب جریان اندازه گیری نرمالیزه ( $I/I_0$ ) برای پارامترهای  $b=0.8$  و  $\gamma_B = \phi/8 = 0.2$  خطوط آبی، سبز و قرمز به ترتیب متناظر با احتمالات تونل زنی حالت های  $P_{esc}(|00\rangle)$ ،  $P_{esc}(|10\rangle)$  و  $P_{esc}(|11\rangle)$  می باشند. (a) با دو پالس جریان اندازه گیری، (b) تک پالس جریان اندازه گیری در  $r=0.021$

## ۶-۳-۲ اندازه‌گیری حالت تنها توسط یک پالس

در این بخش تغییرات پارامترهای کیوبیت با اعمال تنها یک پالس اندازه‌گیری را محاسبه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که زاویه فرار  $\theta$  برای مقادیر مناسب پارامترهای سیستم همچنان نزدیک به صفر باقی می‌ماند. در عمل نتایج عملیات اندازه‌گیری با اعمال یک جریان پالس به اندازه اعمال هم‌زمان دو جریان مجزا مناسب خواهد بود. اگر تنها یک پالس اعمال شود پتانسیل کل سیستم برابر خواهد بود با:

$$U = 2E_J \left[ -\cos x \cos y - \frac{2I_b + I_p}{2I_0} x + r \frac{I_p}{2I_0} y + b \left( y - \frac{1}{8} \phi_e \right)^2 \right] \quad (۹-۶)$$

که  $r = I_p / (2I_b + I_p)$  از آنجائیکه جریان بایاس  $I_b$  تقریباً در حدود  $0.9I_0$  می‌باشد و  $I_e$  نیز در حدود  $0.02I_0$  می‌باشد پارامتر  $r$  تقریباً برابر خواهد بود با  $0.02$ .

در جدول ۶-۱ مقادیر زاویه فرار برای اندازه‌گیری تک پالس و به ازای  $r=0.02$  نشان داده شده است. مقایسه این نتایج با مقادیر زاویه فرار بدست آمده در بخش قبل هم‌خوانی بسیار خوبی دارد. با دقت به این موضوع که تنها یک پالس برای اندازه‌گیری نیاز است و مقادیر بسیار نزدیک هم‌نشوایی با زوایای فرار مشابه یافت شده‌اند نتیجه می‌گیریم که به طور کلی روش اندازه‌گیری تک پالسی نسبت به سیستم دو پالسی ارجح می‌باشد؛ چون از لحاظ پیاده سازی عملی ساده‌تر و موثرتر است. همان طور که قبلاً اشاره شد این امر به دلیل این حقیقت است که هم‌زمانی مطلق در عمل امکان پذیر نیست ولی در تئوری، اعمال دو پالس هم‌زمان در مورد هم‌نشوایی (هر چند بسیار کم در حدود ۱/۰٪) نتایج بهتری از خود نشان می‌دهد.

ارتفاع سد ( $\Delta U$ ) و فرکانس پلاسما ( $\omega_D$ ) برای این روش از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta U = \Delta U_0 \sqrt{s_c \cos^3 \theta / 4} (1 + r \tan \theta)^{\frac{3}{2}}, \quad (۱۰-۶)$$

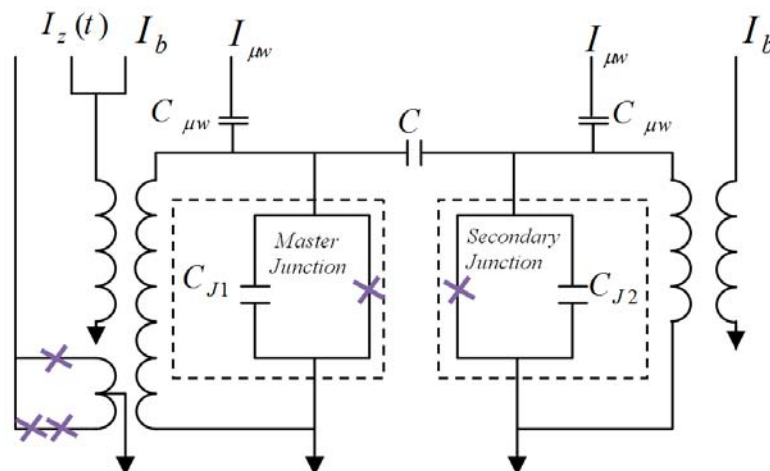
$$\omega_D = \omega_0 (u \cos \theta / s_c)^{\frac{1}{4}} (1 + r \tan \theta)^{\frac{1}{4}}. \quad (۱۱-۶)$$



شکل ۶-۶ (b) مفاهیم مشابه (a) را نمایش می‌دهد ولی هنگامی که تنها یک پالس اندازه‌گیری اعمال شده است. در اینجا تاثیرات پارامترهای مختلف در نظر گرفته شده‌اند. مقایسه این دو نمودار، این امر را آشکار می‌کند که تشابه اندازه‌گیری برای هر دو روش تقریباً یکسان است.

## ۶-۴ طراحی تک کیوبیت با عملکرد عالی

طرح پیشنهادی برای این منظور در شکل ۶-۷ نشان داده شده است که شامل یک پیوند جوزفسون اصلی و یک پیوند ثانویه می‌باشد. پایه کوانتومی این سیستم تک کیوبیتی بر حالت‌های  $\{|00\rangle, |11\rangle\}$  تعریف شده است (به جای پایه‌های مرسوم  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ). با در نظر گرفتن این چنین سیستمی هر دو کیوبیت همواره در حالت کوانتومی یکسانی قرار دارند بنابراین تغییرات انرژی وابسته به تونل‌زنی در هر پیوند به خصوص در مراحل اندازه‌گیری هیچ تأثیری بر روی دیگری نخواهد داشت. با وجود انتقال انرژی به دلیل اختلاف زمانی، هم‌سنوایی در سیستم طراحی شده ظاهر نخواهد شد.

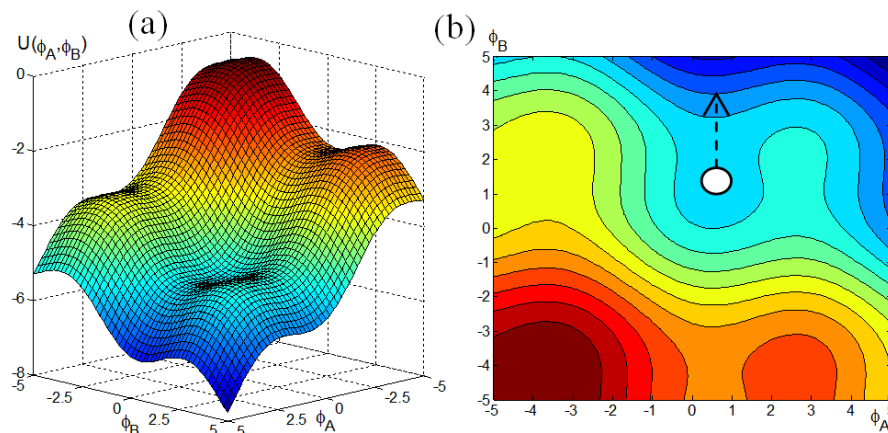


شکل ۶-۷. دو پیوند جوزفسون در این مدار به عنوان تک کیوبیت به هم تزویج شده‌اند. مقادیر خازن پیوندها و خازن تزویجی به ترتیب برابر است با  $C_1=C_2=4.3\text{pF}$  و  $C=1000C_1$ . جریان اندازه‌گیری ( $I_z$ ) تنها به پیوند جوزفسون اصلی اعمال می‌شود.

در یک سیستم دو کیوبیتی برای حل مشکل همشنوایی خازن تزویجی به مقداری است که زمان تزویج (بازه زمانی انتقال انرژی بین دو کیوبیت) در حدود میکرو ثانیه باشد. این زمان حدوداً هزار برابر بزرگتر از عرض پالس اندازه‌گیری است، بنابراین خروجی اندازه‌گیری شده هر کیوبیت در اسکوئید متناظر مستقلاً حاصل خواهد شد. اما برای ساختار تک کیوبیتی که در رژیم تزویجی قوی کار می‌کند مقدار مناسب خازن برای داشتن زمان‌های تزویج کوچکتر از عرض پالس اندازه‌گیری (  $10\%$  ) در حدود  $400\text{pF}$  می‌باشد که بسیار بزرگتر از خازن استفاده شده برای سیستم دو کیوبیتی است.

تمامی مراحل کار این سیستم از جمله مراحل آماده سازی، طریقه اعمال گیت، مراحل اندازه‌گیری و جریان‌های بهینه بایاس برای هر دو پیوند یکسان می‌باشند. از آنجایی که این پیوندها پارامترهای فیزیکی یکسانی دارند احتمال داشتن حالت‌های  $|00\rangle$  و  $|11\rangle$  در سیستم کلی بسیار بیشتر از وجود حالت‌های  $|01\rangle$  و  $|10\rangle$  می‌باشند. پارامترهای یکسان برای هر دو پیوند همچنین باعث داشتن فرکانس‌های پلاسما یکسان و حالت‌های ویژه یکسان می‌شود؛ هر چند جبران‌سازی کمی از تغییرات پارامترهای مختلف همچون جریان بحرانی و مقادیر خازن‌ها، توسط تنظیم مناسب مقادیر جریان‌های بایاس قابل انجام می‌باشد. بسیار قابل توجه است که با فرض تلورانس  $2/5\%$  برای هر کدام از پارامترهای پیوند، تشابه اندازه‌گیری در این سیستم تنها  $1/10\%$  نسبت به مقدار اصلی تغییر می‌کند.

پتانسیل کلی سیستم تک کیوبیتی پیشنهادی هنگامی که پالس اندازه‌گیری اعمال شده است، در شکل ۶-۸ نشان داده شده است. درک تفاوت بین مفاهیم تونل‌زنی دو بعدی برای یک تک کیوبیت (شکل ۶-۷) و دو کیوبیت تزویج شده (شکل ۶-۲) ضروریست. اگر پالس اندازه‌گیری به پیوند اصلی اعمال شود پتانسیل کل سیستم به سمت راستای محور فاز کیوبیت اصلی خم می‌شود. بنابراین احتمال تونل‌زنی حالت سیستم در این راستا بسیار زیاد خواهد بود.



شکل ۶-۸ (a) نمای ۳-بعدی و (b) نمای کانتور؛ از پتانسیل فازی دو-بعدی سیستم برای یک طراحی تک کیوبیتی با دو پیوند جوزفسون تزویجی بر حسب اختلاف فازهای دو پیوند. در این شکل جریان اندازه‌گیری به پیوند اصلی (A) اعمال شده است. فلش در (b) جهت تونل‌زنی احتمالی حالت را نشان می‌دهد.

تشابه اندازه‌گیری برای حالت‌های مثل  $|00\rangle$  و  $|11\rangle$  با داشتن مفهوم ترازهای انرژی در یک چاه پتانسیل تک پیوندی، محاسبه شده است. نرخ فرار حالت  $n$ -ام برای یک چاه پتانسیل دلخواه با استفاده از تقریب پتانسیل مکعبی و روش WKB<sup>۱</sup> به دست می‌آید:

$$\Gamma_n = \frac{\omega_p}{n! \sqrt{2\pi}} (432 N_s)^{\frac{1}{2}+n} \exp(-7.2 N_s), \quad (6-۱۲)$$

که در آن  $N_s = \frac{2^{3/4}}{3} (E_J/E_c)^{1/2} (1 - I/I_c)^{5/4}$  شماره تقریبی حالت محبوس در چاه پتانسیل،  $\omega_p = 2^{1/4} (2\pi I_c / \Phi_0 C)^{1/2} (1 - I_b/I_c)^{1/4}$  فرکانس پلاسما، و  $E_n = \hbar \omega_p (n + \frac{1}{2})$  انرژی تراز  $n$ -ام محبوس در چاه می‌باشند.  $I$ ،  $I_b$  به ترتیب جریان بحرانی، جریان کلی و جریان بایاس پیوند جوزفسون هستند. همچنین  $E_J = I_c \Phi_0 / 2\pi$  و  $E_c = e^2 / 2C_1$  به ترتیب انرژی جوزفسون و الکترواستاتیک پیوند می‌باشند.

<sup>۱</sup> Wentzel-Kramers-Brillouin

احتمال اندازه‌گیری حالت بر انگیزته به جای حالت پایه  $P_{01}$  و احتمال اندازه‌گیری صحیح حالت بر

انگیزته  $P_{11}$  پس از اعمال جریان اندازه‌گیری در مقایسه با عرض پالس ( $\tau$ ) به دست می‌آیند:

$$P_{01}(\tau) = 1 - \exp\left(-\int_0^\tau \Gamma_0(t') dt'\right) = 1 - \exp(-\Gamma_0 \tau) \quad (13-6)$$

$$P_{11}(\tau) = 1 - \exp\left(-\int_0^\tau \Gamma_1(t') dt'\right) = 1 - \exp(-u \Gamma_0 \tau) \quad (14-6)$$

که در آن  $u = \Gamma_1/\Gamma_0 = 432 N_s$  و  $\tau = \ln u / \Gamma_1$  متناظر با عرض پالس بهینه می‌باشد [57].

تشابه در اندازه‌گیری تابعی است از دامنه و عرض پالس جریان. با داشتن عرض پالس مورد نظر

مناسب تشابه اندازه‌گیری بهینه برابر خواهد بود با:

$$F^{opt} = \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u-1}} - \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{u-1}} \quad (15-6)$$

محدودیت پارامترهای پیوند و داشتن عرض پالس‌های بسیار کوچک برای اندازه‌گیری (در حدود

نانوثانیه) مسایلی هستند که برای به دست آوردن تشابه اندازه‌گیری بهینه باید بر آنها غلبه نمود.

در پیوست A نشان داده شده است که قدرت تزویج با مقدار  $\omega_1 C_c / C_1$  برابر است (الف-7).

متعاقباً زمان تزویج برابر خواهد بود با  $2\pi C_1 / (C_c \omega_1)$ . برای داشتن زمان تزویج حدود 0.1ns با فرض

اینکه فرکانس پلاسما در حدود 6 GHz باشد، نسبت خازن تزویجی در این مدار به خازن پیوند

جوزفسون برابر خواهد بود با:

$$C_c / C_{J1} \approx 100. \quad (16-6)$$

فرکانس انتقال حالت‌های این کیوبیت (بین  $|00\rangle$  و  $|11\rangle$ ) به مقدار  $2\omega_p$  (الف-8) به دست آمده

است که این مقدار برابر با فرکانس متناظر با اختلاف انرژی بین حالت بر انگیزته دوم  $|2\rangle$  و حالت پایه

$|0\rangle$  از یک کیوبیت تک پیوندی می‌باشد.

احتمال تونل زنی  $|11\rangle$  در راستای کمترین عمل که در این کیوبیت همان راستای محور فاز پیوند اصلی می‌باشد، مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{11}(\tau') = 1 - \exp\left(-\int_0^{\tau'} \Gamma_2(t') dt'\right) = 1 - \exp(-u' \Gamma_0 \tau') \quad (17-6)$$

در این رابطه  $u' = \Gamma_2 / \Gamma_0 = (432 N_s)^2 / 2$ ، و  $\tau' = \ln u' / \Gamma_2$  عرض پالس بهینه شده می‌باشد. تشابه اندازه‌گیری می‌تواند به طور مشابه از رابطه (۶-۱۵) تنها با تعویض  $u'$  به جای  $u$  به دست آید.

در جدول ۶-۲ عرض پالس‌های اندازه‌گیری برای مقادیر مختلفی از جریان‌های بایاس و بحرانی آورده شده است که در آنها فرض شده است مقدار  $I_p$  برابر با 100nA باشد. در این جدول نتایج در یک کیوبیت تک پیوندی (ارقام پررنگ در صورت ستون سوم) و یک کیوبیت با پیوندهای تزویجی (ارقام کم‌رنگ در مخرج ستون سوم) به ترتیب با فرض  $F=0.992$  ( $u=1000$ ) و  $F=0.9999$  ( $u'=500000$ ) محاسبه شده‌اند. این مقادیر پس از بهینه‌سازی کیوبیت‌های عملی با پارامترهای پیوند جوزفسون یکسان در هر دو ساختار مرسوم و جدید بدست آمده‌اند. در این صورت می‌توان به تشابه اندازه‌گیری به ترتیب برابر با ۹۹,۲٪ و ۹۹,۹۹٪ در این کیوبیت‌ها رسید. جدول ۶-۲ نشان می‌دهد که پالس‌های زمانی با عرض‌های حتی در حدود 0.9ns می‌توانند به عنوان پالس اندازه‌گیری در این کیوبیت استفاده شوند. حتی در این شرایط خواص کیوبیت از کیوبیت‌های مرسوم بهتر می‌باشد.

در نهایت برای به دست آوردن تشابه اندازه‌گیری بالا (عالی) در یک مدار محاسبات کوانتومی کامل که در آن یک الگوریتم کوانتومی پیاده سازی می‌شود بایستی هزینه دو برابر کردن خط پایانی کیوبیت‌ها را پرداخت. در عمل در خط پایانی پیوندهای آینه‌ای (اصلی و ثانویه) به عنوان تشکیل دهنده حالت‌های درهم‌تنیده بایستی قرار داده شوند. هنگام اجرای گیت‌های کوانتومی دو پیوند توسط اعمال جریان‌های بایاس متفاوت از یکدیگر جدا می‌شوند (پیوست الف)، و در انتها حالت‌های تزویجی توسط اعمال

جریان‌های بایاس یکسان به پیوندها تشکیل خواهند شد تا سیستم برای اندازه‌گیری آماده شود.

جدول ۶-۲. مقادیر بهینه شده عرض پالس لازم اعمالی (ستون سوم) به یک سیستم تک کیوبیتی برای مقادیر مختلف جریان بایاس و جریان بحرانی پیوندهای جوزفسون.

اعداد پررنگ در صورت: در کیوبیتی با یک پیوند جوزفسون با در نظر گرفتن پارامتر  $u=1000$  ( $F=0.992$ )

اعداد کم‌رنگ در مخرج: در کیوبیتی با دو پیوند جوزفسون توزیع شده و پارامتر  $u'=500000$  ( $F=0.9999$ )

$I_c(\mu A)$	$I_b(\mu A)$	$\tau(ns)$
10	9.78	285 / 1.08
12	11.77	268 / 1.02
14	13.75	254 / 0.97
16	15.74	241 / 0.92
18	17.73	233 / 0.89

## ۵-۶ زمان عدم همدوسی در کیوبیت

منبع غالب عدم همدوسی در کیوبیت‌ها تلفات نیمه‌هادی می‌باشد [۶۳] که برای درک بهتر پدیده درهم‌تنیدگی بایستی بررسی شود. همچنین نویز جریان و نویز شار در این عدم همدوسی شریک‌اند، البته در این کیوبیت نویز شار تاثیر بسیار کمتری دارد. در سیستم طراحی شده جدید، تا زمان ایجاد درهم‌تنیدگی، زمان عدم همدوسی برای هر حالت تفاوتی با یک کیوبیت تک پیوندی نمی‌کند. اما زمان عدم همدوسی پس از ایجاد درهم‌تنیدگی حالت‌ها تغییر خواهد نمود که با در نظر گرفتن (۶-۱۶) به اندازه  $1/42$  برابر زمان عدم همدوسی کیوبیت‌های تک پیوندی مرسوم محاسبه شده است (پیوست ب)؛ این مدت زمان، برای اجرای عملگرهای کوانتومی حتی بیش از مقدار لازم می‌باشد.

## فصل ۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی

در ابتدا آنالیزی از موضوع تونل‌زنی در پیوندهای جوزفسون آوردیم که در آن از حل دقیق معادله دیفرانسیل غیرخطی گینزبرگ-لاندائو با روش عددی پی‌درپی اختلال بهبود یافته شروع نموده و با محاسبه چگالی جریان الکتریکی در پیوند، پتانسیل موثر فازی دقیق و غیربدیهی را بدست آوردیم. سپس انرژی حالت‌های کوانتومی محبوس در چاه را محاسبه کردیم و در نهایت با بدست آوردن احتمالات تونل‌زنی این حالت‌ها در شرایط مختلف نتیجه‌گیری‌های لازم برای عملکرد بهینه و به طور خاص اندازه-گیری موثر کیوبیت انجام دادیم. برای این منظور معیارهای منطقی مناسبی تعریف و محاسبه کردیم و تأثیرات پارامترهای خود پیوند و پارامترهای خارجی سیستم همچون عرض پیوند، سطح مقطع پیوند، جریان بایاس و میدان مغناطیسی خارجی را بررسی کردیم. دیدیم که به طور کلی پیوندهایی با عرض بیشتر، نتایج بهتری خواهند داشت و سطح مقطع کوچکتر امنیت نوفه بیشتری تأمین می‌کند. جریان‌های بایاس بزرگتر باعث کاهش عمر حالت‌های کیوبیت می‌شوند، در حالی که جریان‌های بایاس کوچک

منجر به افزایش احتمال نشت و از بین رفتن اطلاعات خواهند شد؛ با در نظر گرفتن شرط لازم برای عمر کافی حالت‌ها (پایداری کیوبیت) مقدار بهینه جریان بایاس را پیدا نمودیم. مشاهده کردیم که میدان مغناطیسی خارجی اثرات غیر خطی شدیدی بر روی ارتباط چگالی جریان و اختلاف فاز می‌گذارد؛ با این حال اثرات مخربی بر عملکرد کیوبیت خواهد گذاشت. نتایج تئوری این کار را با نتایج یک آزمایش تجربی از یک گروه معتبر مقایسه کردیم و هماهنگی بسیار خوبی بین این دو مشاهده نمودیم که این امر صحت این محاسبات را تأیید می‌کند.

در ادامه در مورد سیستم‌های دوکیوبیتی فاز تزویجی تحقیق نموده و توسط مفهوم تونل‌زنی دو-بعدی، ساختار جدیدی معرفی کردیم که در آن برای بهبود مشخصات سیستم، دو پیوند جوزفسون هر کیوبیت از طریق یک خازن و یک المان DC-SQUID تزویج شده‌اند. بهبود این سیستم از به کارگیری یک پالس اندازه‌گیری و شار خارجی مناسب به ترتیب به پیوندها و اسکوئید به دست آمده است.

همشنوایی در سیستم‌های درهم‌تنیده یکی از مهمترین مشکلات در طول مرحله اندازه‌گیری می‌باشد که باعث رخ دادن خطا در خروجی می‌شود؛ به همین دلیل سیستم پیشنهادی طوری طراحی شده است که همشنوایی اندازه‌گیری در آن قابل صرف نظر باشد. در پتانسیل فازی دو-بعدی این سیستم، هر دو حالت در یک زمان و در مسیر مشخصی تونل می‌زنند و این امر باعث می‌شود که نتایج اندازه‌گیری یک کیوبیت بر روی حالت کیوبیت دیگر اثر مخربی نداشته باشد. این مسیر مناسب که توسط مسیر کمترین عمل مشخص می‌شود، که خود توسط شار میدان گذرنده از اسکوئید مورد نظر تعیین می‌شود. مقادیر شار لازم برای پائین آوردن مقدار همشنوایی در سیستم محاسبه شده و در کنار قدرت تزویج اسکوئید که به جریان آن وابسته است، معرفی شده‌اند. برای آسانی کار با سیستم، حالتی را بررسی نمودیم که به جای دو پالس اندازه‌گیری، تنها یک پالس اعمال گردد. مشاهده نمودیم که خروجی عملیات اندازه‌گیری مدار



تزوئجی در این شرایط نیز چندان تفاوتی نمی‌کند و در عمل بسیار راحت‌تر خواهد بود که تنها یک جریان به یکی از پیوندها اعمال شود.

همچنین، با الهام از مدار دو کیوبیتی، سیستم تک کیوبیتی دو پیوندی طراحی نمودیم که در آن تشابه اندازه‌گیری پیش بینی شده به مقدار ۹۹/۹۹٪ رسید. این تشابه اندازه‌گیری عالی حتی به وسیله پالس‌هایی با زمان کمتر از یک نانو ثانیه به دست می‌آید، در حالی که بالاترین تشابهات گزارش شده تا به امروز توسط پالس‌های زمانی پهن بدست آمده‌اند. این امر به دلیل وجود خازن تزوئجی مناسب حاصل شده است که پارامترهای: زمان تزوئج، زمان اندازه‌گیری و نسبت آنها را تعیین می‌کند. در مداری با پارامترهای واقعی، حالت متعادل در شرایط  $C_c=400\text{pF}$  بدست می‌آید که زمان تزوئج حدوداً ۱۰٪ عرض پالس اندازه‌گیری می‌باشد.

در سیستم طراحی شده مجموعه حالت‌های کیوبیت  $\{|00\rangle, |11\rangle\}$  می‌باشد که در این صورت حالت دو کیوبیت همواره یکسان خواهد بود. این امر جدا از امکان تشخیص خطا در خروجی، تشابه اندازه‌گیری را افزایش می‌دهد؛ چون اختلاف انرژی بین دو حالت این مجموعه دو برابر شده است. در نهایت، زمان عدم همدوسی این ساختار را محاسبه نموده و دیدیم که نسبت به یک کیوبیت تک پیوندی مرسوم ۴۲٪ بهبود حاصل شده است. این زمان عدم همدوسی برای اعمال گیت‌های معرفی شده تا به امروز حتی از حد مورد نیاز نیز بیشتر می‌باشد.

به عنوان پیشنهاد برای فعالیت‌های آتی در این راستا چند موضوع زیر مطرح است:

(۱) بررسی دقیق تحول زمانی سیستم و اعمال گیت‌های مختلف در کیوبیت فاز (تک پیوندی و دو

پیوندی)

(۲) بهینه‌سازی پارامترهای چیش مدار برای اعمال گیت‌های مختلف

۳) در صورت امکان تعیین یک استاندارد واحد برای گیت‌های مختلف

۴) بررسی دقیق تزویج کیوبیت فاز با انواع کیوبیت‌های دیگر

۵) مطالعه عمیق‌تر اثر میدان مغناطیسی خارجی و بدست آوردن ساختار هندسی مناسب برای پیوند

مورد استفاده

## مراجع

- R. B. Ash, "*Information Theory*," New York: Interscience, ISBN 0-470-03445-9, [۱]  
1965. New York: Dover, ISBN 0-486-66521-6, (1990).
- T.D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, J.L. O'Brien, [۲]  
Quantum computers," *Nat. Rev.*, 464 ,08812, (2010)."
- C. H. Bennett and P. W. Shor, "Quantum Information Theory," *IEEE Trans. on Inf.* [۳]  
*Theory*, vol. 44, no. 6, Oct. (1998).
- D. Deutsch, "Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal [۴]  
Quantum Computer," *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 400, no. 1818, 97-117, 8 July  
(1985).
- P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and [۵]  
factoring," *Proceedings of 35th Annual Symposium on Foundations of Computer  
Science*, pp. 124-134, (1994).
- L. K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search," [۶]  
*Proceeding of STOC '96 Proceedings of the 28th annual ACM symposium on  
Theory of computing*, pp. 212-219, (1996).
- N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, "Quantum cryptography," *Rev. of* [۷]  
*Modern Phys.*, vol. 74, Jan. (2002).

- R. Feynman, "Simulating Physics with Computers," *International Journal of Theoretical Phys.*, 21, 6–7: 467–488. (1982), (Retrieved 2007-10-19). [۸]
- Nielsen, Michael A, and Isaac L Chuang, "*Quantum Computation and Quantum Information*," Cambridge University Press, (2000). [۹]
- Schuster, David Isaac, "Circuit Quantum Electrodynamics," Ph.D. Thesis, Yale Universtiy, (2007). [۱۰]
- H. Walther, B. T. H. Varcoe, B. Englert and T. Becker, "Cavity quantum electrodynamics," *Rep. Prog. Phys.*, 69 1325, (2006) [۱۱]
- H. Mabuchi and A. C. Doherty, "Cavity quantum electrodynamics: Coherence in context," *Science*, 298(5597):1372-1377, November (2002). [۱۲]
- Chen, C.T. "*Advanced Linear Algebra*," Wilsey, (2005). [۱۳]
- D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, B. Johnson, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Resolving photon number states in a superconducting circuit," *Nature*, 445, 515-518, (2007). [۱۴]
- D. Loss and D. DiVincenzo, "Quantum computation with quantum dots," *Phys. Rev. A*, 57, 120–126, (1998). [۱۵]
- J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. Willems Van Beveren, B. Witkamp, L. M. Vandersypen, and L. P. Kouwenhoven, "Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot," *Nature*, 430-431, (2004). [۱۶]
- J. P. Reithmaier, G. Sek, A. Loffer, C. Hofmann, S. Kuhn, S. Reitzenstein, L. V. Keldysh, V. D. Kulakovskii, T. L. Reinecke, and A. Forchel, "Strong coupling in a single quantum dot-semiconductor microcavity system," *Nature*, 432(7014):197-200, November (2004). [۱۷]
- T. Yoshie, A. Scherer, J. Hendrickson, G. Khitrova, H. M. Gibbs, G. Rupper, C. Ell, O. B. Shchekin, and D. G. Deppe, "Vacuum Rabi splitting with a single quantum dot in a photonic crystal nanocavity ," *Nature*, 432(7014):200-203, November (2004). [۱۸]
- Werner Martienssen, Hans Warlimont, "*Springer Handbook of Condensed Matter and Materials Data*," ISBN-10: 3540443762, ISBN-13: 978-3540443766, Edition: 1, April 19, (2005). [۱۹]
- T. Van Duzer and C. W. Turner, "*Principles of Superconductive Devices and* [۲۰]

- Circuits*”, New York: Elsevier North Holland, (1981).
- Charles P. Poole Jr., Horacio A. Farach, Richard J. Creswick, “*Superconductivity*,” [۲۱]  
ISBN-10: 012561456X, ISBN-13: 978-0125614566, April 3, (1996).
- Michael Tinkham, “*Introduction to Superconductivity*,” McGraw-Hill, New York, [۲۲]  
(1996).
- A. Barone, G. Paternò, “*Physics and Applications of the Josephson Effect*,” Wiley, [۲۳]  
Jan (2005).
- G. Wendin, V.S. Shumeiko, “*Superconducting quantum circuits, qubits and* [۲۴]  
*computing*,” in: M. Rieth, W. Schommers (Eds.), Handbook of Theoretical and  
Computational Nanotechnology, vol. 3, American Scientific, (2006).
- V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, and M. H. Devoret, “Quantum [۲۵]  
Coherence with a single Cooper pair,” *Physica Scripta*, vol. T67, 165-170, (1998).
- A. Blais, R. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Cavity [۲۶]  
quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture  
for quantum computation,” *Phys. Rev. A* 69, 062320, (2004).
- Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, [۲۷]  
Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Charge  
insensitive qubit design derived from the Cooper pair box,” *Phys. Rev. A* 76,  
042319, (2007).
- C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, D. J. Wineland, [۲۸]  
“Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate,” *Phys. Rev. Lett.*, 75,  
4714-4717, (1995).
- F. F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. [۲۹]  
Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner, and R. Blatt, “Realization of the  
Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate,” *Nature*, 422, 408-411, (2003).
- L. Isenhower, E. Urban, T. Henage, X. L. Zhang, A. T. Gill, T. A. Johnson, T. G. [۳۰]  
Walker, and M. Saffman, “Demonstration of a Neutral Atom Controlled-NOT  
Quantum Gate,” *Phys. Rev. Lett.*, 104, 010503, (2010).
- J. L. O’Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph, and D. Branning, [۳۱]  
“Demonstration of an all-optical quantum controlled-NOT gate,” *Nature*, 426,  
264-267, (2003).
- T. B. Bittman, M. J. Fitch, B. C. Jacobs, and J. D. Franson, “Experimental [۳۲]

- controlled-NOT logic gate for single photons in the coincidence basis,” *Phys. Rev. A*, 68, 032316, (2003).
- E. Lucero, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, N. Katz, M. Neeley, A.D. O’Connell, H. Wang, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, “High-Fidelity Gates in a Single Josephson Qubit,” *Phys. Rev. Lett.*, 100, 247001, (2008). [۳۳]
- T. Yamamoto, Y. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, “Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits,” *Nature*, 425, 941-944, (2003). [۳۴]
- M. Steffen, M. Ansmann, R. C. Bialczak, N. Katz, E. Lucero, R. McDermott, M. Neeley, E. M. Weig, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, “Measurement of the Entanglement of Two Superconducting Qubits via State Tomography,” *Science*, 313, 1423-1425, (2006). [۳۵]
- J. H. Plantenberg, P. C. de Groot, C. J. P. M. Harmans, J. E. Mooij, “Demonstration of controlled-NOT quantum gates on a pair of superconducting quantum bits,” *Nature*, 447, 836-839, (2007). [۳۶]
- L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor,” *Nature*, 460, 240-244, (2009). [۳۷]
- Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, “Quantum-state engineering with Josephson-junction devices,” *Rev. Mod. Phys.*, 73, 357-400, (2001). [۳۸]
- G. Wendin and V. S. Shumeiko, “Quantum bits with Josephson junctions (Review Article),” *Low Temp. Phys.*, 33, 724, (2007). [۳۹]
- M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis, “Superconducting Qubits: A Short Review,” *preprint arXiv:cond-matt/0411174*, (2004). [۴۰]
- I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans, J. E. Mooij, “Coherent Quantum Dynamics of a Superconducting Flux Qubit,” *Science*, 299, 1869, (2003). [۴۱]
- G. Wendin, and V. S. Shumeiko, “*Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*,” vol. 3, M. Rieth and W. Schommers, eds., American Scientific, (2006). [۴۲]
- S. Khorasani and B. Rashidian, “Modified transfer matrix method for conducting interfaces,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 4, 251-256, (2002). [۴۳]

- G.R. Boogaard, A.H. Verbruggen, W. Belzig, T.M. Klapwijk, "Resistance of superconducting nanowires connected to normal-metal leads," *Phys. Rev. B* 69, 220503, (2004). [۴۴]
- K. Lin, Y.K. Kwong, M. Isaacson, J.M. Parpia, *Phys. B.* 165, 483, (1990). [۴۵]
- J.A. Haber, W.E. Buhro, *J. Am., Chem. Soc.* 120, 10847, (1998). [۴۶]
- [۴۷] رجوع شود به توضیحات تکمیلی مرجع [۳۵] بر روی اینترنت با آدرس:  
<http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/313/5792/1423/DC1>
- J. M. Martinis, "Superconducting Phase Qubits," *Quantum Inf. Proc.* 8, 81 (2009). [۴۸]
- M. Steffen, J. M. Martinis, and I. L. Chuang, "Accurate control of Josephson phase qubits," *Phys. Rev. B* 68, 224518 (2003). [۴۹]
- R. C. Bialczak, M. Ansmann, M. Hofheinz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, H. Wang, J. Wenner, M. Steffen, A. N. Cleland, J. M. Martinis, "Quantum Process Tomography of a Universal Entangling Gate Implemented with Josephson Phase Qubits," *Nature Phys*, vol. 6, pp. 409-413, (2010). [۵۰]
- R. C. Bialczak, M. Ansmann, M. Hofheinz, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, T. Yamamoto, A. N. Cleland, J. M. Martinis, "Fast Tunable Coupler for Superconducting Qubits," *Phys. Rev. B*, vol. 106, 060501, (2011). [۵۱]
- R.A. Pinto and A.N. Korotkov, "Analysis of a tunable coupler for superconducting phase qubits," *Phys. Rev. B*, vol. 82, 104522, (2010). [۵۲]
- R. McDermott, R.W. Simmonds, M. Steffen, K.B. Cooper, K. Cicak, K.D. Osborn, S. Oh, D.P. Pappas, J.M. Martinis, "Simultaneous State Measurement of Coupled Josephson Phase Qubits," *Science*, vol. 307, pp. 1299-1302, (2005). [۵۳]
- R. Harris, M. W. Johnson, T. Lanting, A. J. Berkley, J. Johansson, P. Bunyk, E. Tolkacheva, E. Ladizinsky, N. Ladizinsky, T. Oh, F. Cioata, I. Perminov, P. Spear, C. Enderud, C. Rich, S. Uchaikin, M. C. Thom, E. M. Chapple, J. Wang, B. Wilson, M. H. S. Amin, N. Dickson, K. Karimi, B. Macready, C. J. S. Truncik, G. Rose, "Experimental Investigation of an Eight-Qubit Unit Cell in a Superconducting Optimization Processor," *Phys. Rev. B*, vol. 82, 024511, (2010). [۵۴]
- G. Kandasamy, C. J. Wellard, and L. C. L. Hollenberg, "Cross-talk compensation of hyperfine control in donor qubit architectures," *Nanotechnology*, vol. 17, pp. 4572-4580, Aug. (2006). [۵۵]

- A.G. Kofman, Q. Zhang, J.M. Martinis, A.N. Korotkov, "Theoretical analysis of measurement crosstalk for coupled Josephson phase qubits, " *Phys. Rev. B*, vol. 75, 014524, (2007). [۵۶]
- T. A. Palomaki, S. K. Dutta, R. M. Lewis, H. Paik, K. Mitra, B. K. Cooper, A. J. Przybysz, A. J. Dragt, J. R. Anderson, C. J. Lobb, F. C. Wellstood, "Pulse Current Measurements and Rabi Oscillations in a dc SQUID Phase Qubit," *IEEE Trans. Appl. Super.*, vol. 17, pp. 162-165, (2007). [۵۷]
- S. Safaei, S. Montangero, F. Taddei, and R. Fazio, "Optimized single-qubit gates for Josephson phase qubits," *Phys. Rev. B*, vol. 79, 064524, Feb. (2009). [۵۸]
- V.L-Seguin, E.Turlot, C.Urbina, D.Esteve, M.H.Devoret, "Thermal activation of a hysteretic dc superconducting quantum interference device from its different zero-voltage states," *Phys. Rev. B*, vol. 46, pp. 5507-5522, (1992). [۵۹]
- B. Ivlev, J. P. Palomares-Báez, "Two-dimensional tunneling in a SQUID," *Phys. Rev. B*, vol. 82, 184513, (2010). [۶۰]
- F. Balestro, J. Claudon, J. P. Pekola, O. Buisson, "Evidence of two-dimensional macroscopic quantum tunneling of a current-biased DC- SQUID," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, 158301, (2003). [۶۱]
- S. Kawabata, T. Kato, T. Bauch, "Theory of two-dimensional macroscopic quantum tunneling in a Josephson junction coupled with an LC circuit," *J. Phys.: Conf. Series*, vol. 150, 052105, (2009). [۶۲]
- R.-C. Ge, C.-F. Li, M. Gong, G.-C. Guo, "Partial-measurement-induced entanglement dynamics in a Josephson-junction system," *Europhys. Lett.*, vol. 89, 48005, 2010. [۶۳]
- T. Wu, Z. Li, J. Liu, "Diagonalizing the Hamiltonian of capacitively coupled superconducting phase qubits," *Japanese J. of Appl. Phys.*, vol. 45, Issue 6, pp. L180-L183, (2006). [۶۴]
- J. M. Martinis, K. B. Cooper, R. McDermott, M. Steffen, M. Ansmann, K. D. Osborn, K. Cicak, Seongshik Oh, D. P. Pappas, R.W. Simmonds, C. C. Yu, "Decoherence in Josephson Qubits from Dielectric Loss," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, 210503, (2005). [۶۵]
- R. McDermott, "Materials Origins of Decoherence in Superconducting Qubits," *IEEE Trans. Appl. Super.*, vol. 19, 2012255, (2008). [۶۶]



- W. A. Phillips, "Two-level states in glasses," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 50, pp. 1657-1708, (1987). [۶۷]
- R.W. Simmonds, K.M. Lang, D. A. Hite, S. Nam, D. P. Pappas, and John M. Martinis, "Decoherence in Josephson Phase Qubits from Junction Resonators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, 077003, 2004. [۶۸]
- R. W. Simmonds, M. S. Allman, F. Altomare, K. Cicak, K. D. Osborn, J. A. Park, M. Sillanpää, A.Sirois, J. A. Strong, J. D. Whittaker, "Coherent interactions between phase qubits, cavities, and TLS defects," *Quantum Information Processing*, vol. 8, pp. 117-131, 2009. [۶۹]
- P. Rebentrost and F. K. Wilhelm, "Optimal control of a leaking qubit," *Physical Review B*, vol. 79, 060507, Feb. 2009. [۷۰]

### پیوست الف (گیت iSWAP)

یک سیستم کوانتومی که دارای دو پیوند جوزفسون و یک خازن تزویجی باشد دارای لاگرانژی<sup>۱</sup> به شکل زیر خواهد بود [۶۴]:

$$(۱-۷) \quad (\text{الف-۱})$$

$$L = \frac{1}{2} C_{J1} \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} C_{J2} \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\phi}_2^2 + E_{J1} \cos \phi_1 + E_{J2} \cos \phi_2 + \frac{\hbar}{2e} \phi_1 I_{b1} + \frac{\hbar}{2e} \phi_2 I_{b2} + \frac{1}{2} C_c \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^2,$$

$$U_i(\phi) = E_{Ji} \cos \phi_i + \frac{\hbar}{2e} \phi_i I_{bi}, i=1,2 \quad (\text{الف-۲}) \quad (۲-۷)$$

که در آن  $U_i(\phi)$  پتانسیل هر پیوند نسبت به اختلاف فاز می‌باشد. فرکانس پلاسما با شرط

$$\partial U_i(\phi) / \partial \phi = 0 \quad \text{به شکل زیر به دست آمده است [۲۴]}$$

$$\omega = 2^{\frac{1}{4}} \omega_J \left( 1 - \frac{I_b}{I_c} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{الف-۳}) \quad (۳-۷)$$

که در آن  $\omega_J = \sqrt{4\pi I_c / \Phi_0 C}$  و  $C$  خازن پیوند می‌باشد.

ممان‌های تزویجی پیوندهای جوزفسون مطابق زیر تعریف و محاسبه شده‌اند [۲۴]:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = C_1 \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_1 - C_c \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_2 \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = C_2 \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_2 - C_c \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_1 \end{cases} \quad (\text{الف-۴}) \quad (۴-۷)$$

$$C_i = C_{Ji} + C_c \quad \text{که در آن}$$

<sup>۱</sup> Lagrangian

با در نظر گرفتن روابط جابجایی کوانتومی<sup>۱</sup> بین دو اختلاف فاز و ممان‌های آنها، هامیلتنی متناظر به شکل زیر به دست می‌آید:

$$(۵-۷) \quad (\text{الف-۵})$$

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1^*} + \frac{p_2^2}{2m_2^*} - E_{J1} \cos \phi_1 - E_{J2} \cos \phi_2 - \frac{\hbar}{2e} \phi_1 I_{b1} - \frac{\hbar}{2e} \phi_2 I_{b2} \\ + \frac{C_c}{C_2 m_1^*} p_1 p_2 + \frac{1}{2} C_c \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^2$$

به نحوی که نسبت جریان‌ها به شکل  $1 - k_i = I_{b_i} / I_{c_i}$  تعریف شده‌اند ( $|k_i| \ll 1$ ).

با تعریف جرم‌های موثر برای هر پیوند به شکل  $m_1^* = \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 (C_1 C_2 - C_c^2) / C_2$

و  $m_2^* = \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 (C_1 C_2 - C_c^2) / C_1$  می‌توان هامیلتونی موثر را به دست آورد:

$$(۶-۷) \quad (\text{الف-۶})$$

$$H_{eff} = \hbar \omega_1 \left( a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_2 \left( a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \right) \\ - \hbar \frac{C_c \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\sqrt{C_1 C_2}} (a_1^\dagger - a_1) (a_2^\dagger - a_2)$$

به طوری که  $\omega_i = (2k_i)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\hbar I_{c_i} / 2em_i^*}$  فرکانس پلاسما موثر هر پیوند می‌باشد. با در نظر گرفتن

پارامترهای یکسان برای هر دو کیوبیت، بخش برهم‌کنش هامیلتونی فوق را می‌توان به شکل ماتریسی زیر

نوشت

$$H_{int} = \hbar \omega_0 \frac{C_c}{C} (|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|) \quad (\text{الف-۷}) \quad (۷-۷)$$

که در آن  $C = C_1 = C_2$ .

<sup>۱</sup> Quantum commutations

و در نهایت مقادیر ویژه این همیلتونی موثر برابر خواهند بود با:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega \\ \lambda_{3,4} &= \pm \frac{1}{2} \hbar \sqrt{W^2 + \Delta^2} \end{aligned} \quad (\text{الف-۸}) \quad (۷-۸)$$

که در آن  $\Delta = \omega_1 - \omega_2$  و  $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ ،  $W = 2\sqrt{\omega_1 \omega_2} C_c / \sqrt{C_1 C_2}$

هنگامی که جریان‌های بایاس اعمال شده مقادیر بسیار متفاوتی داشته باشند ( $\Delta \gg W$ ) پیوندها به طور مستقل عمل خواهند کرد. به بیان دیگر حالت‌های سیستم درهم‌تنیده نخواهد بود. در شرایط عکس فرکانس‌های پلاسما یکسان خواهند بود ( $\omega_1 = \omega_2$ ) که برای مراحل اندازه‌گیری و به دست آوردن تشابه اندازه‌گیری بالا مورد نیاز است.

### پیوست ب (تلفات نیمه هادی)

ماتریس هامیلتونی برای یک سیستم دو حالت (TLS<sup>۱</sup>) در یک ماده نیمه هادی [۶۵]-[۶۷] به شکل زیر نوشته می شود:

$$H_{TLS} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -\Delta \end{pmatrix} \quad (ب-۱) \quad (۹-۷)$$

هامیلتونی فوق در پایه های  $|R\rangle$  و  $|L\rangle$  نوشته شده اند که این حالت ها شکل های دو قطبی TLS می - باشند. می توان حالت های ویژه ماتریس فوق را به نام های حالت پایه و برانگیخته محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|L\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|R\rangle \\ |e\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|L\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|R\rangle \end{aligned} \quad (ب-۲) \quad (۱۰-۷)$$

$$\tan(\theta) = \Delta_0 / \Delta \quad \text{که}$$

بنابراین هامیلتونی برهم کنش [۶۵]-[۷۰] برای یک TLS و دو پیوند جوزفسون در حضور خازن تزویجی به شکل زیر بیان می شود:

$$(ب-۳) \quad (۱۱-۷)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= -E_{J1}.d_1 - E_{J2}.d_2 - E_c.d_c \\ &= (edV_{J1} \cos(\eta)/x)(|L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|) \\ &\quad + (edV_{J2} \cos(\eta)/x)(|L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|) \\ &\quad + (ed'(V_{J1} - V_{J2}) \cos(\eta)/x')(|L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|) \end{aligned}$$

که در آن  $E_{J1}$ ،  $E_{J2}$  و  $E_c$  دامنه های میدان الکتریکی القایی به ترتیب در پیوندهای جوزفسون و خازن تزویجی می باشند.  $\eta$ ،  $e.d$  و  $x$  همچنین به ترتیب زوایای نسبی ممان ثابت دو قطبی، ممان متغیر

<sup>۱</sup> Two Level System

دو قطبی و ضخامت نیمه‌هادی پیوند می‌باشند. به طور مشابه  $e.d'$  و  $x'$  ممان متغیر دو قطبی و ضخامت

نیمه هادی خازن می‌باشند.  $V_{J1}$  و ولتاژهای موثر بین دو طرف پیوندهای جوزفسون می‌باشند که با

استفاده از (الف-۴) مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} V_{J1} &= \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{C_1 - C_c^2/C_1} \left(P_1 + \frac{C_c}{C_1} P_2\right) \\ V_{J2} &= \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{C_1 - C_c^2/C_1} \left(P_2 + \frac{C_c}{C_1} P_1\right) \end{aligned} \quad \text{(ب-۴)} \quad (۱۲-۷)$$

هامیلتونی برهم‌کنش نهایی در پایه‌های حالت‌های پایه و برانگیخته ماده نیمه‌هادی  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  و

کیوبیت  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ، با در نظر گرفتن تاثیر میدان‌های الکتریکی برابر خواهد بود با

$$(۱۳-۷) \quad \text{(ب-۵)}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} = i(S/2) \left\{ |11\rangle \langle g| \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 10| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 01| \right) \langle e| \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle \right) |e\rangle \langle 11| \langle g| \right\} \end{aligned}$$

که  $S = 2 \cos(\eta) \sin(\theta) (d/x) \sqrt{e^2 (\hbar \omega / 2C')}$  ،  $\omega$  از (الف-۶) بدست می‌آید و

$$C' = C_1 - C_c^2/C_1$$

نهایتاً نسبت نرخ میرایی برای حالت  $|11\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$  در پیوندهای تزویجی و نرخ میرایی

در پیوندهای تکی  $(|1\rangle \rightarrow |0\rangle)$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Gamma^{2D}}{\Gamma^{1D}} = 2 \left( \frac{C_{J1}}{C'} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{(ب-۶)} \quad (۱۴-۷)$$

معادلات (ب-۵) و (ب-۶) با فرض  $d' \ll d$  با هدف کاهش اثر تلفات نیمه‌هادی در خازن

تزویجی محاسبه شده‌اند. با در نظر گرفتن (۶-۱۶) می‌توان نسبت فوق را با مقدار  $0.7$  محاسبه نمود.

**Abstract:** The.

**Keywords:** Quantum Information, Superconductor, Phase Qubit, Josephson junction, Measurement Fidelity, Crosstalk.



**Sharif University of Technology**  
**School of Electrical Engineering**

**Ph.D. Thesis**

# **Optimaization of the superconductor qubites operation**

By:

**Hesam Zandi**

Supervisor:

**Sina Khorasani**

Coadvisor:

**Mehdi Fardmanesh**

**September 2012**